



# Stabilité des schémas numériques conservatifs pour l'advection

Erwan Deriaz [erwan.deriaz@L3M.univ-mrs.fr](mailto:erwan.deriaz@L3M.univ-mrs.fr)

Laboratoire de Mécanique, Modélisation & Procédés Propres – Marseille

avec **Dmitry Kolomenskiy** [dkolom@L3M.univ-mrs.fr](mailto:dkolom@L3M.univ-mrs.fr)

SMAI 2011  
Guidel – 05.27.2011

# Plan

- 1 Introduction
  - Les équations hyperboliques
  - La condition CFL
  - Analyse de stabilité de von Neumann
- 2 Condition de stabilité  $\Delta t \leq Ch^\alpha$  avec  $\alpha > 1$ 
  - Stabilité sous  $\|u_{n+1}\| \leq (1 + C\Delta t) \|u_n\|$
  - Effets de la discrétisation spatiale
  - Extension à des domaines bornés
- 3 Dissipation numérique sous condition CFL
  - Effets de la discrétisation temporelle
  - Exemple avec Runge-Kutta 3
  - Expérience numérique avec Burgers

# Plan

1

## Introduction

- Les équations hyperboliques
- La condition CFL
- Analyse de stabilité de von Neumann

2

## Condition de stabilité $\Delta t \leq Ch^\alpha$ avec $\alpha > 1$

- Stabilité sous  $\|u_{n+1}\| \leq (1 + C\Delta t) \|u_n\|$
- Effets de la discrétisation spatiale
- Extension à des domaines bornés

3

## Dissipation numérique sous condition CFL

- Effets de la discrétisation temporelle
- Exemple avec Runge-Kutta 3
- Expérience numérique avec Burgers

# Équations de type hyperbolique

**Loi de conservation d'un scalaire :**

$$\partial_t u + \nabla_x F(u) = 0 \quad (1)$$

**Équation d'Euler :**

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{0}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

Linéarisation  $\rightarrow$  **équation de transport :**

$$\partial_t u + a \partial_x u = 0. \quad (3)$$

Transformée de Fourier :  $\partial_t \hat{u} = -a i \xi \hat{u}$ ,

$\rightarrow$  **Équation différentielle ordinaire:**

$$\partial_t u = z u \text{ avec } z \in i\mathbb{R}. \quad (4)$$

# Plan

1

## Introduction

- Les équations hyperboliques
- La condition CFL
- Analyse de stabilité de von Neumann

2

## Condition de stabilité $\Delta t \leq Ch^\alpha$ avec $\alpha > 1$

- Stabilité sous  $\|u_{n+1}\| \leq (1 + C\Delta t) \|u_n\|$
- Effets de la discrétisation spatiale
- Extension à des domaines bornés

3

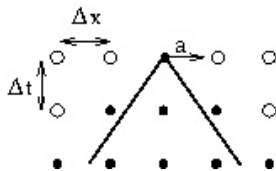
## Dissipation numérique sous condition CFL

- Effets de la discrétisation temporelle
- Exemple avec Runge-Kutta 3
- Expérience numérique avec Burgers

# Condition CFL = Notion physique d'aire d'influence

$\Delta x$  = pas d'espace

$\Delta t$  = pas de temps



Le domaine de calcul doit inclure le domaine d'influence physique.

$$a \Delta t \leq C \Delta x$$

$C \sim 1$  déterminé de façon empirique pour assurer la stabilité.

# Plan

1

## Introduction

- Les équations hyperboliques
- La condition CFL
- Analyse de stabilité de von Neumann

2

## Condition de stabilité $\Delta t \leq Ch^\alpha$ avec $\alpha > 1$

- Stabilité sous  $\|u_{n+1}\| \leq (1 + C\Delta t) \|u_n\|$
- Effets de la discrétisation spatiale
- Extension à des domaines bornés

3

## Dissipation numérique sous condition CFL

- Effets de la discrétisation temporelle
- Exemple avec Runge-Kutta 3
- Expérience numérique avec Burgers

## Analyse de stabilité de von Neumann en spectral

$$\partial_t u = F(u) \quad (5)$$

Isoler un mode de Fourier  $\xi$  en espace :

$$u(t, x) = \widehat{u}(t, \xi) e^{j\xi x} \quad (6)$$

Discrétisation en temps  $u_n \sim u(n \Delta t, \cdot)$

**Ex** schéma Runge-Kutta d'ordre 2 :

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t F(u_n + \frac{\Delta t}{2} F(u_n)) \quad (7)$$

**Hyp** :  $\widehat{F(u)}(\xi) = \sigma(\xi) \widehat{u}(\xi)$ , alors avec  $z = \Delta t \sigma(\xi)$

$$\widehat{u_{n+1}}(\xi) = \widehat{u_n}(\xi) + \Delta t \sigma(\xi) \widehat{u_n} + \frac{\Delta t^2}{2} \sigma(\xi)^2 \widehat{u_n} = G(z) \widehat{u_n} \quad (8)$$

**Facteur d'amplification** :  $G(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2}$ ,  $z \in \mathbb{C}$ .



# Stabilité de von Neumann

## Définition:

Pour tous  $\Delta t$  et  $\Delta x$  tels que  $(\Delta t, \Delta x) \in \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ , et pour tous les modes  $\xi$  de l'espace discrétisé ( $\xi \in [-\frac{\pi}{\Delta x}, \frac{\pi}{\Delta x}]$ ),  $G$  satisfait

$$|G(\Delta t \sigma(\xi))| \leq 1 + C\Delta t$$

pour  $C$  une constante positive indépendante de  $\Delta t$  et de  $\Delta x$ .

Alors

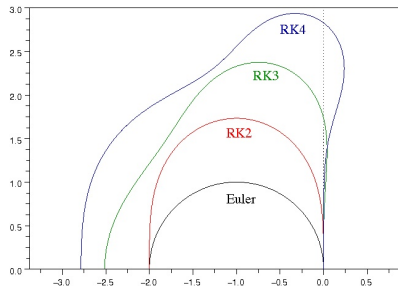
$$\|u_T\| = \|G(z)^{T/\Delta t} u_0\| \leq (1 + C\Delta t)^{T/\Delta t} \|u_0\| \leq e^{CT} \|u_0\|$$

**Ex :** pour RK2,  $|G(z)| = |1 + z + \frac{z^2}{2}|$ .

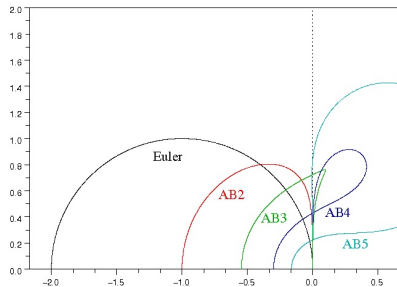
Si  $z = i\zeta$ ,  $\zeta \in \mathbb{R}$ ,  $|G(z)|^2 = (1 - \frac{\zeta^2}{2})^2 + \zeta^2 = 1 + \frac{\zeta^4}{2} > 1$ .

# Graphes de stabilité de von Neumann

Le domaine de stabilité d'un schéma numérique est donné par l'ensemble  $\{z \in \mathbb{C}, |G(z)| \leq 1\}$



Runge-Kutta



Adams-Bashforth

**Question :** que se passe-t-il au niveau de la tangente à  $(Oy)$ ?

# Plan

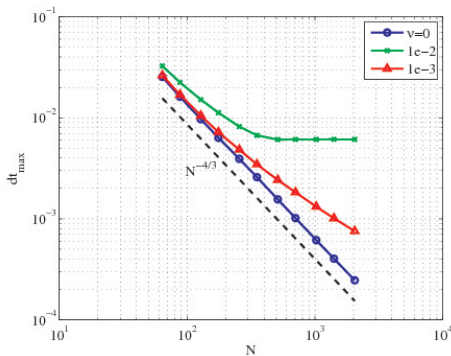
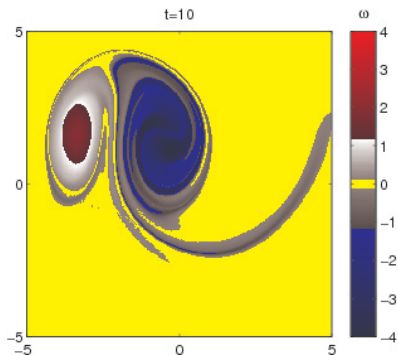
- 1 Introduction
  - Les équations hyperboliques
  - La condition CFL
  - Analyse de stabilité de von Neumann
- 2 Condition de stabilité  $\Delta t \leq Ch^\alpha$  avec  $\alpha > 1$ 
  - Stabilité sous  $\|u_{n+1}\| \leq (1 + C\Delta t) \|u_n\|$
  - Effets de la discrétisation spatiale
  - Extension à des domaines bornés
- 3 Dissipation numérique sous condition CFL
  - Effets de la discrétisation temporelle
  - Exemple avec Runge-Kutta 3
  - Expérience numérique avec Burgers

# Expérience numérique – justification

- équations 2D, en formulation vorticité-fonction de courant :

$$\partial_t \omega + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega - \nu \nabla^2 \omega = 0, \quad \nabla^2 \psi = \omega, \quad \mathbf{u} = \nabla^\perp \psi.$$

- Code spectral Fourier, AB2 pour  $\mathbf{u} \cdot \nabla \omega$ , exacte pour  $-\nu \nabla^2 \omega$ .



# Théorèmes de stabilité sous CFL non linéaires

## Théorème

Un schéma d'ordre  $2p$  est stable pour l'équation de transport, au pire sous une condition de type CFL :

$$\Delta t \leq C \Delta x^{\frac{2p+2}{2p+1}} \quad (9)$$

## Théorème

Si, près de zéro, le bord du domaine de stabilité  $\zeta \in \mathbb{C}$  prend un tangence à gauche de  $(Oy)$  :

$$\zeta = i(\theta + o(\theta)) + T_{2r}\theta^{2r} + o(\theta^{2r}), \quad \text{pour } \theta \rightarrow 0, \quad (10)$$

avec  $T_{2r} < 0$ , alors on a la condition nécessaire de stabilité :

$$\Delta t \leq \left( \frac{C}{-T_{2r}} \right)^{\frac{1}{2r-1}} \left( \frac{\Delta x}{a} \right)^{\frac{2r}{2r-1}}. \quad (11)$$

Calcul de stabilité pour  $z \in i\mathbb{R}$ ,  $z \rightarrow 0$ 

Facteur d'amplification pour les schémas de type Runge-Kutta

$$u_{n+1} = G(z)u_n$$

avec  $G(z) = 1 + \beta_1 z + \beta_2 z^2 + \dots + \beta_m z^m$ .Cas de l'équation de transport :  $\sigma(\xi) = i a \xi$ . Avec  $\xi = \frac{1}{\Delta x}$ ,

$$\rightarrow z = ia \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

$$|G(z)|^2 = 1 + S_1 a^2 \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 + S_2 a^4 \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^4 + \dots + S_m a^{2m} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^{2m}$$

$$(S_\ell = \beta_\ell^2 - 2\beta_{\ell-1}\beta_{\ell+1} + 2\beta_{\ell-2}\beta_{\ell+2} - \dots + (-1)^{\ell-1} 2\beta_1\beta_{2\ell-1} + (-1)^\ell 2\beta_{2\ell})$$

$$\text{si } S_1 = S_2 = \dots = S_{q-1} = 0,$$

$$|G(z)|^2 = 1 + S_q \left(a \frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^{2q} + o\left(\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^{2q}\right)$$

 $S_q < 0 \rightarrow$  schéma dissipatif,  $S_q > 0 \rightarrow$  schéma instable sous CFL.

## Condition fine de stabilité

Le facteur d'amplification

$$|G(z)|^2 = 1 + S_q a^{2q} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^{2q} + o\left(\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^{2q}\right)$$

avec  $S_q > 0$  satisfait la condition de stabilité de von Neumann  
 $|G(z)| \leq 1 + C\Delta t$  ssi

$$\Delta t \leq \left(\frac{2C}{S_q}\right)^{1/(2q-1)} \left(\frac{\Delta x}{a}\right)^{2q/(2q-1)}$$

D'où les exposants  $\alpha = 2, \frac{4}{3}, \frac{6}{5}, \dots$  pour  $q = 1, 2, 3, \dots$  dans

$$\Delta t \leq C' \Delta x^\alpha$$

## Exemples pris dans la littérature

- Runge-Kutta 2

$$\Delta t \leq 2 C^{1/3} \left( \frac{\Delta x}{a} \right)^{4/3}$$

- Adams-Bashforth 2

$$\Delta t \leq 2^{2/3} C^{1/3} \left( \frac{\Delta x}{a} \right)^{4/3}$$

- Runge-Kutta 5 [Crouzeix-Mignot 1992]

$$\Delta t \leq \left( \frac{11520}{7} \right)^{1/5} C^{1/5} \left( \frac{\Delta x}{a} \right)^{6/5}, \quad \left( \frac{11520}{7} \right)^{1/5} \sim 4.398$$

- Butcher's Lobatto 4 [Hairer-Wanner 1991]

$$\Delta t \leq 1152^{1/5} C^{1/5} \left( \frac{\Delta x}{a} \right)^{6/5}, \quad 1152^{1/5} \sim 4.095$$

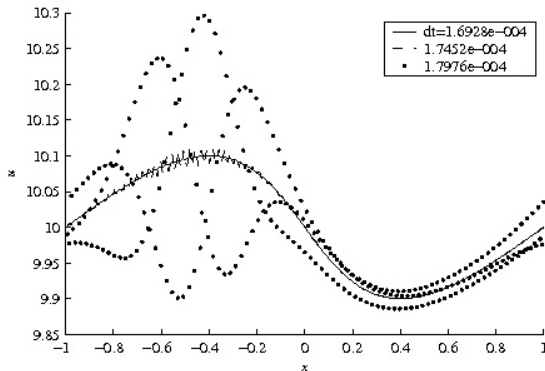
- Dormand-Prince 8 [Hairer-Wanner 1991]

$$\Delta t \leq 6.861876 C^{1/9} \left( \frac{\Delta x}{a} \right)^{10/9}$$

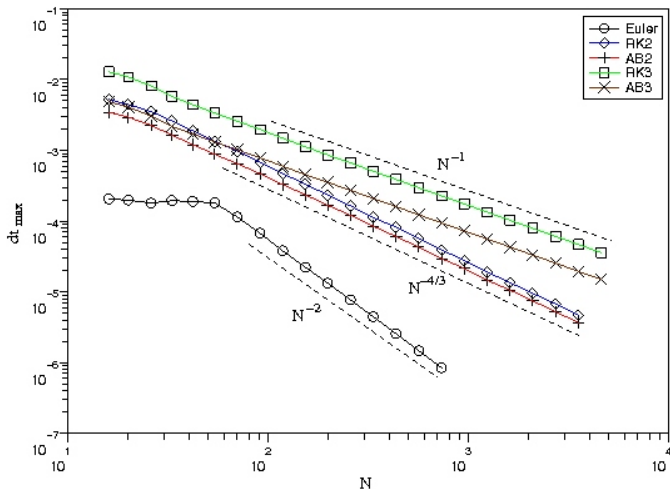


## Expérience numérique avec Burgers

- $\partial_t u + u \partial_x u = 0$  avec  $x \in \mathbb{T}(-1, 1)$ ,  $t \in [0, 10/\pi]$ ,  
 $u_0(x) = 10 - 0.1 \sin(\pi x)$ .
- Code Fourier Pseudo-spectral
- Critère de divergence :  $\|u_N(\cdot, t)\|_{TV} > K \|u_0(\cdot)\|_{TV}$ ,  $K = 4$ .

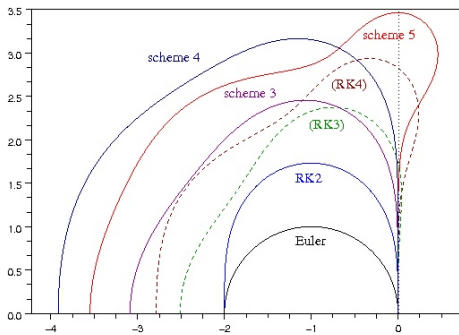
 $T = 1$

# Resultat pour des schémas classiques

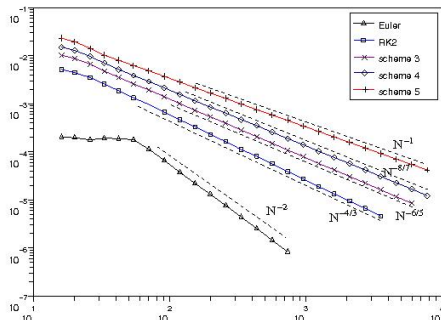


# Stabilité de schémas spéciaux

$$u_{n+1} = u_n + \alpha_1 \Delta t F(u_n + \alpha_2 \Delta t F(u_n + \alpha_3 \Delta t F(u_n + \dots)))$$



Domaine de stabilité



Pas de temps maximal

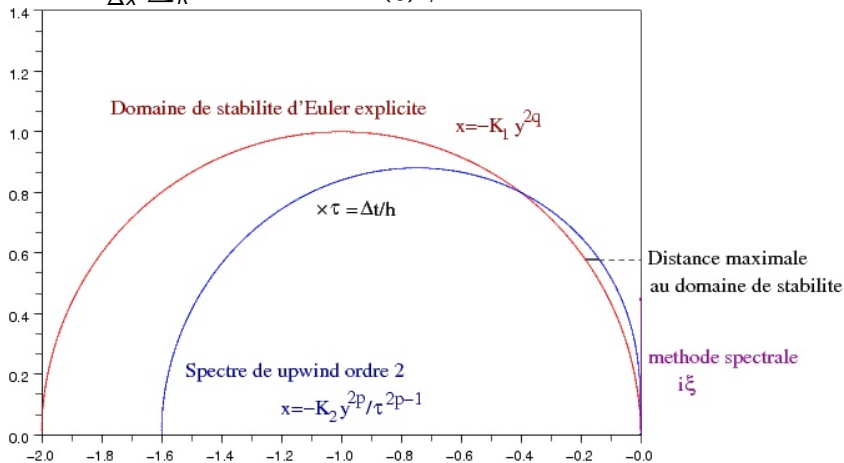
# Plan

- 1 Introduction
  - Les équations hyperboliques
  - La condition CFL
  - Analyse de stabilité de von Neumann
- 2 Condition de stabilité  $\Delta t \leq Ch^\alpha$  avec  $\alpha > 1$ 
  - Stabilité sous  $\|u_{n+1}\| \leq (1 + C\Delta t) \|u_n\|$
  - Effets de la discrétisation spatiale
  - Extension à des domaines bornés
- 3 Dissipation numérique sous condition CFL
  - Effets de la discrétisation temporelle
  - Exemple avec Runge-Kutta 3
  - Expérience numérique avec Burgers

# Discrétisation en espace

avec les différences finies :

$$\partial_x u \sim \frac{1}{\Delta x} \sum_k \alpha_k u^k \rightarrow \sigma(\xi) \notin i\mathbb{R}$$



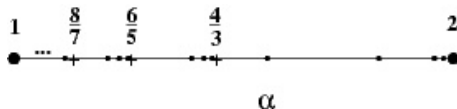
# Condition de stabilité avec les différences finies

Stabilité de von Neumann  $|G| \leq 1 + C\Delta t$  induite par

$$\Delta t \leq C\Delta x^\alpha \quad (12)$$

avec

- $\alpha = 1$  si  $p \leq q$  (stable sous condition CFL),
- $\alpha = \frac{q(2p-1)}{(2q-1)p} \in [1, 2]$  si  $p > q$ .



Remarque: pour  $p \rightarrow +\infty$  (schémas centrés, méthode spectrale, Galerkin) on retrouve le cas spectral:  $\alpha = \frac{2q}{2q-1}$ .

# Plan

- 1 Introduction
  - Les équations hyperboliques
  - La condition CFL
  - Analyse de stabilité de von Neumann
- 2 Condition de stabilité  $\Delta t \leq Ch^\alpha$  avec  $\alpha > 1$ 
  - Stabilité sous  $\|u_{n+1}\| \leq (1 + C\Delta t) \|u_n\|$
  - Effets de la discrétisation spatiale
  - Extension à des domaines bornés
- 3 Dissipation numérique sous condition CFL
  - Effets de la discrétisation temporelle
  - Exemple avec Runge-Kutta 3
  - Expérience numérique avec Burgers

# Équations hyperboliques sur des domaines bornés

**Hyp** : La discrétisation spatiale conserve la propriété d'antisymétrie

$$\langle u, F(v) \rangle = -\langle F(u), v \rangle \quad (13)$$

pour l'EDP  $\partial_t u = F(u)$  (cf [Verstappen et al. 2003]).

Exemple :

## Lemme

Soient  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in H^1(\Omega)^d$ ,  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^d$ , tels que  $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{v}$  et  $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{w} \in L^2(\Omega)$ . Si  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$  et  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$  sur  $\partial\Omega$ , alors

$$\langle \mathbf{v}, (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{w} \rangle_{L^2(\Omega)} = -\langle (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_{L^2(\Omega)}$$



# Hypothèses de régularité de la solution

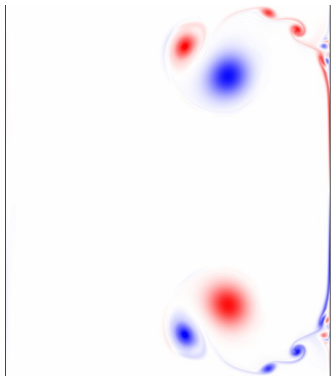
## Théorème

Soit  $u$  une solution des équations d'Euler incompressible, dérivable  $s$  fois, et telle que  $\|\nabla^s \mathbf{u}\|_{L^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^3)} < +\infty$ . Alors, la stabilité associée aux schémas tels que  $S_1 = \dots = S_{r-1} = 0$  et  $S_r > 0$ , sous condition de petite erreur initiale  $\|\varepsilon_0\|_{L^2} = o(\Delta x^{3/2})$ , s'écrit :

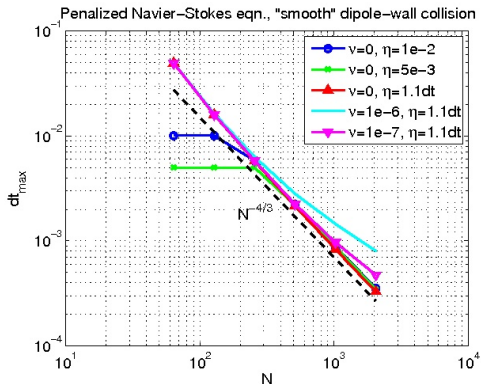
$$\Delta t \leq \left(\frac{2C}{S_r}\right)^{1/(2r-1)} \left(\frac{\Delta x}{\|\mathbf{u}\|_{L^\infty}}\right)^{\frac{2r}{2r-1}} \quad (14)$$

avec  $\Delta t$  le pas de temps,  $\Delta x$  le pas d'espace, et  $C$  une constante.

## Interaction dipôle/paroi



Dipôle/paroi



Stabilité

# Plan

- 1 Introduction
  - Les équations hyperboliques
  - La condition CFL
  - Analyse de stabilité de von Neumann
- 2 Condition de stabilité  $\Delta t \leq Ch^\alpha$  avec  $\alpha > 1$ 
  - Stabilité sous  $\|u_{n+1}\| \leq (1 + C\Delta t) \|u_n\|$
  - Effets de la discrétisation spatiale
  - Extension à des domaines bornés
- 3 Dissipation numérique sous condition CFL
  - Effets de la discrétisation temporelle
  - Exemple avec Runge-Kutta 3
  - Expérience numérique avec Burgers

## Dissipation par le schéma en temps

Dans le cas

$$|G(z)|^2 = 1 + S_q a^{2q} (\xi \Delta t)^{2q} + o\left((\xi \Delta t)^{2q}\right)$$

avec  $S_q < 0$ , il vient

$$|\widehat{u}(T, \xi)|^2 \approx e^{S_q \xi^{2q} a^{2q} \Delta t^{2q-1} T} |\widehat{u}_0(\xi)|^2.$$

Pour conserver toutes les échelles, i.e.

$$e^{S_q \xi^{2q} a^{2q} \Delta t^{2q-1} T} \geq K \gtrsim 1, \quad \forall \xi \in [0, \frac{1}{\Delta x}]$$

on a la condition suivante :

$$\Delta t \leq \left( \frac{\log K}{S_{2q} T} \right)^{\frac{1}{2q-1}} \left( \frac{\Delta x}{a} \right)^{\frac{2q}{2q-1}}. \quad (15)$$

i.e. la même condition que pour les schémas instables.

# Plan

- 1 Introduction
  - Les équations hyperboliques
  - La condition CFL
  - Analyse de stabilité de von Neumann
- 2 Condition de stabilité  $\Delta t \leq Ch^\alpha$  avec  $\alpha > 1$ 
  - Stabilité sous  $\|u_{n+1}\| \leq (1 + C\Delta t) \|u_n\|$
  - Effets de la discrétisation spatiale
  - Extension à des domaines bornés
- 3 Dissipation numérique sous condition CFL
  - Effets de la discrétisation temporelle
  - Exemple avec Runge-Kutta 3
  - Expérience numérique avec Burgers

## Exemple avec RK3

Pour RK3,  $G(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6}$ ,  $q = 2$  et  $S_2 = -\frac{1}{12} < 0$ ,  
 $\implies$  stable sous CFL.

Mais, pour conserver toutes les échelles, le schéma doit vérifier la condition (invisible)

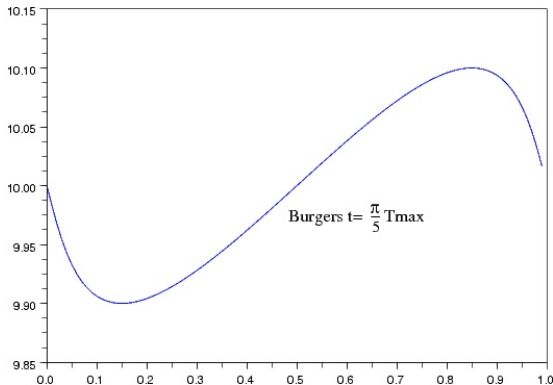
$$\Delta t \leq 12^{1/3} C^{1/3} \left( \frac{\Delta x}{a} \right)^{4/3}$$

avec la constante  $C = -\frac{2 \log K}{\tau}$ , i.e. une condition similaire à la condition de stabilité pour RK2.

# Plan

- 1 Introduction
  - Les équations hyperboliques
  - La condition CFL
  - Analyse de stabilité de von Neumann
- 2 Condition de stabilité  $\Delta t \leq Ch^\alpha$  avec  $\alpha > 1$ 
  - Stabilité sous  $\|u_{n+1}\| \leq (1 + C\Delta t) \|u_n\|$
  - Effets de la discrétisation spatiale
  - Extension à des domaines bornés
- 3 Dissipation numérique sous condition CFL
  - Effets de la discrétisation temporelle
  - Exemple avec Runge-Kutta 3
  - Expérience numérique avec Burgers

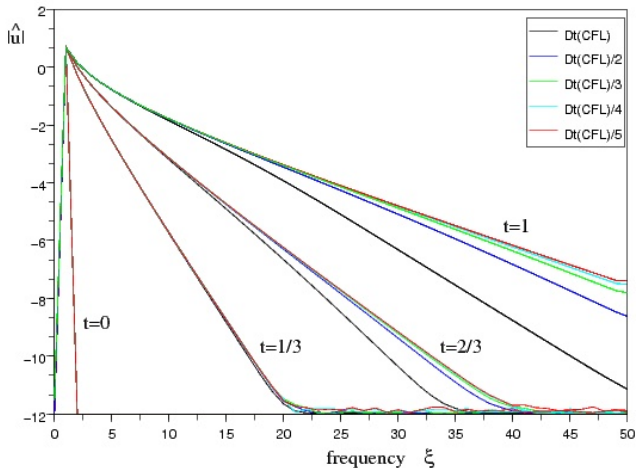
# Expérience numérique avec Burgers



Solution de Burgers au temps  $t = 1$  ( $T_{\max} = \frac{5}{\pi}$ ).



# Spectre d'énergie pour Burgers avec RK3



# Conclusion

- Condition de stabilité effective  $\Delta t \leq \Delta x^\alpha$  avec  $\alpha > 1$ ,
- L'analyse de stabilité de von Neumann donne un résultat complètement différent selon que l'on considère  $|G| \leq 1$  ou  $|G| \leq 1 + C\Delta t$ ,
- L'utilisation de la condition CFL peut fausser la cascade turbulente,
- Si la théorie de la stabilité est bien connue pour les EDO [Hairer-Nørsett-Wanner 1993], le cas des EDP + condition CFL est plus mystérieux (cf [Zang & Shu 2004] et [Burman, Ern, Fernández 2010] pour Galerkin Discontinu).