

# Guides d'ondes quantiques à coins

[Monique DAUGE](#)

en collaboration avec

[Nicolas RAYMOND](#) [Yvon LAFRANCHE](#) [Pierre CARCAUD](#)

IRMAR, Université de Rennes 1

Congrès SMAI

Guidel, 23-27 mai 2011

*Liens soulignés*

# Plan

- 1 Guides quantiques à coins, qu'est-ce que c'est?
- 2 Spectre du guide, généralités
- 3 Croissance des valeurs propres du guide
- 4 Existence des valeurs propres du guide
- 5 Grands angles
- 6 Petits angles
- 7 Approximation de Born-Oppenheimer
- 8 Asymptotique petits angles du guide
- 9 Conclusion

# Guides quantiques en mathématique

Ce sont en majorité des

- domaines  $\Omega$  tubulaires infinis dans  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ ,
- sans courbure à l'infini,
- sur lesquels on considère le problème spectral pour le Laplacien avec conditions de Dirichlet:

$$(1) \quad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

On cherche les paires  $(\lambda, u)$  avec

$\lambda$  valeur propre et  $u \in H_0^1(\Omega)$  fonction propre.

# Guides quantiques en physique mathématique

Dans les articles, on lit que:

- $\Omega$  est une structure filaire **mésoscopique** (échelle entre 10 et  $x \cdot 100$  nanomètres),
- On cherche s'il existe des **états liés** électroniques (effet indésirable).

Aspects de modélisation:

- Les **interactions** entre particules sont **négligeables** car le libre parcours moyen de l'électron est très supérieur aux tailles des structures.
- Les potentiels associés à ces structures forment des **barrières**.

Ainsi l'équation de Schrödinger se ramène à une  
équation de Helmholtz avec conditions de Dirichlet

# Guides quantiques en physique

A quoi ça ressemble?

On cherche “Quantum wave guide” dans Google

... et on ne trouve aucune image.

On cherche “Quantum wire” dans Google

... et on trouve des centaines d'images...

... dont certaines ne sont *pas très pertinentes* ...



# Fils quantiques en physique

... mais dont la majorité se rapporte au sujet

The collage illustrates various quantum structures and their properties. Key elements include:

- Structural Diagrams:** Cross-sections of nanowires and quantum dots, showing different confinement geometries (2D, 1D, 0D).
- SEM Images:** Scanning electron micrographs of fabricated devices, with labels for gate electrodes ( $G_1, G_2$ ), source-drain electrodes ( $S, D$ ), and specific dimensions (e.g., 2  $\mu\text{m}$ , 80 nm, 140 nm).
- Energy Level Diagrams:** Schematic representations of discrete energy levels in quantum dots (QD-1, QD-2) and nanowires.
- Conductance Plots:** Graphs showing differential conductance versus gate voltage, highlighting Coulomb diamonds and other quantum transport features.
- Material and Growth:** References to growth techniques like MBE (Molecular Beam Epitaxy) and materials like GaAs, Si, and InAs.
- Device Schematics:** Diagrams of quantum dot chains, double nanowire devices, and quantum dot arrays.

## Retour aux guides quantiques mathématiques

- Domaines  $\Omega$  **tubulaires sans courbure à l'infini**,
- Problème spectral pour  $-\Delta$  avec conditions de Dirichlet:

$$(1) \quad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

Comme  $\Omega$  contient des parties **isométriques à des demi-tubes droits**

$$(0, \infty)_x \times \omega_y \quad \text{avec } \omega \text{ borné dans } \mathbb{R}_y \text{ ou } \mathbb{R}_y^2$$

et comme  $\Delta = \Delta_x + \Delta_y$ , le problème (1) a du **spectre essentiel**<sup>1</sup>

$$\mathfrak{S}_{\text{ess}}(-\Delta) = (\gamma, \infty) \text{ avec } \gamma \text{ la 1ère vp de } -\Delta_y \text{ sur } H_0^1(\omega).$$

---

<sup>1</sup>**Spectre continu**  $\cup$  **VP multiplicité infinie**  $\cup$  **Pos accumulation des vp**

## Et maintenant les questions sont...

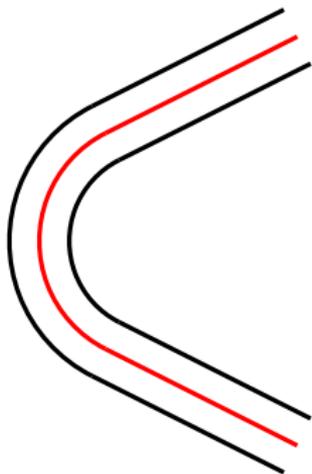
... principalement de deux types:

- Existe-t-il des **états liés** (c'est-à-dire des valeurs propres  $\lambda < \gamma$ , — **sous le spectre essentiel**)?
- Existe-t-il des configurations où le **nombre d'états liés est grand**?

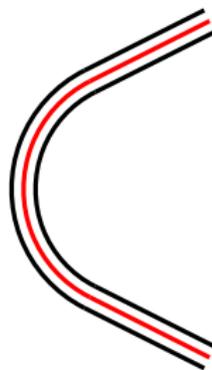
Réponses:

- Il existe des états liés dès que la fibre moyenne du tube présente une courbure non identiquement nulle.
- Oui, il existe des configurations où le nombre d'états liés est grand.

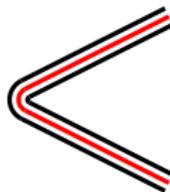
# Enfin des vrais dessins de guides (courbes)



**Figure:** Guide courbe

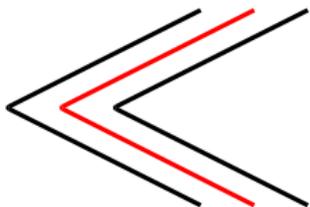


**Figure:** Guide plus mince

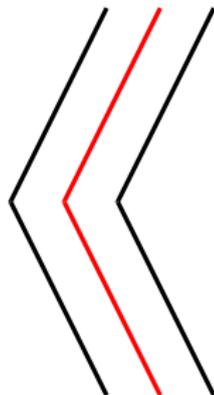


**Figure:** Guide plus courbe

# et de guides à coin



**Figure:** Guide droit



**Figure:** Guide plus ouvert



**Figure:** Guide plus fermé

## Et quelques références



Y. AVISHAI, D. BESSIS, B. G. GIRAUD, G. MANTICA.

Quantum bound states in open geometries.

*Phys. Rev. B* **44**(15) (Oct 1991) 8028–8034.



J. P. CARINI, J. T. LONDERGAN, K. MULLEN, D. P. MURDOCK.

Multiple bound states in sharply bent waveguides.

*Phys. Rev. B* **48**(7) (Aug 1993) 4503–4515.



P. DUCLOS, P. EXNER.

Curvature-induced bound states in quantum waveguides in two and three dimensions.

*Rev. Math. Phys.* **7**(1) (1995) 73–102.



B. CHENAUD, P. DUCLOS, P. FREITAS, D. KREJČIŘÍK.

Geometrically induced discrete spectrum in curved tubes.

*Differential Geom. Appl.* **23**(2) (2005) 95–105.

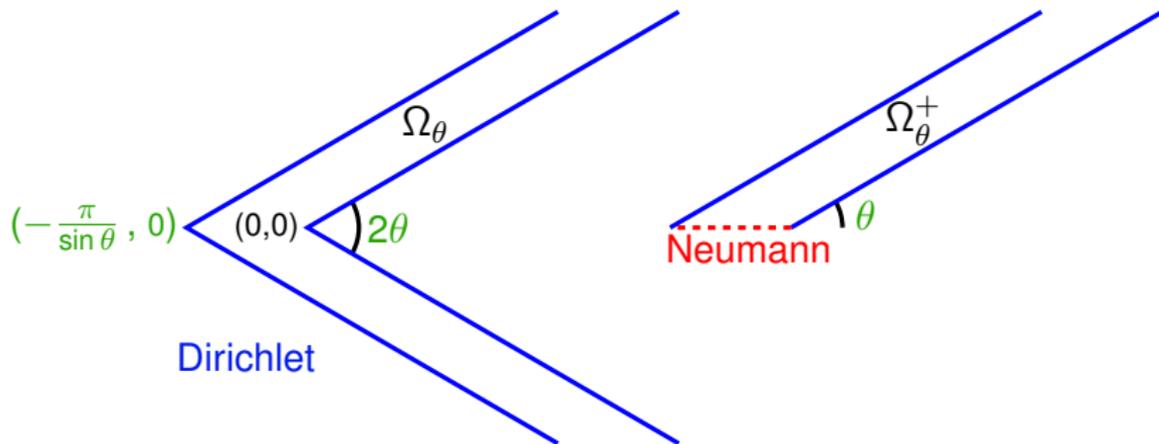
# Plan

- 1 Guides quantiques à coins, qu'est-ce que c'est?
- 2 Spectre du guide, généralités**
- 3 Croissance des valeurs propres du guide
- 4 Existence des valeurs propres du guide
- 5 Grands angles
- 6 Petits angles
- 7 Approximation de Born-Oppenheimer
- 8 Asymptotique petits angles du guide
- 9 Conclusion

# Le guide à coin $\Omega_\theta$ et le demi-guide $\Omega_\theta^+$

Pour  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}]$ , le domaine  $\Omega_\theta$  est limité par deux secteurs de même ouverture  $2\theta$ :

$$\Omega_\theta = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \tan \theta < |y| < \left( x + \frac{\pi}{\sin \theta} \right) \tan \theta \right\},$$



**Figure:** Le guide à coin  $\Omega_\theta$  et son compagnon  $\Omega_\theta^+$ .

# La symétrie

On peut considérer le problème de **Dirichlet-Neumann** sur le demi-guide car

$\Delta$  commute avec la symétrie  $S$

définie par

$$S(x, y) = S(x, -y)$$

- Ainsi  $\Delta$  et  $S$  sont deux opérateurs autoadjoints qui commutent
- Donc ils ont une base commune de vecteurs propres

Les vecteurs propres de  $\Delta$  dans  $\Omega_\theta$  sont donc **pairs (Neumann)** ou **impairs (Dirichlet)** par rapport au bord - - - - - .

Et les valeurs propres Dirichlet sont  $\geq \min \mathfrak{S}_{\text{ess}}$ . Donc...

## Rappel spectral: opérateur autoadjoint non borné

- $V$  un sous-espace de  $L^2(\Omega)$
- $b$  forme bilinéaire symétrique réelle (ou sesquilinéaire hermitienne complexe) continue et coercive:  $\exists c, C, C' > 0$

$$c\|u\|_V^2 - C\|u\|_\Omega^2 \leq b(u, u) \leq C'\|u\|_V^2.$$

- $A$  opérateur associé à  $b$

$$A : V \ni u \mapsto (v \mapsto b(u, v)) \in V'$$

- $A$  est auto-adjoint de domaine

$$D(A) = \{v \in V : Av \in L^2(\Omega)\}$$

et agit de  $D(A)$  dans  $L^2(\Omega)$ .

# Rappel spectral: quotients de Rayleigh

## Définition

- Spectre:  $\lambda \in \mathfrak{S}(A)$  ssi  $(A - \lambda\mathbb{I})$  n'est pas inversible,
- Sp. essentiel:  $\lambda \in \mathfrak{S}_{\text{ess}}(A)$  ssi  $(A - \lambda\mathbb{I})$  n'est pas Fredholm,
- Sp. discret:  $\mathfrak{S}_{\text{dis}}(A) := \mathfrak{S}(A) \setminus \mathfrak{S}_{\text{ess}}(A)$

Soit  $\lambda_j(A)$  le  $j$ -ème **quotient de Rayleigh** de  $A$ , via la forme  $b$

$$\lambda_1(A) = \inf_{u \in V} \frac{b(u, u)}{\|u\|_2^2} \quad \text{et en général} \quad \lambda_j(A) = \inf_{u_1, \dots, u_j \in V} \sup_{u \in [u_1, \dots, u_j]} \frac{b(u, u)}{\|u\|_2^2}$$

## Théorème

Les  $\lambda_j(A)$  forment une suite croissante. Soit  $\gamma = \min \mathfrak{S}_{\text{ess}}(A)$ .

- 1 Si  $\lambda_j(A) < \gamma$ , c'est une valeur propre de  $A$ ,
- 2 Si  $\lambda_j(A) \geq \gamma$ , alors  $\lambda_j(A) = \gamma$ ,
- 3 La  $j$ -ème vp de  $A$  sous  $\gamma$  coïncide avec  $\lambda_j(A)$ .

# Plan

- 1 Guides quantiques à coins, qu'est-ce que c'est?
- 2 Spectre du guide, généralités
- 3 Croissance des valeurs propres du guide**
- 4 Existence des valeurs propres du guide
- 5 Grands angles
- 6 Petits angles
- 7 Approximation de Born-Oppenheimer
- 8 Asymptotique petits angles du guide
- 9 Conclusion

# Spectre essentiel, existence, croissance

Soit  $\lambda_1(\theta)$  l'infimum des quotients de Rayleigh sur  $\Omega_\theta$

$$\lambda_1(\theta) = \inf_{u \in H_0^1(\Omega_\theta)} \frac{\|\nabla u\|_{\Omega_\theta}^2}{\|u\|_{\Omega_\theta}^2}$$

## Théorème

- 1 Le spectre essentiel est  $[1, +\infty)$
- 2 La fonction  $\theta \mapsto \lambda_1(\theta)$  est croissante.
- 3 Si  $\theta < \frac{\pi}{2}$ , alors  $\lambda_1 < 1$ , donc c'est une valeur propre.

# Changement de variables

On couche le demi-guide le long de l'axe des  $x$  et on le retourne sur lui-même:



**Figure:** Le demi-guide retourné  $\tilde{\Omega}_\theta^+$ .

C'est une transformation isométrique.

- 1 La hauteur du tube est  $\pi$ . Vecteur propre transverse  $y \mapsto \sin y$ :

$$\mathfrak{G}_{\text{ess}} = [1, +\infty)$$

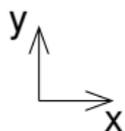
# Variation en $\theta$

- 2 Pour la croissance de  $\lambda_1$  en  $\theta$ , peut-on faire varier  $\tilde{\Omega}_\theta^+$ ?



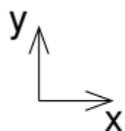
# Variation en $\theta$

- 2 Pour la croissance de  $\lambda_1$  en  $\theta$ , peut-on faire varier  $\tilde{\Omega}_\theta^+$ ?



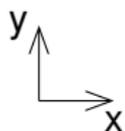
# Variation en $\theta$

- 2 Pour la croissance de  $\lambda_1$  en  $\theta$ , peut-on faire varier  $\tilde{\Omega}_\theta^+$ ?



# Variation en $\theta$

- 2 Pour la croissance de  $\lambda_1$  en  $\theta$ , peut-on faire varier  $\tilde{\Omega}_\theta^+$ ?



## Croissance de $\lambda_1$ en $\theta$

On ne peut pas varier le domaine car **le bord Neumann bouge**.  
 Mais le changement de variables

$$(x, y) \mapsto (\tilde{x}, \tilde{y}) = (\tan \theta x, y)$$

ramène au domaine fixe  $\tilde{\Omega}$  qui coïncide avec  $\tilde{\Omega}_{\pi/4}$ . L'opérateur  $-\Delta$  devient

$$-\tan^2 \theta \partial_{\tilde{x}}^2 - \partial_{\tilde{y}}^2$$

associé à la forme bilinéaire

$$b_\theta(u, v) = \int_{\tilde{\Omega}} \left( \tan^2 \theta \partial_{\tilde{x}} u \partial_{\tilde{x}} v + \partial_{\tilde{y}} u \partial_{\tilde{y}} v \right) d\tilde{x} d\tilde{y}$$

qui est croissante en  $\theta$ . C'est terminé car

$$\lambda_1(\theta) = \min_{u \in V(\tilde{\Omega})} \frac{b_\theta(u, u)}{\|u\|_{\tilde{\Omega}}^2} \quad \text{avec} \quad V = \{v \in H^1(\tilde{\Omega}), v = 0 \text{ sur } \partial_D \tilde{\Omega}\}$$

# Plan

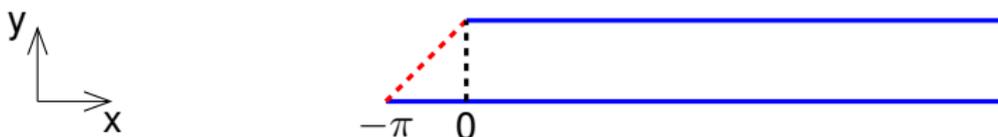
- 1 Guides quantiques à coins, qu'est-ce que c'est?
- 2 Spectre du guide, généralités
- 3 Croissance des valeurs propres du guide
- 4 Existence des valeurs propres du guide**
- 5 Grands angles
- 6 Petits angles
- 7 Approximation de Born-Oppenheimer
- 8 Asymptotique petits angles du guide
- 9 Conclusion

## Existence d'une valeur propre $< 1$ , étape 1

Soit 
$$b^0(u, v) = \int_{\tilde{\Omega}} \left( \tan^2 \theta \partial_x u \partial_x v + \partial_y u \partial_y v - uv \right) dx dy.$$

On veut montrer que pour  $\theta < \frac{\pi}{2}$ , il existe  $u \in V(\tilde{\Omega})$  tel que

$$b^0(u, u) < 0.$$



Soit  $\chi = \chi(\zeta)$  troncature: vaut 1 pour  $\zeta \leq 0$ , et zéro pour  $\zeta \geq 1$ . Soit

$$\psi_n(x, y) = \chi\left(\frac{x}{n}\right) \sin y, \quad n \geq 1.$$

Alors  $b^0(\psi_n)$  tends vers zéro quand  $n \rightarrow \infty$  avec l'estimation:

$$b^0(\psi_n, \psi_n) \leq \left(\frac{1}{2n}\right) \pi \tan^2 \theta \left( \int_0^1 |\chi'(\zeta)|^2 d\zeta \right).$$

## Existence d'une valeur propre $< 1$ , étape 2

Soit  $\eta \not\equiv 0$  une troncature à support dans  $(-\pi, 0)$ . On pose

$$g(x, y) = \eta(x)\eta(y - \pi) \cos y.$$

Alors  $b^0(g, \psi_n)$  est uniformément non nul: pour un  $\Gamma > 0$

$$b^0(g, \psi_n) = \Gamma > 0 \quad \forall n \geq 1.$$

On pose alors  $u = \psi_n - \varepsilon g$  et

$$\begin{aligned} b^0(u, u) &= b^0(\psi_n, \psi_n) - \varepsilon b^0(g, \psi_n) + \varepsilon^2 b^0(g, g) \\ &= b^0(\psi_n, \psi_n) - \varepsilon \Gamma + \varepsilon^2 b^0(g, g) \end{aligned}$$

On choisit

- $\varepsilon > 0$  tel que  $-\varepsilon \Gamma + \varepsilon^2 b^0(g, g) = -M$  avec  $M > 0$ ,
- $n$  assez grand pour que  $b^0(\psi_n, \psi_n) < M/2$ .

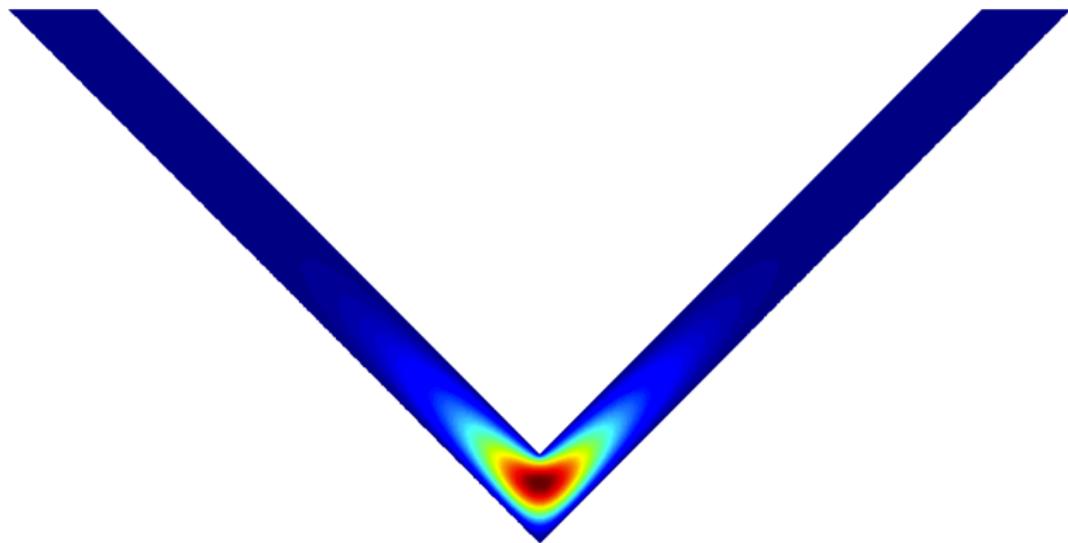
Et on conclut  $b^0(u, u) \leq -M/2$ .

# Plan

- 1 Guides quantiques à coins, qu'est-ce que c'est?
- 2 Spectre du guide, généralités
- 3 Croissance des valeurs propres du guide
- 4 Existence des valeurs propres du guide
- 5 Grands angles**
- 6 Petits angles
- 7 Approximation de Born-Oppenheimer
- 8 Asymptotique petits angles du guide
- 9 Conclusion

## On calcule (Bibliothèque FEM Mélina)

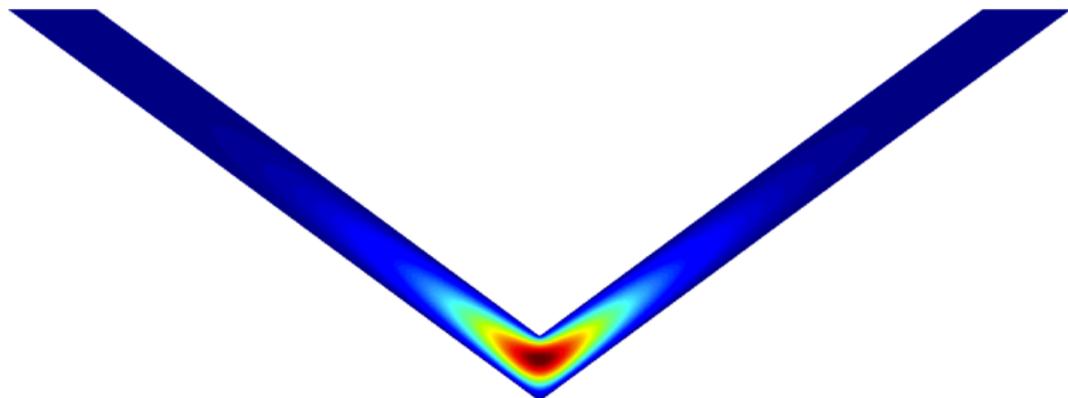
Représentation avec l'angle vrai.



$$\theta = 0.5000 * \pi/2 \quad \lambda = 0.92934$$

# On calcule (Bibliothèque FEM Mélina)

Représentation avec l'angle vrai.

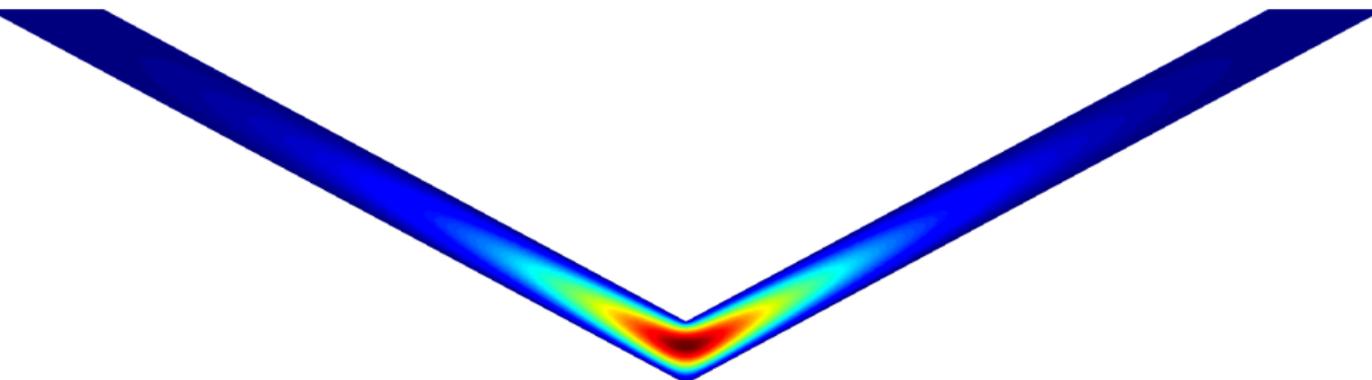


$$\theta = 0.5983 * \pi/2$$

$$\lambda = 0.96897$$

# On calcule (Bibliothèque FEM Mélina)

Représentation avec l'angle vrai.



$$\theta = 0.6889 * \pi/2 \quad \lambda = 0.98844$$

## Domaine de calcul

Les calculs sont faits dans  $\Omega_{\pi/4}^+$  pour l'opérateur

$$\mathcal{L}_\theta := -2 \sin^2 \theta \partial_x^2 - 2 \cos^2 \theta \partial_y^2$$

qui est équivalent à  $-\Delta$  sur  $\Omega_\theta^+$  par changement de variables

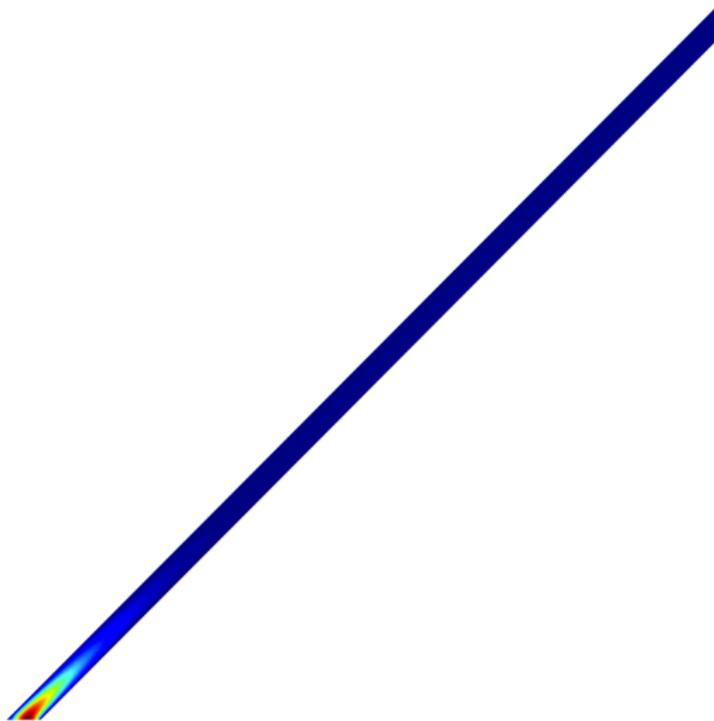
$$x_{\text{new}} = x_{\text{old}} \sqrt{2} \sin \theta \quad \text{et} \quad y_{\text{new}} = y_{\text{old}} \sqrt{2} \cos \theta.$$

Quand  $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ , alors  $\lambda_1 \rightarrow 1$  et

- Le mode **s'étale** dans les parties droites. On doit étendre le domaine de calcul.
- On approche du spectre essentiel, ce qui provoque une **accumulation** de valeurs propres discrètes.

Les modes suivants sont représentés dans leurs domaine de calculs (domaine physique non représentable car trop effilé).

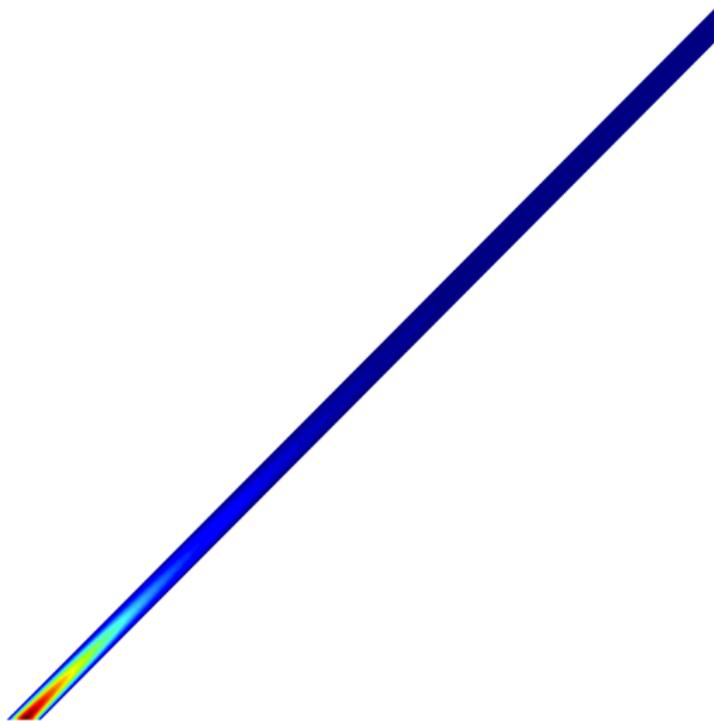
# Représentation dans le domaine de calcul



$$\theta = 0.7022 * \pi/2$$

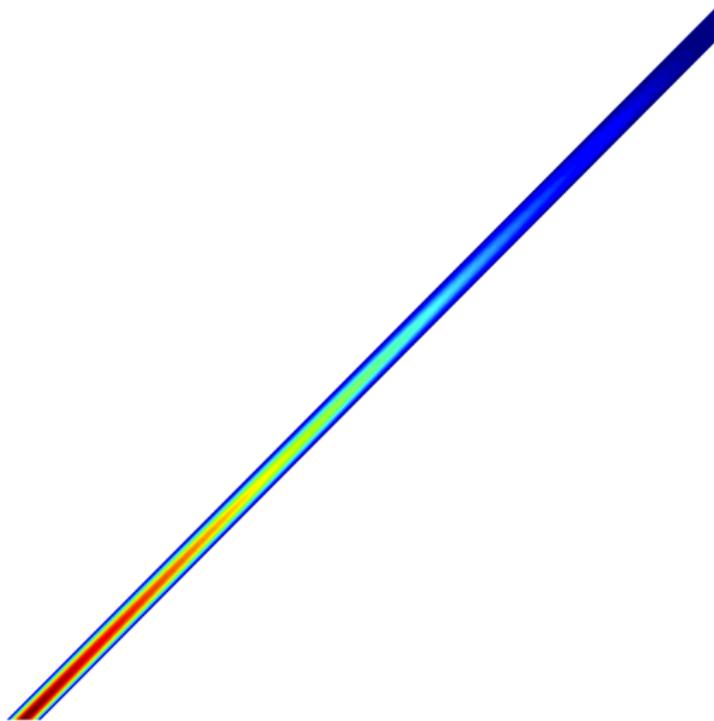
$$\lambda = 0.9903037$$

# Représentation dans le domaine de calcul



$$\theta = 0.8538 * \pi/2 \quad \lambda = 0.9994215$$

# Représentation dans le domaine de calcul



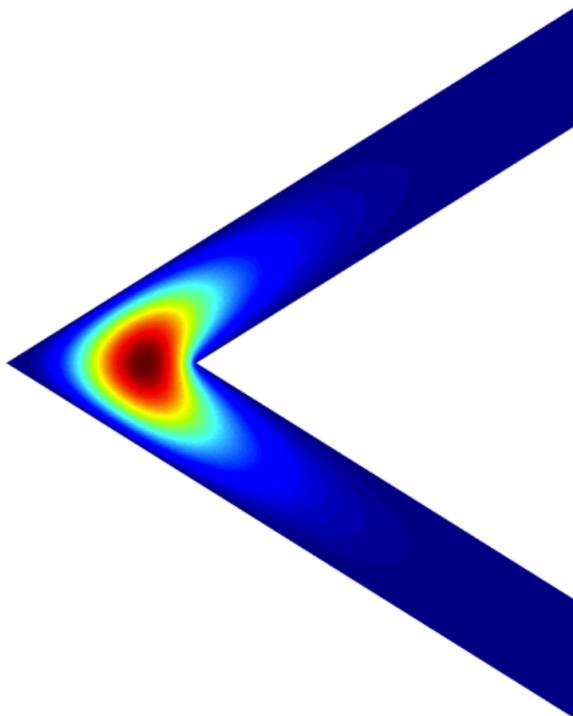
$$\theta = 0.9702 * \pi/2 \quad \lambda = 0.9999998$$

# Plan

- 1 Guides quantiques à coins, qu'est-ce que c'est?
- 2 Spectre du guide, généralités
- 3 Croissance des valeurs propres du guide
- 4 Existence des valeurs propres du guide
- 5 Grands angles
- 6 Petits angles**
- 7 Approximation de Born-Oppenheimer
- 8 Asymptotique petits angles du guide
- 9 Conclusion

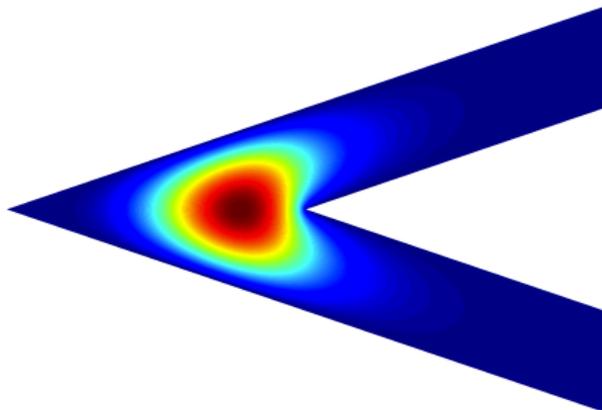
# Représentation avec l'angle vrai

$$\theta = 0.3430 * \pi/2 \quad \lambda = 0.81208$$



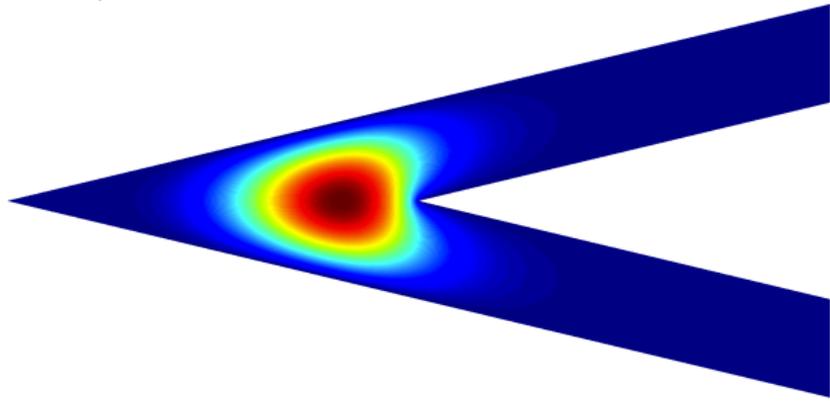
# Représentation avec l'angle vrai

$$\theta = 0.2071 * \pi/2 \quad \lambda = 0.65008$$



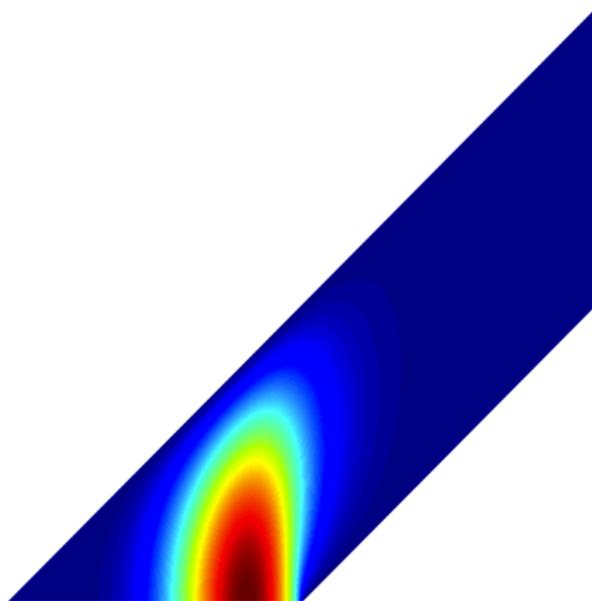
# Représentation avec l'angle vrai

$\theta = 0.1482 * \pi/2$        $\lambda = 0.56209$



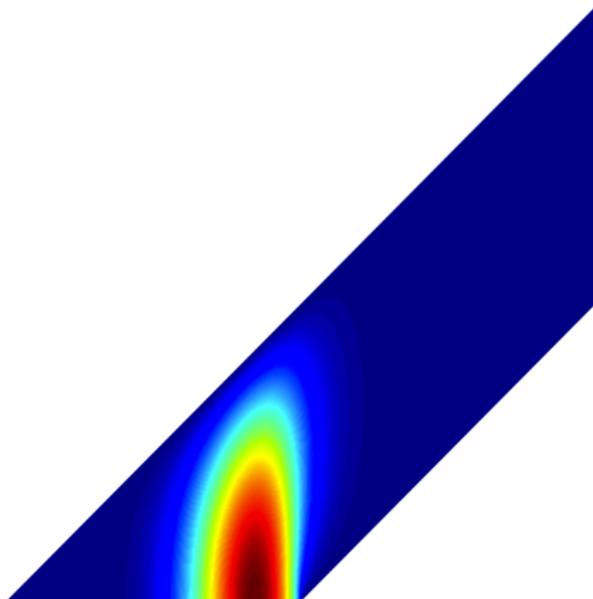
# Représentation dans le domaine de calcul

$$\theta = 0.1482 * \pi/2 \quad \lambda = 0.56209$$



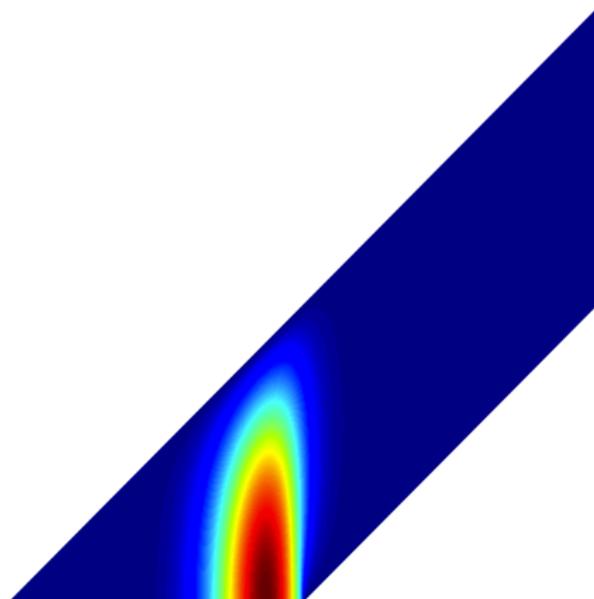
# Représentation dans le domaine de calcul

$$\theta = 0.1032 * \pi/2 \quad \lambda = 0.48754$$



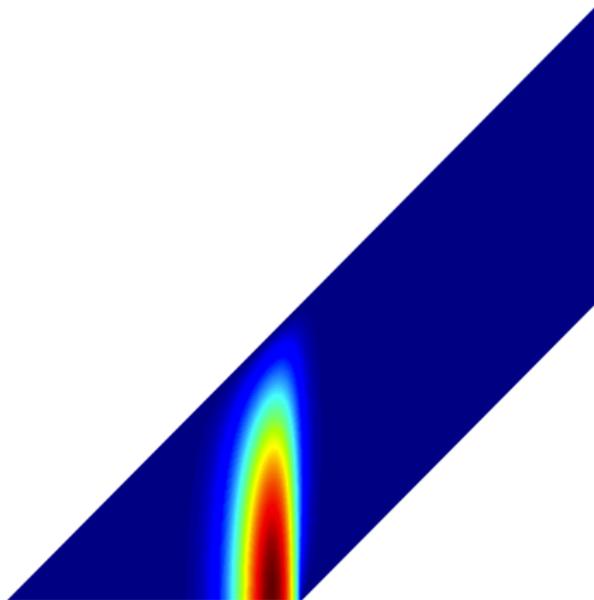
# Représentation dans le domaine de calcul

$$\theta = 0.0701 * \pi/2 \quad \lambda = 0.42763$$



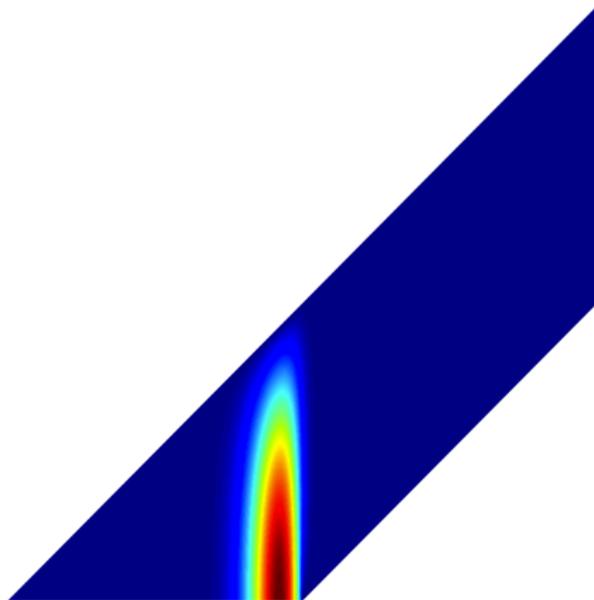
# Représentation dans le domaine de calcul

$$\theta = 0.0416 * \pi/2 \quad \lambda = 0.37085$$



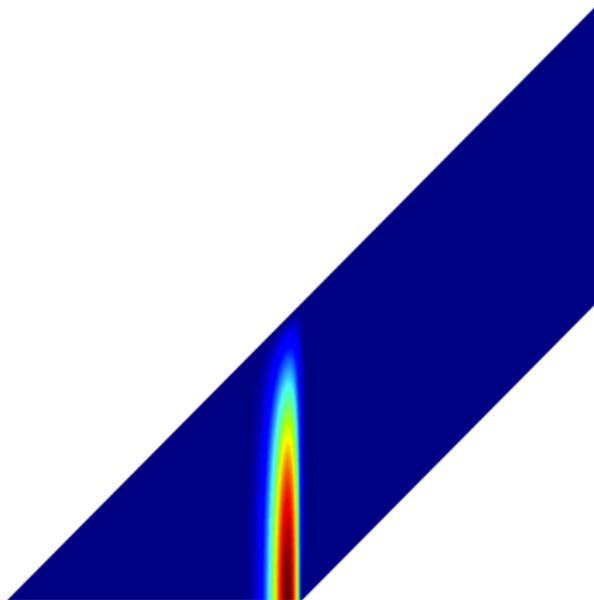
# Représentation dans le domaine de calcul

$$\theta = 0.0270 * \pi/2 \quad \lambda = 0.338448$$



# Représentation dans le domaine de calcul

$$\theta = 0.0112 * \pi/2 \quad \lambda = 0.29766$$



# Plan

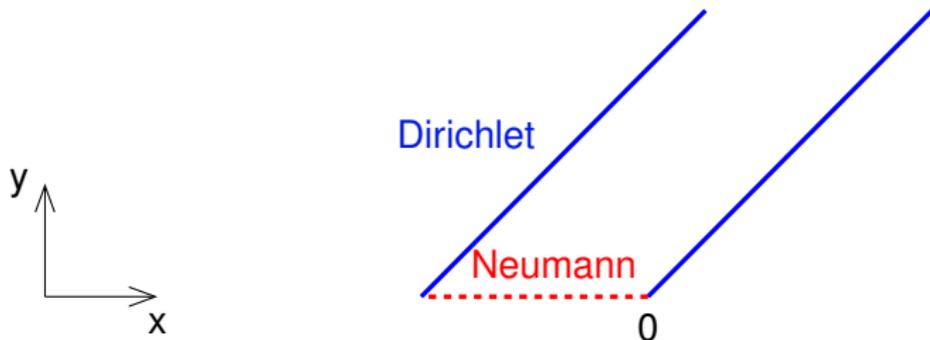
- 1 Guides quantiques à coins, qu'est-ce que c'est?
- 2 Spectre du guide, généralités
- 3 Croissance des valeurs propres du guide
- 4 Existence des valeurs propres du guide
- 5 Grands angles
- 6 Petits angles
- 7 Approximation de Born-Oppenheimer**
- 8 Asymptotique petits angles du guide
- 9 Conclusion

On doit étudier pour  $\theta$  petit:

$$\mathcal{L}_h := -2h^2 \partial_x^2 - 2\partial_y^2 \quad \text{dans} \quad \Omega_{\pi/4}^+ \quad \text{avec} \quad h = \tan \theta.$$

L'approximation de Born-Oppenheimer consiste à éliminer la variable lente  $y$  en remplaçant  $-2\partial_y^2$  par sa plus petite valeur propre  $\Lambda(x)$  dans la section au-dessus de  $x$ :

$$\mathcal{H}_h = -2h^2 \partial_x^2 + \Lambda(x)$$

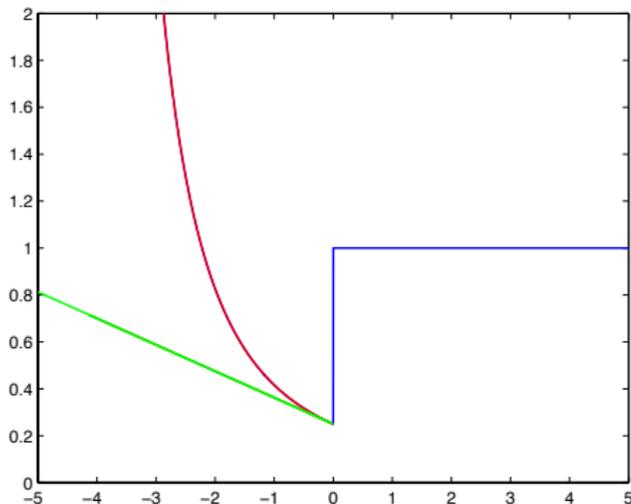


$$\Lambda(x) = \frac{\pi^2}{2(x+\pi\sqrt{2})^2} \quad \Lambda(x) = 1$$

$$\Lambda(0) + x\Lambda'(0) = \frac{1}{4} - \frac{x}{2\pi\sqrt{2}} \quad \Lambda(x) = 1$$

# Puits de potentiel

Le potentiel  $\Lambda$  a un puits "triangulaire" en  $x = 0$



On cherche le comportement quand  $h \rightarrow 0$  des valeurs propres de

$$\mathcal{H}_h = -2h^2 \partial_x^2 + \Lambda(x)$$

# Puits de potentiel

Quand  $h \rightarrow 0$ ,  $\Lambda$  fait **barrière en  $x = 0$** . Le comportement de  $\mathcal{H}_h$  est “au premier ordre” équivalent à celui du problème de Dirichlet pour

$$-2h^2 \partial_x^2 + \frac{1}{4} - \frac{x}{2\pi\sqrt{2}} \quad (x \in \mathbb{R}_-)$$

qui peut se ramener à l'opérateur modèle du même type

$$\mathcal{A}_h = -h^2 \partial_x^2 - x.$$

Le changement de variables  $X = xh^{-2/3}$  transforme l'équation

$$\mathcal{A}_h \psi(x) = E_h \psi(x) \quad \text{en} \quad -h^{2/3} (\partial_X^2 + X) \Psi(X) = E_h \Psi(X),$$

où l'on voit apparaître **l'opérateur d'Airy retourné**.

# Fonction d'Airy

L'équation d'Airy est  $\Psi'' - X\Psi = 0$  et la fonction d'Airy  $Ai$  est sa solution bornée sur  $\mathbb{R}$ . On note  $A$  la fonction d'Airy retournée

$$A(X) = Ai(-X).$$

- $A$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}_-$
- $A$  exponentiellement décroissant quand  $X \rightarrow -\infty$
- La suite croissante  $z_A(n)$  de ses zéros tend vers l'infini.

On a  $-A'' - XA = 0$  donc pour tout  $E \in \mathbb{R}$

$$-A'' - (X-E)A = EA \quad \text{i.e.} \quad -A''(X+E) - XA(X+E) = EA(X+E)$$

Si  $E = z_A(n)$ , alors  $A(X + E)$  s'annule en  $X = 0$ , donc

$$\left( z_A(n), A(X + z_A(n)) \right) \quad \text{est une paire propre}$$

Et réciproquement.

# États fondamentaux

Opérateur	Valeurs propres	Échelle $\mathbb{R}_-$	Échelle $\mathbb{R}_+$
Airy retourné	$z_A(n)$	X	-
$-h^2 \partial_x^2 - x \mid \mathbb{R}_-$	$h^{2/3} z_A(n)$	$xh^{-2/3}$	-
$\mathcal{H}_h^{\text{toy}}$	$h^{2/3} z_A(n) + \sum_{j \geq 3} h^{j/3} E_{n,j}$	$xh^{-2/3}$	$xh^{-1}$
$-h^2 \partial_x^2 - \Lambda$	$\frac{1}{4} + \frac{2h^{2/3} z_A(n)}{(4\pi\sqrt{2})^{2/3}} + \sum_{j \geq 3} h^{j/3} \mu_{n,j}$	$xh^{-2/3}$	$xh^{-1}$

Ici  $\mathcal{H}_h^{\text{toy}}$  est l'opérateur  $-h^2 \partial_x^2 - x$  sur  $\mathbb{R}_-$  et  $-h^2 \partial_x^2 + 1$  sur  $\mathbb{R}_+$ .

# Plan

- 1 Guides quantiques à coins, qu'est-ce que c'est?
- 2 Spectre du guide, généralités
- 3 Croissance des valeurs propres du guide
- 4 Existence des valeurs propres du guide
- 5 Grands angles
- 6 Petits angles
- 7 Approximation de Born-Oppenheimer
- 8 Asymptotique petits angles du guide**
- 9 Conclusion

# États fondamentaux du guide

Rappel:

$$\mathcal{L}_\theta = -2 \sin^2 \theta \partial_x^2 - 2 \cos^2 \theta \partial_y^2$$

Opérateur	Valeurs propres	Échelles $\mathbb{R}_-$	Échelle $\mathbb{R}_+$
$\mathcal{L}_\theta$ sur $\Omega_{\pi/4}$	$\frac{1}{4} + \sum_{j \geq 2} \theta^{j/3} \lambda_{n,j}$	$xh^{-2/3}$ et $xh^{-1}$	$xh^{-1}$
$-\Delta$ sur $\Omega_\theta$	$\frac{1}{4} + \sum_{j \geq 2} \theta^{j/3} \lambda_{n,j}$	$x\theta^{1/3}$ et $x$	$x$

où

$$\lambda_{n,2} = \frac{2 z_A(n)}{(4\pi\sqrt{2})^{2/3}}$$

# Élément de preuve

## 1 Construction de quasi-modes:

a) Paires  $(\lambda^\#, u^\#)$  qui vérifient l'équation modulo  $\varepsilon^\# > 0$

$$u^\# \in D(A) \quad \text{et} \quad \|(A - \lambda^\#)u^\#\| \leq \varepsilon^\# \|u^\#\|$$

b) Implique l'existence de spectre dans un  $\varepsilon^\#$ -voisinage de  $\lambda^\#$

$$\mathcal{S}(A) \cap \mathcal{B}(\lambda^\#, \varepsilon^\#) \neq \emptyset$$

## 2 Il n'y a pas plus de $\lambda$ que de $\lambda^\#$ dans le bas du spectre, i.e.si

$$|\lambda - \frac{1}{4}| \leq C\theta^{2/3}$$

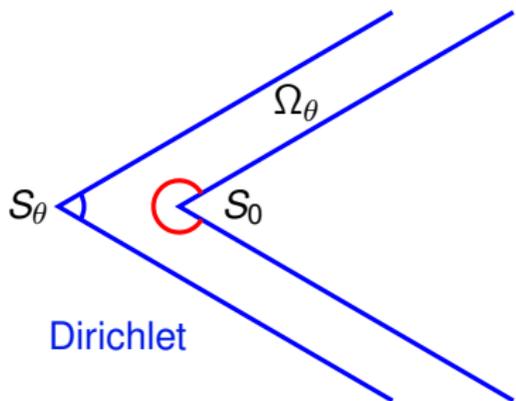
Montrer que les vrais  $u$  ressemblent suffisamment aux  $u^\#$ .

a) Estimations d'Agmon (décroissance exponentielle)

b) **Projection sur le vecteur propre transverse**  $y \mapsto \cos \frac{y}{2}$  à gauche

c) Comparaison avec l'approximation de Born-Oppenheimer.

# Où se cachent les singularités?



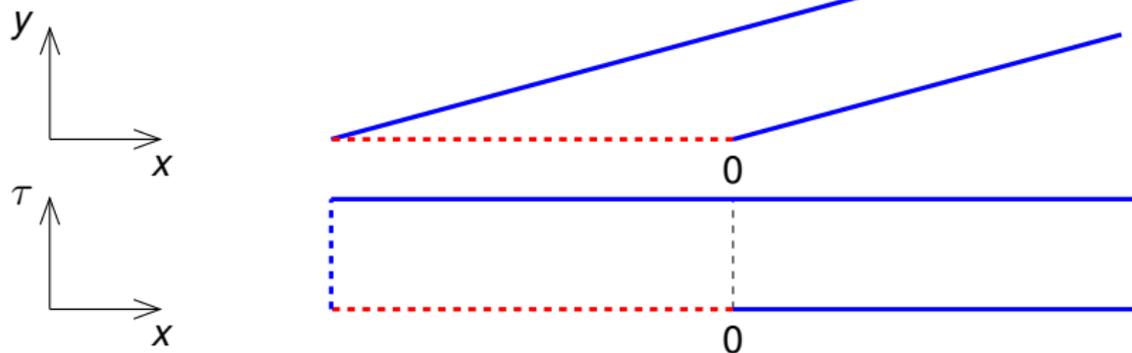
**Figure:** Le guide à coin  $\Omega_\theta$  et ses deux coins.

Avec  $\omega = \pi - \theta$ , on attend des singularités en

$$r^{\pi/2\omega} \sin \frac{\phi\pi}{2\omega} \text{ en } S_0 \quad \text{et} \quad r_*^{\pi/2\theta} \sin \frac{\phi_*\pi}{2\theta} \text{ en } S_\theta$$

# Développement du vecteur propre # $n$

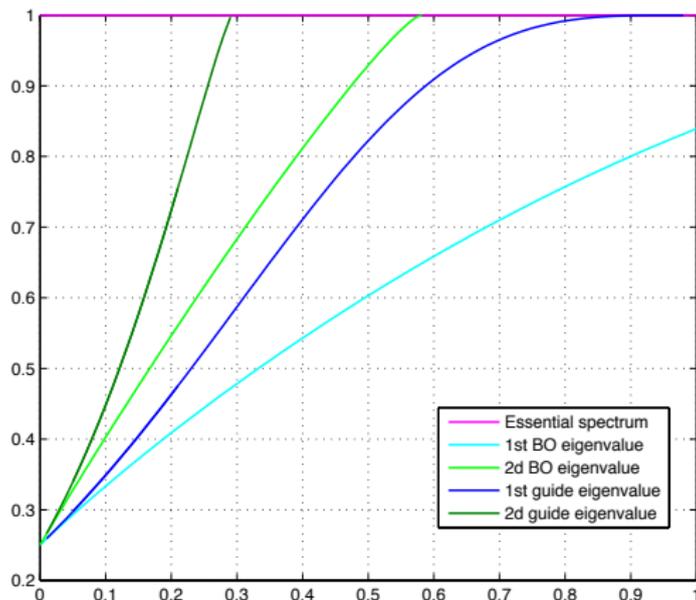
Changement de variables "physique"  $(x, y) \mapsto (x, \tau)$



$$\sum_{j \geq 0} \left( \Psi_{n,j}(x\theta^{1/3}, \tau) + \Phi_{n,j}^-(x, \tau) \right) \theta^{j/3} \quad \sum_{j \geq 1} \Phi_{n,j}^+(x, \tau) \theta^{j/3}$$

- La fn d'Airy  $A(X + z_A(n))$  est présente ds le profil  $\Psi_{n,0}(X, t)$ .
- $\Phi_{n,0} = 0 \dots$
- ... et la **singularité** est présente ds le terme  $\Phi_{n,1}(x, \tau) \theta^{1/3}$ .

# Variation des 2 premières valeurs propres



fonction de  $\vartheta^{2/3} = [0.01 : 0.01 : 0.98]$  où  $\vartheta = \frac{2\theta}{\pi} \in (0.001, 0.9702)$

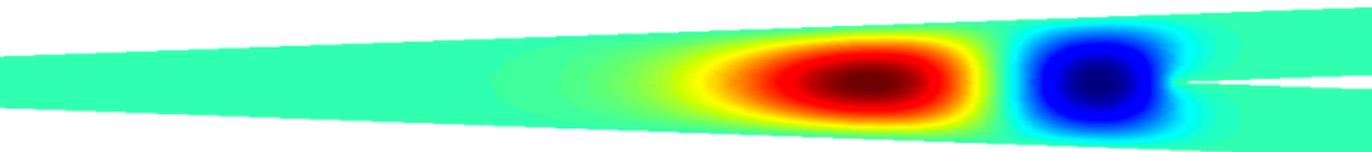
# Portrait vecteurs propres $\theta = 0.0226 * \pi/2 \sim 2^\circ$

# 1



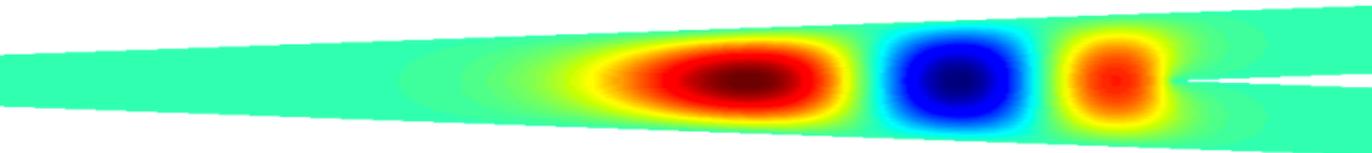
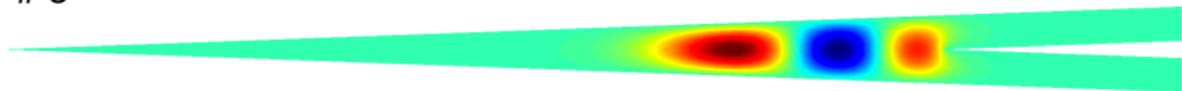
# Portrait vecteurs propres $\theta = 0.0226 * \pi/2 \sim 2^\circ$

# 2



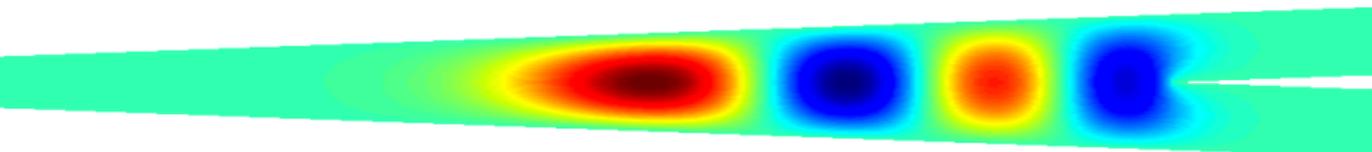
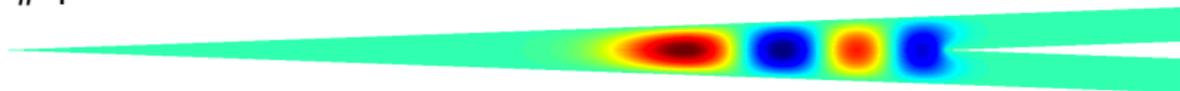
# Portrait vecteurs propres $\theta = 0.0226 * \pi/2 \sim 2^\circ$

# 3



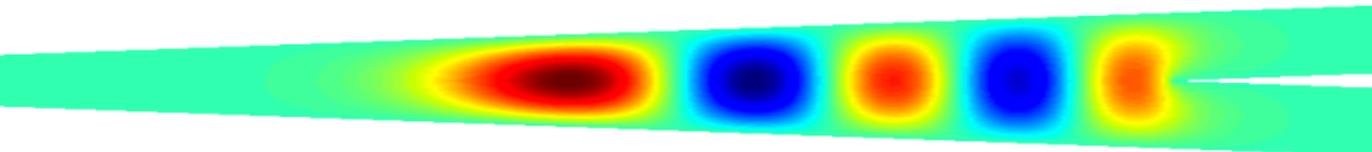
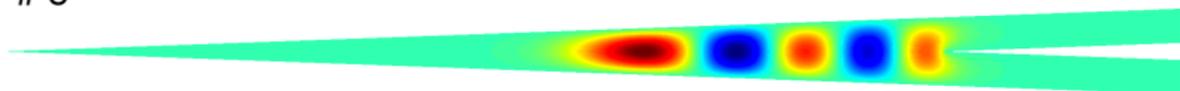
# Portrait vecteurs propres $\theta = 0.0226 * \pi/2 \sim 2^\circ$

# 4



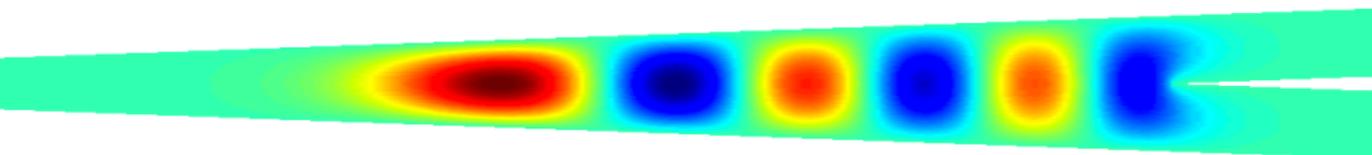
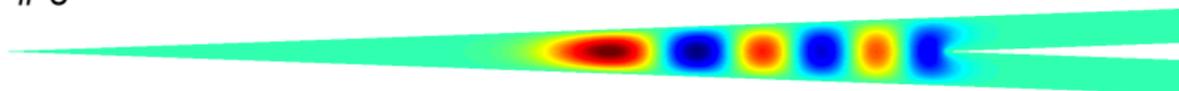
# Portrait vecteurs propres $\theta = 0.0226 * \pi/2 \sim 2^\circ$

# 5



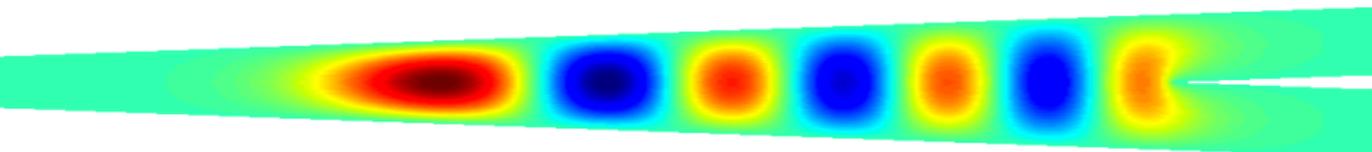
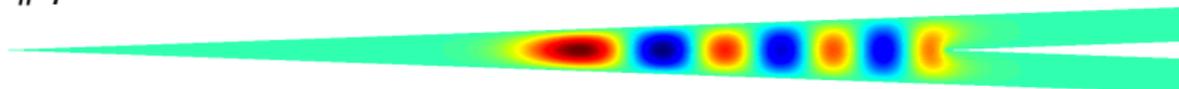
# Portrait vecteurs propres $\theta = 0.0226 * \pi/2 \sim 2^\circ$

# 6



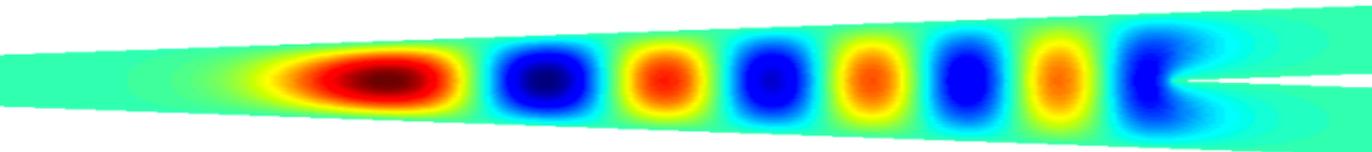
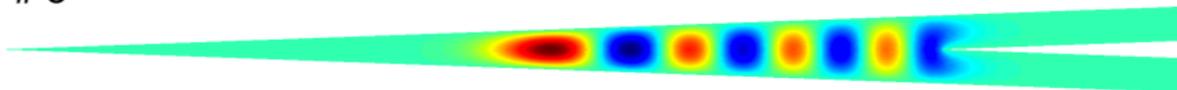
# Portrait vecteurs propres $\theta = 0.0226 * \pi/2 \sim 2^\circ$

# 7



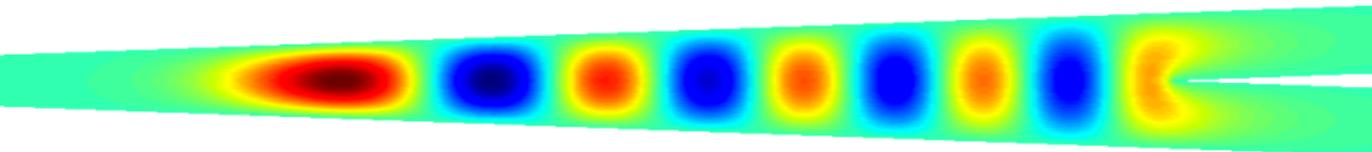
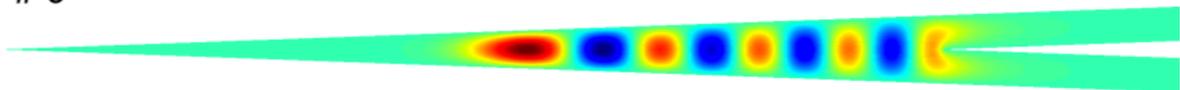
# Portrait vecteurs propres $\theta = 0.0226 * \pi/2 \sim 2^\circ$

# 8



# Portrait vecteurs propres $\theta = 0.0226 * \pi/2 \sim 2^\circ$

# 9



# Plan

- 1 Guides quantiques à coins, qu'est-ce que c'est?
- 2 Spectre du guide, généralités
- 3 Croissance des valeurs propres du guide
- 4 Existence des valeurs propres du guide
- 5 Grands angles
- 6 Petits angles
- 7 Approximation de Born-Oppenheimer
- 8 Asymptotique petits angles du guide
- 9 Conclusion**

# Conclusion

- 1 Nous avons démontré des asymptotiques “semi-classiques” optimales et à tout ordre pour les états fondamentaux du guide.
- 2 Des résultats apparentés sont déjà ou pourraient être démontrés dans d'autres situations géométriques
  - 2D: domaines en Y, en X, en escalier, etc...
  - 3D: tubes, surfaces courbées ou coniques

## La morale de l'histoire

- 1 Les simulations numériques stimulent l'intuition pour construire les quasi-modes dans les bonnes variables.
- 2 La connaissance des asymptotiques théoriques est nécessaire pour capturer numériquement les bonnes structures.

D'où une synergie vertueuse entre EDP et calcul scientifique

# Merci

Merci pour votre attention ... .. et merci aux *“petits Poissons rouges”*

