Stabilité de solutions stationnaires pour le système de Vlasov-Manev

C. Rigault
Encadrants : M. Lemou et F.Méhats

IRMAR, Université de Rennes 1

24/05/2011, SMAI 2011

Plan de l'exposé

Plan de l'exposé

Plan de l'exposé

Présentation

- Le système de Vlasov-Poisson :

$$\begin{cases} \partial_t f + v.\nabla_x f - \nabla_x \phi_f.\nabla_v f = 0 \quad \text{où} \quad (t,x,v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3. \\ f(t=0,x,v) = f_0(x,v) \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} \phi_f(t,x) = -\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(y,t)}{4\pi|x-y|}dy, \\ \rho(t,x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} f(t,x,v)dv. \end{cases}$$

- Vlasov-Poisson relativiste :

$$\partial_t f + \frac{v}{\sqrt{1+|v|^2/c^2}}.\nabla_x f - \nabla_x \phi.\nabla_v f = 0.$$

- Vlasov-Manev :

$$\phi(t,x) = -\int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{1}{4\pi|x-y|} + \frac{\alpha}{2\pi^2|x-y|^2} \right) \rho(y,t)dy.$$

Présentation

- Le système de Vlasov-Poisson :

$$\begin{cases} \partial_t f + v.\nabla_x f - \nabla_x \phi_f . \nabla_v f = 0 \quad \text{où} \quad (t,x,v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3. \\ \\ f(t=0,x,v) = f_0(x,v) \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} \phi_f(t,x) = -\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(y,t)}{4\pi|x-y|} dy, \\ \\ \rho(t,x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} f(t,x,v) dv. \end{cases}$$

- Vlasov-Poisson relativiste :

$$\partial_t f + \frac{v}{\sqrt{1+|v|^2/c^2}} . \nabla_x f - \nabla_x \phi . \nabla_v f = 0.$$

- Vlasov-Manev :

$$\phi(t,x) = -\int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{1}{4\pi|x-y|} + \frac{\alpha}{2\pi^2|x-y|^2} \right) \rho(y,t) dy.$$

Présentation

- Le système de Vlasov-Poisson :

$$\begin{cases} \partial_t f + v.\nabla_x f - \nabla_x \phi_f.\nabla_v f = 0 \quad \text{où} \quad (t,x,v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3. \\ f(t=0,x,v) = f_0(x,v) \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} \phi_f(t,x) = -\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(y,t)}{4\pi|x-y|} dy, \\ \rho(t,x) = \int_{\mathbb{R}^3} f(t,x,v) dv. \end{cases}$$

- Vlasov-Poisson relativiste :

$$\partial_t f + \frac{v}{\sqrt{1+|v|^2/c^2}}.\nabla_x f - \nabla_x \phi.\nabla_v f = 0.$$

- Vlasov-Manev :

$$\phi(t,x) = -\int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{1}{4\pi|x-y|} + \frac{\alpha}{2\pi^2|x-y|^2} \right) \rho(y,t) dy.$$

Présentation

- Le système de Vlasov-Poisson :

$$\begin{cases} \partial_t f + v.\nabla_x f - \nabla_x \phi_f.\nabla_v f = 0 \quad \text{où} \quad (t,x,v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3. \\ f(t=0,x,v) = f_0(x,v) \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} \phi_f(t,x) = -\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(y,t)}{4\pi|x-y|} dy, \\ \rho(t,x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} f(t,x,v) dv. \end{cases}$$

- Vlasov-Poisson relativiste :

$$\partial_t f + \frac{v}{\sqrt{1+|v|^2/c^2}}.\nabla_x f - \nabla_x \phi.\nabla_v f = 0.$$

- Vlasov-Manev :

$$\phi(t,x) = -\int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{1}{4\pi|x-y|} + \frac{\alpha}{2\pi^2|x-y|^2} \right) \rho(y,t) dy.$$

Lois de conservation

Sont conservés par le système de Vlasov :

- les intégrales $\int j(f)$ pour toute fonction j. En particulier,
    - les normes L^p de f.
    - la mesurabilité de f : $\mu_f(e) = meas\{(x,v) \in \mathbb{R}^6,\ f(x,v) > e\}$.
- Le Hamiltonien :

$$\mathcal{H}(f(t)) = \left\| |v|^2 f(t) \right\|_{L^1} - E_{pot}(f(t))$$

où l'énergie potentielle E_{pot} est définie par

$$E_{pot}(f(t)) = -\int_{\mathbb{R}^3} \phi_f(t,x)\rho_f(t,x)dx \geq 0.$$

Le problème de Cauchy

Horst-Hunze, 84, Diperna-Lions, 88-90, Lions-Perthame, 91, Pfaffelmoser, 92

Nous pouvons contrôler l'énergie potentielle par une inégalité d'interpolation du type :

$$\text{pour } p > p_{crit}, \; E_{pot}(f) \leq Const. \|v^2 f\|_{L^1}^{\gamma} \|f\|_{L^1}^{a} \|f\|_{L^p}^{b},$$

L'espace adéquat pour avoir l'existence locale de solution est donc :

$$\mathcal{E}_p = \{f \geq 0, \; \|f\|_{L^1} + \|f\|_{L^p} + \|v^2 f\|_{L^1} < \infty\} \text{ avec } p > p_{crit}.$$

Dans cet espace, nous avons schématiquement :

Existence $\Longleftrightarrow$ énergie cinétique est contrôlée

Le problème de Cauchy

Horst-Hunze, 84, Diperna-Lions, 88-90, Lions-Perthame, 91, Pfaffelmoser, 92

Nous pouvons contrôler l'énergie potentielle par une inégalité d'interpolation du type :

$$\text{pour } p > p_{crit}, \; E_{pot}(f) \leq Const.\|v^2 f\|_{L^1}^{\gamma} \, \|f\|_{L^1}^{a} \, \|f\|_{L^p}^{b} \,,$$

L'espace adéquat pour avoir l'existence locale de solution est donc :

$$\mathcal{E}_p = \{f \geq 0, \; \|f\|_{L^1} + \|f\|_{L^p} + \|v^2 f\|_{L^1} < \infty\} \text{ avec } p > p_{crit}.$$

Dans cet espace, nous avons schématiquement :

Existence $\Longleftrightarrow$ énergie cinétique est contrôlée

Le problème de Cauchy

Horst-Hunze, 84, Diperna-Lions, 88-90, Lions-Perthame, 91, Pfaffelmoser, 92

Nous pouvons contrôler l'énergie potentielle par une inégalité d'interpolation du type :

$$\text{pour } p > p_{crit}, \; E_{pot}(f) \leq Const. \|v^2 f\|_{L^1}^{\gamma} \, \|f\|_{L^1}^{a} \, \|f\|_{L^p}^{b} \,,$$

L'espace adéquat pour avoir l'existence locale de solution est donc :

$$\mathcal{E}_p = \{f \geq 0, \; \|f\|_{L^1} + \|f\|_{L^p} + \|v^2 f\|_{L^1} < \infty\} \text{ avec } p > p_{crit}.$$

Dans cet espace, nous avons schématiquement :

Existence $\Longleftrightarrow$ énergie cinétique est contrôlée

Contrôle de l'énergie cinétique

La conservation du Hamiltonien et l'inégalité d'interpolation sur $E_{pot}(f)$ impliquent :

- Vlasov-Poisson : $\mathcal{H}(f) \geq \left\| |v|^2 f \right\|_1 - K \left\| |v|^2 f \right\|_1^{\frac{1}{2}} \|f_0\|_1^{\frac{7p-9}{6(p-1)}} \|f_0\|_p^{\frac{p}{3(p-1)}}$.
  $\Longrightarrow$ existence globale pour toute condition initiale.

- Vlasov-Manev : La rupture d'homogénéité se traduit par :

$$\mathcal{H}(f) \geq \left\| |v|^2 f \right\|_{L^1} \left(1 - C_1 \|f\|_{L^1}^{\frac{p-3}{3(p-1)}} \|f\|_{L^p}^{\frac{2p}{3(p-1)}} \right) - C_2 \left\| |v|^2 f \right\|_{L^1}^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^1}^{\frac{7p-9}{6(p-1)}} \|f\|_{L^p}^{\frac{p}{3(p-1)}},$$

$\Rightarrow$ Existence globale si $\|f_0\|_1^{\frac{p-3}{3(p-1)}} \|f_0\|_p^{\frac{2p}{3(p-1)}} < 1/C_2$

- Vlasov-Poisson relativiste : Situation identique avec une condition sous critique $\|f_0\|_1^{\frac{2p-3}{3(p-1)}} \|f_0\|_p^{\frac{p}{3(p-1)}} < 2c/K$.

Contrôle de l'énergie cinétique

La conservation du Hamiltonien et l'inégalité d'interpolation sur $E_{pot}(f)$ impliquent :

- <u>Vlasov-Poisson :</u> $\mathcal{H}(f) \geq \left\| |v|^2 f \right\|_1 - K \left\| |v|^2 f \right\|_1^{\frac{1}{2}} \|f_0\|_1^{\frac{7p-9}{6(p-1)}} \|f_0\|_p^{\frac{p}{3(p-1)}}$.
  $\Longrightarrow$ existence globale pour toute condition initiale.

- <u>Vlasov-Manev :</u> La rupture d'homogénéité se traduit par :

$$\mathcal{H}(f) \geq \left\| |v|^2 f \right\|_{L^1} \left(1 - C_1 \|f\|_{L^1}^{\frac{p-3}{3(p-1)}} \|f\|_{L^p}^{\frac{2p}{3(p-1)}} \right) - C_2 \left\| |v|^2 f \right\|_{L^1}^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^1}^{\frac{7p-9}{6(p-1)}} \|f\|_{L^p}^{\frac{p}{3(p-1)}},$$

$\Rightarrow$ Existence globale si $\|f_0\|_1^{\frac{p-3}{3(p-1)}} \|f_0\|_p^{\frac{2p}{3(p-1)}} < 1/C_2$

- <u>Vlasov-Poisson relativiste :</u> Situation identique avec une condition sous critique $\|f_0\|_1^{\frac{2p-3}{3(p-1)}} \|f_0\|_p^{\frac{p}{3(p-1)}} < 2c/K$.

Contrôle de l'énergie cinétique

La conservation du Hamiltonien et l'inégalité d'interpolation sur $E_{pot}(f)$ impliquent :

- Vlasov-Poisson : $\mathcal{H}(f) \geq \left\| |v|^2 f \right\|_1 - K \left\| |v|^2 f \right\|_1^{\frac{1}{2}} \|f_0\|_1^{\frac{7p-9}{6(p-1)}} \|f_0\|_p^{\frac{p}{3(p-1)}}$.
  $\Longrightarrow$ existence globale pour toute condition initiale.

- Vlasov-Manev : La rupture d'homogénéité se traduit par :

$$\mathcal{H}(f) \geq \left\| |v|^2 f \right\|_{L^1} \left(1 - C_1 \|f\|_{L^1}^{\frac{p-3}{3(p-1)}} \|f\|_{L^p}^{\frac{2p}{3(p-1)}} \right) - C_2 \left\| |v|^2 f \right\|_{L^1}^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^1}^{\frac{7p-9}{6(p-1)}} \|f\|_{L^p}^{\frac{p}{3(p-1)}},$$

$\Rightarrow$ Existence globale si $\|f_0\|_1^{\frac{p-3}{3(p-1)}} \|f_0\|_p^{\frac{2p}{3(p-1)}} < 1/C_2$

- Vlasov-Poisson relativiste : Situation identique avec une condition sous critique $\|f_0\|_1^{\frac{2p-3}{3(p-1)}} \|f_0\|_p^{\frac{p}{3(p-1)}} < 2c/K$.

Recherche de solutions stationnaires stables

On connait déjà des classes particulières de solutions stationnaires (voir Batt, 1986) :

$$Q = F\left(\frac{|v|^2}{2} + \phi_Q\right) \quad \text{et} \quad Q = F\left(\frac{|v|^2}{2} + \phi_Q, |x \wedge v|^2\right).$$

on cherche ce premier type de solutions stationnaires comme minimiseurs sur $\mathcal{E}_p$ du problème variationnel

$$\min_{\|f\|_1 = M_1, \|f\|_p = M_p} \mathcal{H}(f),$$

avec $p > p_{crit}$ et M_1, $M_p > 0$. Remarquons que, pour Vlasov-Manev, une unique contrainte ne suffit pas.

- Pour Vlasov-Poisson, ce minimum est toujours fini et strict. négatif.
- Pour Vlasov-Manev, ce minimum est fini à la condition sous-critique :

$$M_1^{\frac{p-3}{3(p-1)}} M_p^{\frac{2p}{3(p-1)}} < 1/C_2.$$

(voir Wolanski, 99, Guo, Rein, 99-01 puis Lemou, Méhats, Raphaël 05-11)

Recherche de solutions stationnaires stables

On connait déjà des classes particulières de solutions stationnaires (voir Batt, 1986) :

$$Q = F\left(\frac{|v|^2}{2} + \phi_Q\right) \quad \text{et} \quad Q = F\left(\frac{|v|^2}{2} + \phi_Q, |x \wedge v|^2\right).$$

on cherche ce premier type de solutions stationnaires comme minimiseurs sur $\mathcal{E}_p$ du problème variationnel

$$\min_{\|f\|_1 = M_1, \|f\|_p = M_p} \mathcal{H}(f),$$

avec $p > p_{crit}$ et M_1, $M_p > 0$. Remarquons que, pour Vlasov-Manev, une unique contrainte ne suffit pas.

- Pour Vlasov-Poisson, ce minimum est toujours fini et strict. négatif.
- Pour Vlasov-Manev, ce minimum est fini à la condition sous-critique :

$$M_1^{\frac{p-3}{3(p-1)}} M_p^{\frac{2p}{3(p-1)}} < 1/C_2.$$

(voir Wolanski, 99, Guo, Rein, 99-01 puis Lemou, Méhats, Raphaël 05-11)

Recherche de solutions stationnaires stables

On connait déjà des classes particulières de solutions stationnaires (voir Batt, 1986) :

$$Q = F\left(\frac{|v|^2}{2} + \phi_Q\right) \quad \text{et} \quad Q = F\left(\frac{|v|^2}{2} + \phi_Q, |x \wedge v|^2\right).$$

on cherche ce premier type de solutions stationnaires comme minimiseurs sur $\mathcal{E}_p$ du problème variationnel

$$\min_{\|f\|_1 = M_1, \|f\|_p = M_p} \mathcal{H}(f),$$

avec $p > p_{crit}$ et M_1, $M_p > 0$. Remarquons que, pour Vlasov-Manev, une unique contrainte ne suffit pas.

- Pour Vlasov-Poisson, ce minimum est toujours fini et strict. négatif.
- Pour Vlasov-Manev, ce minimum est fini à la condition sous-critique :

$$M_1^{\frac{p-3}{3(p-1)}} M_p^{\frac{2p}{3(p-1)}} < 1/C_2.$$

(voir Wolanski, 99, Guo, Rein, 99-01 puis Lemou, Méhats, Raphaël 05-11)

Existence de minimiseurs

Solutions stationnaires pour Vlasov-Manev

Soient $p > p_{crit}$ et M_1, $M_p > 0$ vérifiant la condition sous-critique. Alors toute suite minimisante du problème variationnel précédent est compacte. Il existe ainsi $\lambda, \mu < 0$ tels que ses minimiseur soient les solutions de

$$Q(x, v) = \left(\frac{\lambda + \frac{|v|^2}{2} + \phi_Q(x)}{\mu} \right)_+^{\frac{1}{p-1}}.$$

De plus, ces états stationnaires sont à support compact et leur potentiel, ϕ_Q, est de classe $C^{1,k}$ pour tout $k \in (0, 1)$.

<u>Démonstration :</u> Elle est basé sur :

- Le contrôle cinétique $\mathcal{H}(f) \geq C_1 E_{kin}(f) - C_2 E_{kin}(f)^{1/2}$ avec $C_1 > 0$.
- le lemme de Concentration compacité (Lions, 84).

Existence de minimiseurs

Solutions stationnaires pour Vlasov-Manev

Soient $p > p_{crit}$ et M_1, $M_p > 0$ vérifiant la condition sous-critique. Alors toute suite minimisante du problème variationnel précédent est compacte. Il existe ainsi $\lambda, \mu < 0$ tels que ses minimiseur soient les solutions de

$$Q(x,v) = \left(\frac{\lambda + \frac{|v|^2}{2} + \phi_Q(x)}{\mu} \right)_+^{\frac{1}{p-1}} .$$

De plus, ces états stationnaires sont à support compact et leur potentiel, ϕ_Q, est de classe $C^{1,k}$ pour tout $k \in (0,1)$.

Démonstration : Elle est basé sur :

- Le contrôle cinétique $\mathcal{H}(f) \geq C_1 E_{kin}(f) - C_2 E_{kin}(f)^{1/2}$ avec $C_1 > 0$.
- le lemme de Concentration compacité (Lions, 84).

Existence de minimiseurs

Solutions stationnaires pour Vlasov-Manev

Soient $p > p_{crit}$ et M_1, $M_p > 0$ vérifiant la condition sous-critique. Alors toute suite minimisante du problème variationnel précédent est compacte. Il existe ainsi $\lambda, \mu < 0$ tels que ses minimiseur soient les solutions de

$$Q(x,v) = \left(\frac{\lambda + \frac{|v|^2}{2} + \phi_Q(x)}{\mu} \right)_+^{\frac{1}{p-1}}.$$

De plus, ces états stationnaires sont à support compact et leur potentiel, ϕ_Q, est de classe $C^{1,k}$ pour tout $k \in (0,1)$.

Démonstration : Elle est basé sur :

- Le contrôle cinétique $\mathcal{H}(f) \geq C_1 E_{kin}(f) - C_2 E_{kin}(f)^{1/2}$ avec $C_1 > 0$.
- le lemme de Concentration compacité (Lions, 84).

Stabilité

Stabilité

Avec les notations et hypothèses précédentes, soit Q l'une des solutions trouvées. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que : Si $f(t)$ une solution classique de Vlasov-Manev sur $[0, T)$ ayant pour condition initiale $f_0 \in \mathcal{E}_p$ vérifiant $\|f_0 - Q\|_{\mathcal{E}_p} < \delta$ alors, pour tout $t \in [0, T)$, il existe $x(t) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\|f(t, x + x(t), v) - Q(x, v)\|_{\mathcal{E}_p} < \varepsilon.$$

Démonstration :

STABILITE = COMPACITE + UNICITE (à transl. près)

- Vlasov-Poisson : unicité directe par Euler-Lagrange.
- Vlasov-Manev : Cette unicité n'est pas montrée. Nous utilisons donc la conservation de la mesurabilité par le flot en montrant en particulier

2 minimiseurs équimesurables sont égaux à tranlation en espace près.

Stabilité

Stabilité

Avec les notations et hypothèses précédentes, soit Q l'une des solutions trouvées. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que : Si $f(t)$ une solution classique de Vlasov-Manev sur $[0, T)$ ayant pour condition initiale $f_0 \in \mathcal{E}_p$ vérifiant $\|f_0 - Q\|_{\mathcal{E}_p} < \delta$ alors, pour tout $t \in [0, T)$, il existe $x(t) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\|f(t, x + x(t), v) - Q(x, v)\|_{\mathcal{E}_p} < \varepsilon.$$

Démonstration :

STABILITE = COMPACITE + UNICITE (à transl. près)

- Vlasov-Poisson : unicité directe par Euler-Lagrange.
- Vlasov-Manev : Cette unicité n'est pas montrée. Nous utilisons donc la conservation de la mesurabilité par le flot en montrant en particulier

2 minimiseurs équimesurables sont égaux à tranlation en espace près.

Stabilité

Stabilité

Avec les notations et hypothèses précédentes, soit Q l'une des solutions trouvées. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que : Si $f(t)$ une solution classique de Vlasov-Manev sur $[0, T)$ ayant pour condition initiale $f_0 \in \mathcal{E}_p$ vérifiant $\|f_0 - Q\|_{\mathcal{E}_p} < \delta$ alors, pour tout $t \in [0, T)$, il existe $x(t) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\|f(t, x + x(t), v) - Q(x, v)\|_{\mathcal{E}_p} < \varepsilon.$$

Démonstration :

STABILITE = COMPACITE + UNICITE (à transl. près)

- Vlasov-Poisson : unicité directe par Euler-Lagrange.
- Vlasov-Manev : Cette unicité n'est pas montrée. Nous utilisons donc la conservation de la mesurabilité par le flot en montrant en particulier

2 minimiseurs équimesurables sont égaux à tranlation en espace près.

Stabilité

Stabilité

Avec les notations et hypothèses précédentes, soit Q l'une des solutions trouvées. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que : Si $f(t)$ une solution classique de Vlasov-Manev sur $[0, T)$ ayant pour condition initiale $f_0 \in \mathcal{E}_p$ vérifiant $\|f_0 - Q\|_{\mathcal{E}_p} < \delta$ alors, pour tout $t \in [0, T)$, il existe $x(t) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\|f(t, x + x(t), v) - Q(x, v)\|_{\mathcal{E}_p} < \varepsilon.$$

Démonstration :

STABILITE = COMPACITE + UNICITE (à transl. près)

- Vlasov-Poisson : unicité directe par Euler-Lagrange.
- Vlasov-Manev : Cette unicité n'est pas montrée. Nous utilisons donc la conservation de la mesurabilité par le flot en montrant en particulier

2 minimiseurs équimesurables sont égaux à tranlation en espace près.

Stabilité

Stabilité

Avec les notations et hypothèses précédentes, soit Q l'une des solutions trouvées. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que : Si $f(t)$ une solution classique de Vlasov-Manev sur $[0, T)$ ayant pour condition initiale $f_0 \in \mathcal{E}_p$ vérifiant $\|f_0 - Q\|_{\mathcal{E}_p} < \delta$ alors, pour tout $t \in [0, T)$, il existe $x(t) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\|f(t, x + x(t), v) - Q(x, v)\|_{\mathcal{E}_p} < \varepsilon.$$

Démonstration :

STABILITE = COMPACITE + UNICITE (à transl. près)

- Vlasov-Poisson : unicité directe par Euler-Lagrange.
- Vlasov-Manev : Cette unicité n'est pas montrée. Nous utilisons donc la conservation de la mesurabilité par le flot en montrant en particulier

2 minimiseurs équimesurables sont égaux à tranlation en espace près.

Stabilité

Stabilité

Avec les notations et hypothèses précédentes, soit Q l'une des solutions trouvées. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que : Si $f(t)$ une solution classique de Vlasov-Manev sur $[0, T)$ ayant pour condition initiale $f_0 \in \mathcal{E}_p$ vérifiant $\|f_0 - Q\|_{\mathcal{E}_p} < \delta$ alors, pour tout $t \in [0, T)$, il existe $x(t) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\|f(t, x + x(t), v) - Q(x, v)\|_{\mathcal{E}_p} < \varepsilon.$$

Démonstration :

STABILITE = COMPACITE + UNICITE (à transl. près)

- Vlasov-Poisson : unicité directe par Euler-Lagrange.
- Vlasov-Manev : Cette unicité n'est pas montrée. Nous utilisons donc la conservation de la mesurabilité par le flot en montrant en particulier

2 minimiseurs équimesurables sont égaux à tranlation en espace près.

Présentation

Vlasov-Manev pur :

$$\begin{cases} \partial_t f + v.\nabla_x f - \nabla_x \phi.\nabla_v f = 0 \text{ où } (t,x,v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3. \\ \\ \phi(t,x) = -\int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{1}{2\pi^2 |x-y|^2} \right) \rho(y,t) dy \end{cases}$$

Problème pour un tel système, l'homogénéité ne permet d'avoir le contrôle cinétique précédent : ici

$$\mathcal{H}(f) \geq \left\| |v|^2 f \right\|_{L^1} \left(1 - C_1 \|f\|_{L^1}^{\frac{p-3}{3(p-1)}} \|f\|_{L^p}^{\frac{2p}{3(p-1)}} \right).$$

D'où :

- Pas d'existence globale (même si l'existence locale reste vrai).
- $\min_{\|f\|_1 = M_1, \|f\|_p = M_p} \mathcal{H}(f) = -\infty$ ou 0.

Présentation

Vlasov-Manev pur :

$$\begin{cases} \partial_t f + v.\nabla_x f - \nabla_x \phi . \nabla_v f = 0 \text{ où } (t,x,v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3. \\ \phi(t,x) = -\int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{1}{2\pi^2 |x-y|^2} \right) \rho(y,t) dy \end{cases}$$

Problème pour un tel système, l'homogénéité ne permet d'avoir le contrôle cinétique précédent : ici

$$\mathcal{H}(f) \geq \left\| |v|^2 f \right\|_{L^1} \left(1 - C_1 \|f\|_{L^1}^{\frac{p-3}{3(p-1)}} \|f\|_{L^p}^{\frac{2p}{3(p-1)}} \right).$$

D'où :

- Pas d'existence globale (même si l'existence locale reste vrai).
- $\min_{\|f\|_1 = M_1, \|f\|_p = M_p} \mathcal{H}(f) = -\infty$ ou 0.

Existence de solutions stationnaires

On s'intéresse alors au problème variationnel :

$$\min_{f \in \mathcal{E}_p \setminus \{0\}} \frac{\|v^2 f\|_{L_1} \, \|f\|_{L^1}^{\frac{p-3}{3(p-1)}} \, \|f\|_{L^p}^{\frac{2p}{3(p-1)}}}{E_{pot}(f)}$$

.

- Les suites minimizantes peuvent exploser en norme (par compensation de $E_{pot}(f_n)$).
- On peut potentiellement tendre vers $f = 0$ (problème d'évanescence).

$\Longrightarrow$ Solution : se ramener à une suite minimisante ayant ses 3 normes fixées par translation pseudo-conforme. $\Longrightarrow$ On trouve ainsi des solutions stationnaires.

Existence de solutions stationnaires

On s'intéresse alors au problème variationnel :

$$\min_{f \in \mathcal{E}_p \setminus \{0\}} \frac{\left\| v^2 f \right\|_{L_1} \left\| f \right\|_{L^1}^{\frac{p-3}{3(p-1)}} \left\| f \right\|_{L^p}^{\frac{2p}{3(p-1)}}}{E_{pot}(f)}$$

.

- Les suites minimizantes peuvent exploser en norme (par compensation de $E_{pot}(f_n)$).
- On peut potentiellement tendre vers $f = 0$ (problème d'évanescence).

$\Longrightarrow$ Solution : se ramener à une suite minimisante ayant ses 3 normes fixées par translation pseudo-conforme. $\Longrightarrow$ On trouve ainsi des solutions stationnaires.

Existence de solutions stationnaires

On s'intéresse alors au problème variationnel :

$$\min_{f \in \mathcal{E}_p \setminus \{0\}} \frac{\|v^2 f\|_{L_1} \|f\|_{L^1}^{\frac{p-3}{3(p-1)}} \|f\|_{L^p}^{\frac{2p}{3(p-1)}}}{E_{pot}(f)}$$

.

- Les suites minimizantes peuvent exploser en norme (par compensation de $E_{pot}(f_n)$).
- On peut potentiellement tendre vers $f = 0$ (problème d'évanescence).

$\Longrightarrow$ Solution : se ramener à une suite minimisante ayant ses 3 normes fixées par translation pseudo-conforme. $\Longrightarrow$ On trouve ainsi des solutions stationnaires.

Existence de solutions stationnaires

On s'intéresse alors au problème variationnel :

$$\min_{f \in \mathcal{E}_p \setminus \{0\}} \frac{\|v^2 f\|_{L_1} \|f\|_{L^1}^{\frac{p-3}{3(p-1)}} \|f\|_{L^p}^{\frac{2p}{3(p-1)}}}{E_{pot}(f)}$$

.

- Les suites minimizantes peuvent exploser en norme (par compensation de $E_{pot}(f_n)$).
- On peut potentiellement tendre vers $f = 0$ (problème d'évanescence).

$\Longrightarrow$ Solution : se ramener à une suite minimisante ayant ses 3 normes fixées par translation pseudo-conforme. $\Longrightarrow$ On trouve ainsi des solutions stationnaires.

Une stabilité "explosive"

- Nous n'avons pas de stabilité : en effet, pour Q une solution stationnaire de Vlasov-Manev pure et pour $T > 0$, la fonction f définie par :

$$f(t,x,v) = Q\left(\frac{x}{T-t}, (T-t)v + x\right),$$

est solution de ce système.

- Cependant, pour $f(t)$ une solution explosive de VM pure sur $[0,T)$, de condition initiale assez proche de Q, nous pouvons montrer que

$$\left\| f(t, \frac{x + x(t)}{\lambda(t)}, \lambda(t)v) - Q(x,v) \right\|_{\mathcal{E}_p} < \varepsilon \text{ avec } \lambda(t) = \sqrt{\frac{E_{kin}(Q)}{E_{kin}(f(t))}}.$$

Nous utilisons pour cela un résultat d'unicité un peu différent :

2 solutions stationnaires équimesurables, minimisant notre problème variationnel et de même énergie cinétique sont égales à translation en espace près.

Une stabilité "explosive"

- Nous n'avons pas de stabilité : en effet, pour Q une solution stationnaire de Vlasov-Manev pure et pour $T > 0$, la fonction f définie par :

$$f(t,x,v) = Q\left(\frac{x}{T-t}, (T-t)v + x\right),$$

est solution de ce système.

- Cependant, pour $f(t)$ une solution explosive de VM pure sur $[0, T)$, de condition initiale assez proche de Q, nous pouvons montrer que

$$\left\| f\left(t, \frac{x + x(t)}{\lambda(t)}, \lambda(t)v\right) - Q(x,v) \right\|_{\mathcal{E}_p} < \varepsilon \text{ avec } \lambda(t) = \sqrt{\frac{E_{kin}(Q)}{E_{kin}(f(t))}}.$$

Nous utilisons pour cela un résultat d'unicité un peu différent :

2 solutions stationnaires équimesurables, minimisant notre problème variationnel et de même énergie cinétique sont égales à translation en espace près.

Une stabilité "explosive"

- Nous n'avons pas de stabilité : en effet, pour Q une solution stationnaire de Vlasov-Manev pure et pour $T > 0$, la fonction f définie par :

$$f(t,x,v) = Q\left(\frac{x}{T-t}, (T-t)v + x\right),$$

  est solution de ce système.

- Cependant, pour $f(t)$ une solution explosive de VM pure sur $[0,T)$, de condition initiale assez proche de Q, nous pouvons montrer que

$$\left\| f(t, \frac{x + x(t)}{\lambda(t)}, \lambda(t)v) - Q(x,v) \right\|_{\mathcal{E}_p} < \varepsilon \text{ avec } \lambda(t) = \sqrt{\frac{E_{kin}(Q)}{E_{kin}(f(t))}}.$$

Nous utilisons pour cela un résultat d'unicité un peu différent :

2 solutions stationnaires équimesurables, minimisant notre problème variationnel et de même énergie cinétique sont égales à translation en espace près.

Des solutions auto-similaires

Nous avons le résultat suivant :

Théorème (Existence de solution auto-similaire)

Soit Q une solution stationnaire trouvée. Alors, il existe une constante b^* telle qu'il existe une famille de fonctions, Q_b, pour $b \in [0, b^*]$, continues,radiales et à support compact telle que $Q_0 = Q$ et telle que la fonction

$$f(t,x,v) = Q_b\left(\frac{x}{\lambda(t)}, \lambda(t)v\right) \ \mathit{avec} \ \lambda(t) = C\sqrt{b(T-t)},$$

est solution explosive du système étudié pour tout b.

Démonstration :

- Il est équivalent de trouver Q_b vérifiant l'équation :

$$v \cdot \nabla_x Q_b - \nabla_x \phi_{Q_b} \cdot \nabla_v Q_b + b(x \cdot \nabla_x Q_b - v \cdot \nabla_v Q_b) = 0.$$

dont sont solutions les fonctions vérifiant $Q_b = F\left(\frac{|v|^2}{2} + b\chi(x)x \cdot v + \phi_Q\right)$, avec $\chi(x)$ à support compact et égale à 1 sur le support de Q_b.

Des solutions auto-similaires

Nous avons le résultat suivant :

Théorème (Existence de solution auto-similaire)

Soit Q une solution stationnaire trouvée. Alors, il existe une constante b^* telle qu'il existe une famille de fonctions, Q_b, pour $b \in [0, b^*]$, continues,radiales et à support compact telle que $Q_0 = Q$ et telle que la fonction

$$f(t,x,v) = Q_b\left(\frac{x}{\lambda(t)}, \lambda(t)v\right) \ \textit{avec} \ \lambda(t) = C\sqrt{b(T-t)},$$

est solution explosive du système étudié pour tout b.

Démonstration :

- Il est équivalent de trouver Q_b vérifiant l'équation :

$$v \cdot \nabla_x Q_b - \nabla_x \phi_{Q_b} \cdot \nabla_v Q_b + b(x \cdot \nabla_x Q_b - v \cdot \nabla_v Q_b) = 0.$$

dont sont solutions les fonctions vérifiant
$Q_b = F\left(\frac{|v|^2}{2} + b\chi(x)x \cdot v + \phi_Q\right)$, avec $\chi(x)$ à support compact et égale à 1 sur le support de Q_b.

Problème variationnel

On étudie donc le problème variationnel

$$\min_{E_{pot}(f)=E_{pot}(Q),\ f\in Eq(Q)} \int \left(\frac{|v|^2}{2} + b\chi(x)x\cdot v\right) f(x,v)dxdv.$$

- Mettre l'équimesurabilité + une autre donnée en contrainte est nécessaire pour avoir la continuité des Q_b vers Q compte tenu de notre résultat d'unicité.
- Problème : il est délicat de différentier la fonctionnel avec ces contraintes. On a donc construit des outils pour trouver directement la forme du minimiseur et son unicité : des réarrangements fonctions de l'énergie microscopique associée à ce système qui conserve l'énergie potentiel.

Problème variationnel

On étudie donc le problème variationnel

$$\min_{E_{pot}(f)=E_{pot}(Q),\ f\in Eq(Q)} \int \left(\frac{|v|^2}{2} + b\chi(x)x\cdot v \right) f(x,v)dxdv.$$

- Mettre l'équimesurabilité + une autre donnée en contrainte est nécessaire pour avoir la continuité des Q_b vers Q compte tenu de notre résultat d'unicité.
- Problème : il est délicat de différentier la fonctionnel avec ces contraintes. On a donc construit des outils pour trouver directement la forme du minimiseur et son unicité : des réarrangements fonctions de l'énergie microscopique associée à ce système qui conserve l'énergie potentiel.

Merci pour votre attention !