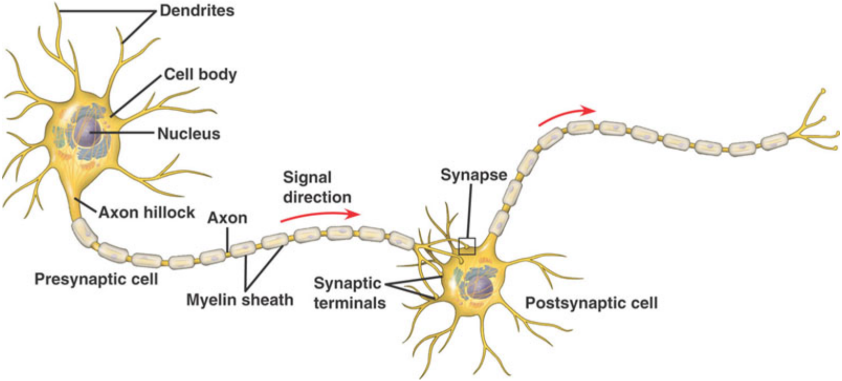
Oscillations multimodales dans le modèle de FitzHugh Nagumo

Damien LANDON, Nils Berglund

MAPMO, Université d'Orléans
Fédération Denis Poisson
ANR MANDy

26 mai 2011

Structure d'un neurone



- Transmission du signal nerveux par l'émission de potentiels d'action (spikes).
- De petites perturbations génèrent un potentiel d'action.

Modèle déterministe pour la génération de spikes

- Equations de Hodgkin-Huxley (1952)
  Système de quatre équations différentielles

Modèle déterministe pour la génération de spikes

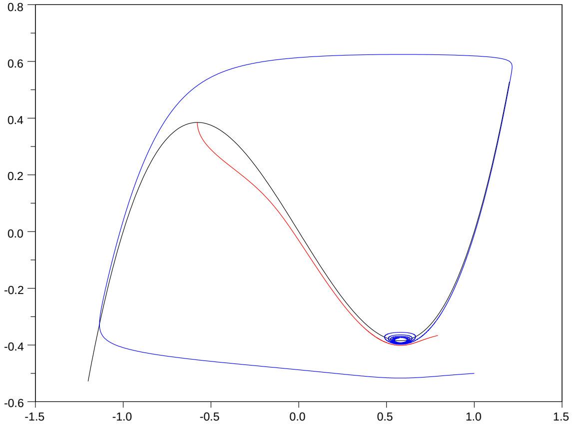
- Equations de Hodgkin-Huxley (1952)
  Système de quatre équations différentielles
- Equations de FitzHugh-Nagumo (1962)

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x} = x - x^3 + y \\ \dot{y} = a - x \end{cases}$$

Equation lent-rapide avec point de bifurcation de Hopf

Orbites dans le modèle de FitzHugh-Nagumo

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x} = x - x^3 + y \\ \dot{y} = a - x \end{cases}$$

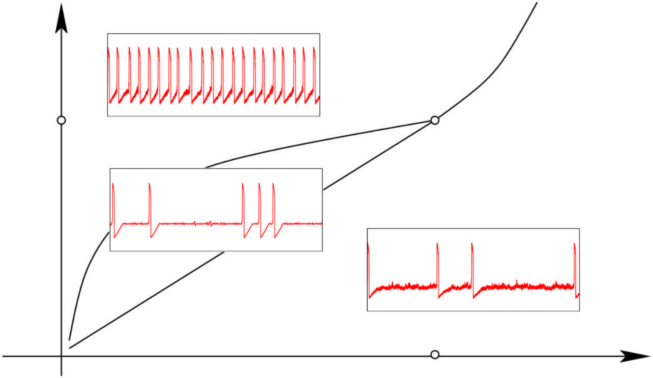


Equations stochatiques de FitzHugh-Nagumo

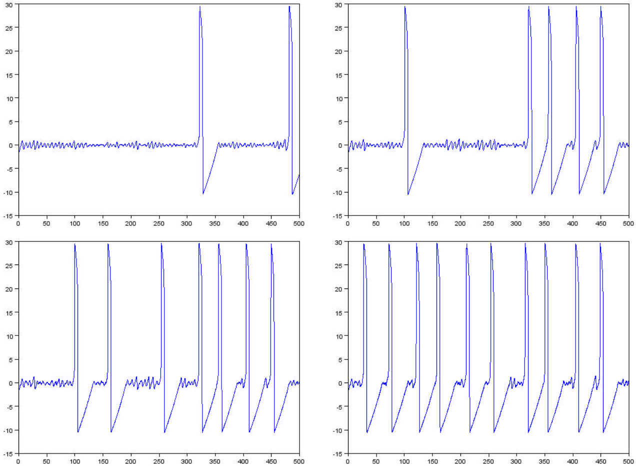
$$\begin{cases} dx_t = \dfrac{1}{\varepsilon}\left(x_t - x_t^3 + y_t\right) dt + \dfrac{\sigma_1}{\sqrt{\varepsilon}}\, dW_t^{(1)} \\ dy_t = (a - x_t)\, dt + \sigma_2\, dW_t^{(2)} \end{cases}$$

Equations stochatiques de FitzHugh-Nagumo

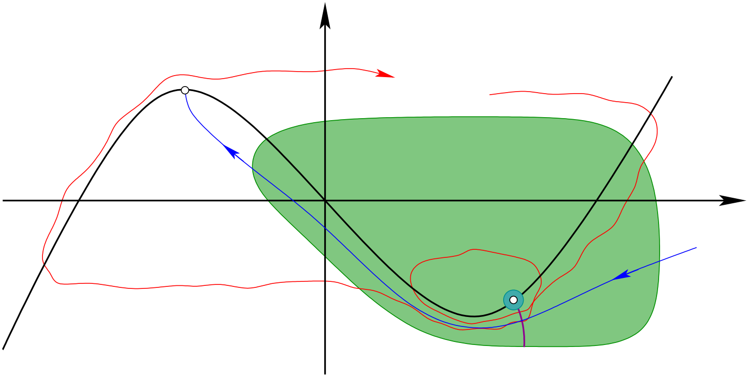
$$\begin{cases} dx_t = \dfrac{1}{\varepsilon}\left(x_t - x_t^3 + y_t\right) dt + \dfrac{\sigma_1}{\sqrt{\varepsilon}}\, dW_t^{(1)} \\ dy_t = (a - x_t)\, dt + \sigma_2\, dW_t^{(2)} \end{cases}$$



Exemples de solutions des équations de FitzHugh-Nagumo stochastiques



Définition du nombre de petites oscillations N



$(R_0, R_1, \ldots, R_{N-1})$ suite de variables aléatoires donnant le point d'intersection avec F.
$(R_n)_n$ est une chaine de Markov définie par la relation

$$K(x, F) = \mathbb{P}\{R_{n+1} \in F | R_n = x\}$$

Distribution des petites oscillations

Théorème

Supposons $\sigma_1, \sigma_2 > 0$.
Pour une distribution initiale μ_0 *de* R_0 *sur la courbe* F,

- *le noyau* K *admet une distribution quasi-stationnaire* π_0 ;
- *la valeur propre principale associée* $\lambda_0 = \lambda_0(\varepsilon, \delta, \sigma_1, \sigma_2)$ *est strictement plus petite que* 1 ;
- *la variable aléatoire* N *est presque sûrement finie ;*
- *la distribution de* N *est "asymptotiquement géometrique",*

$$\lim_{n\to\infty} P^{\mu_0}\{N = n+1 | N > n\} = 1 - \lambda_0$$

Estimation de λ_0 pour un bruit faible

Théorème

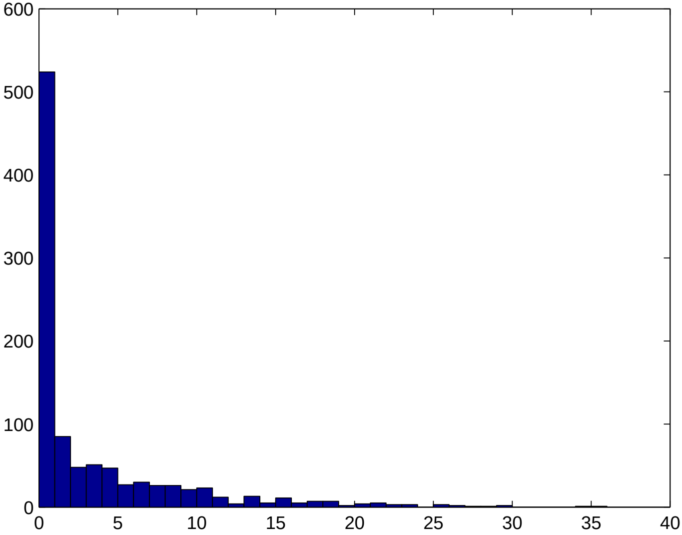
Supposons ε *et* $\dfrac{\delta}{\sqrt{\varepsilon}}$ *suffisament petit. Il exixte une constante* κ *telle que pour*

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 \leq (\varepsilon^{1/4}\delta)^2 / \log(\sqrt{\varepsilon}/\delta)$$

la principale valeur propre λ_0 *vérifie*

$$1 - \lambda_0 \leq \exp\left(-\kappa \frac{(\varepsilon^{1/4}\delta)^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right)$$

Histogramme de distribution de N



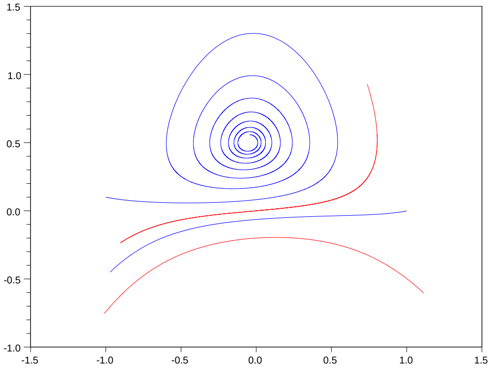
Changements de variables et de paramètres

$$\begin{cases} d\xi_t &= \left(\frac{1}{2} - z_t - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{3}\xi_t^3\right) dt + \tilde{\sigma}_1 dW_t^{(1)} \\ dz_t &= \left(\tilde{\mu} + 2\xi_t z_t + \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{3}\xi_t^4\right) dt - 2\tilde{\sigma}_1 \xi_t dW_t^{(1)} + \tilde{\sigma}_2 dW_t^{(2)} \end{cases}$$

où

$$\tilde{\sigma}_1 = -\sqrt{3}\varepsilon^{-3/4}\sigma_1$$
$$\tilde{\sigma}_2 = \sqrt{3}\varepsilon^{-3/4}\sigma_2$$
$$\tilde{\mu} = \mu - \tilde{\sigma}_1^2 = \frac{\tilde{\delta}}{\sqrt{\varepsilon}} - \tilde{\sigma}_1^2$$

Orbites de l'équation déterministe en coordonnées (ξ, z)



Conclusion

Trois régimes suivant les valeurs de $\varepsilon^{1/4}\delta/\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$:

- **Bruit faible** $\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2} << \varepsilon^{1/4}\delta$ où λ_0 est exponentiellement proche de 1 : beaucoup de petites oscillations entre deux spikes
- **Bruit fort** $\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2} >> \varepsilon^{3/4}$, alors λ_0 est exponentiellement petit : pas de petites oscillations entre deux spikes
- **Bruit intermédiaire** $\varepsilon^{1/4}\delta << \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2} << \varepsilon^{3/4}$ Le nombre de petites oscillations est d'ordre 1. On attend

$$1-\lambda_0 \approx \phi\left(-\pi^{1/4}\frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\sigma}}\right)$$