
Couplage de Systèmes Hyperboliques : Interface mince versus Interface épaisse

Frédéric COQUEL

Centre de Mathématiques Appliquées
CNRS et Ecole Polytechnique

SMAI 2011, Guidel

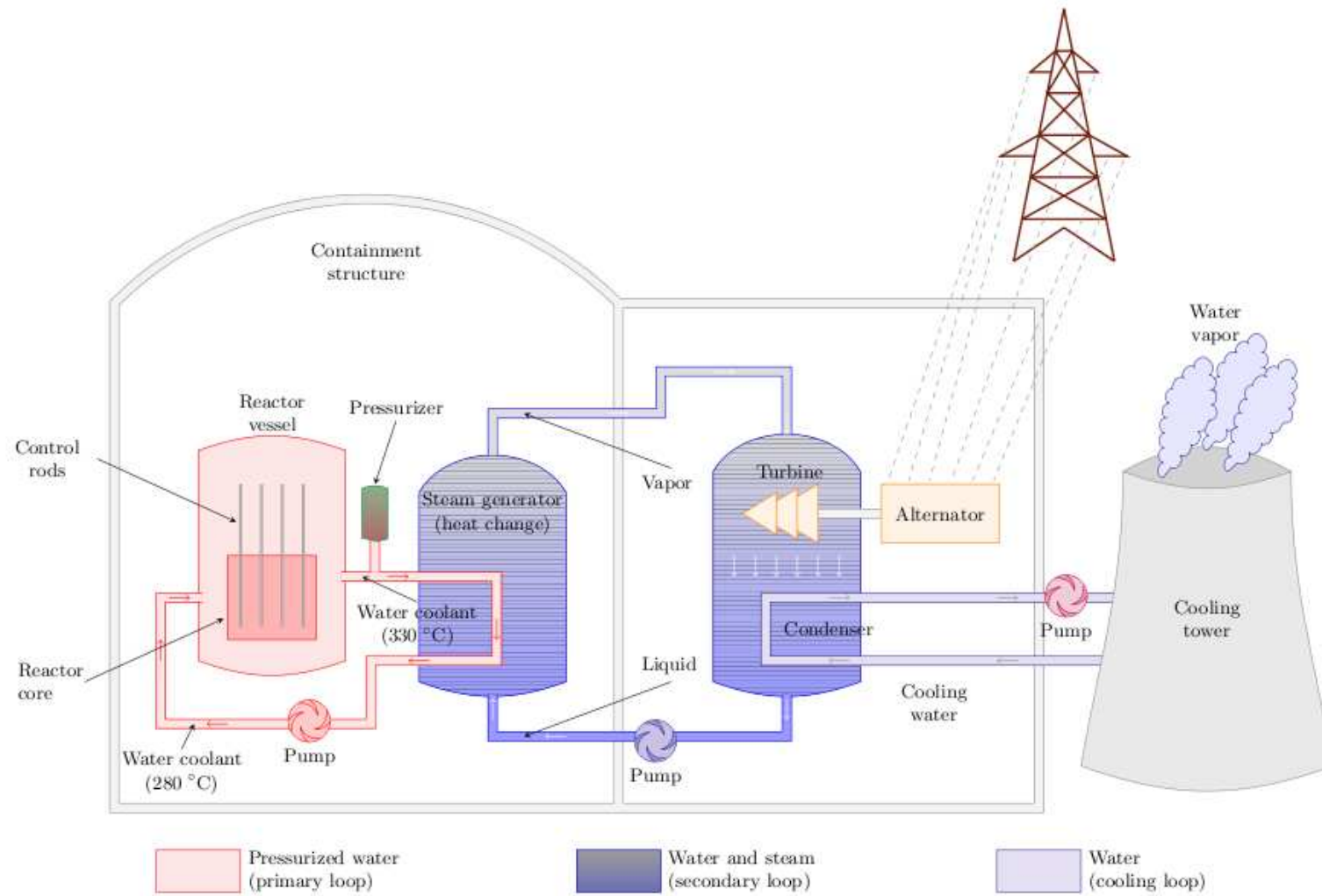
Problématique générale

Enjeu : Simulation instationnaire des écoulements diphasiques eau-vapeur à faible nombre de Mach

- ▷ Longueurs caractéristiques : *du micron au delà du mètre*
 - ▷ **Hiérarchie de modèles** physiques : *de la DNS aux modèles moyennés.*
 - ▷ Ensemble fortement **hétérogène** de modèles mathématiques.
 - ▷ Modélisation en régime compressible d'écoulements bas nombres de Mach
-
- ▷ Le dispositif est décomposé en sous-segments
 - ▷ Chaque segment est modélisé *ab initio* par un modèle particulier

**Coupler les codes de chaque segment
afin de simuler l'ensemble du dispositif**

Contexte des travaux



Couplage interfacial de modèles en thermo-hydraulique

Sous l'impulsion du projet NEPTUNE (CEA, EDF, AREVA-NP et IRSN).

▷ Collaboration entre

Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Pierre et Marie Curie - Paris 6

Christophe Chalons, Filipa Caetano, FC, Edwige Godlewski, Frédéric Lagoutière, Pierre-Arnaud Raviart, Nicolas Seguin

CEA Saclay

Annalisa Ambroso, Benjamin Boutin, Thomas Galié, Samuel Kokh, Jacques Segré

▷ En interation avec

EDF R&D

Jean-Marc Hérard, Laetitia Girault, Olivier Hurisse, Khaled Saleh

Couplage de Plateformes de Simulation

Soient deux systèmes EDPs, indexés par \pm et correspondant à deux codes de calcul utilisés respectivement à gauche et à droite de $\{x = 0\}$

<p>CODE 1</p> $\partial_t \mathbf{w} + \partial_x \mathbf{f}_-(\mathbf{w}) = 0$ $x < -\eta$	<p>Couplage de codes \hat{E} Couplage de modèles</p> $-\eta < x < +\eta$	<p>CODE 2</p> $\partial_t \mathbf{w} + \partial_x \mathbf{f}_+(\mathbf{w}) = 0$ $x > +\eta$
Comment fixer $\eta > 0$?		

- ▶ Comment définir la zone de couplage $\{-\eta < x < +\eta\}$ et modéliser le couplage ?
 - ▶ Une première approche **la moins intrusive** en terme de codage : fixer $\eta = 0$ et modéliser le couplage par un double jeu de conditions aux limites
-

Une modélisation géométrique de couplage : l'interface infiniment m

$\partial_t \mathbf{w} + \partial_x \mathbf{f}_-(\mathbf{w}) = 0$	Couplage de modèles	$\partial_t \mathbf{w} + \partial_x \mathbf{f}_+(\mathbf{w}) = 0$
$x < 0$	CL en $x = 0$	$x > 0$

Comment lier les traces $\mathbf{w}(t, 0^-)$ à $\mathbf{w}(t, 0^+)$?

Une infinité de conditions de transmission distinctes éligibles :

- ▷ Elles traduisent en générale une **propriété de continuité** en $x = 0$ de la solution ou de transformations nonlinéaires de cette dernière
- ▷ Elles peuvent être complètement, partiellement ou non conservatives mais de manière exclusive

Modélisation du couplage par une interface infiniment mince

Propriétés de continuités escomptées à l'interface $x = 0$

- ▷ Continuité de l'inconnue $\mathbf{w}(t, 0^-) = \mathbf{w}(t, 0^+)$
- ▷ Continuité des flux $\mathbf{f}_-(\mathbf{w}(t, 0^-)) = \mathbf{f}_+(\mathbf{w}(t, 0^+))$
- ▷ Continuité d'autres transformations nonlinéaires γ_{\pm} (inversibles)
 $\gamma_-^{-1}(\mathbf{w}(t, 0^-)) = \gamma_+^{-1}(\mathbf{w}(t, 0^+))$
- ▷ un changement de variable utile à la suite

$$\mathbf{u}(x, t) = \begin{cases} \gamma_-^{-1}(\mathbf{w})(x, t), & x < 0, \quad t > 0, \\ \gamma_+^{-1}(\mathbf{w})(x, t), & x > 0, \quad t > 0. \end{cases}$$

$\partial_t \gamma_-(\mathbf{u}) + \partial_x \mathbf{f}_-(\gamma_-(\mathbf{u})) = 0$	$\partial_t \gamma_+(\mathbf{u}) + \partial_x \mathbf{f}_+(\gamma_+(\mathbf{u})) = 0$
---	---

$$\mathbf{u}(t, 0^-) = \mathbf{u}(t, 0^+)$$

Couplage d'équations par une interface infiniment mince

Choix d'un jeu de conditions de transmission particulier (laissé à l'utilisateur)

- ▷ impose le choix des équilibres thermo-mécaniques (solution indépendante du temps et constante partout en espace)

Deux états distincts w_-, w_+ avec $u = \gamma_-(w_-) = \gamma_+(w_+)$

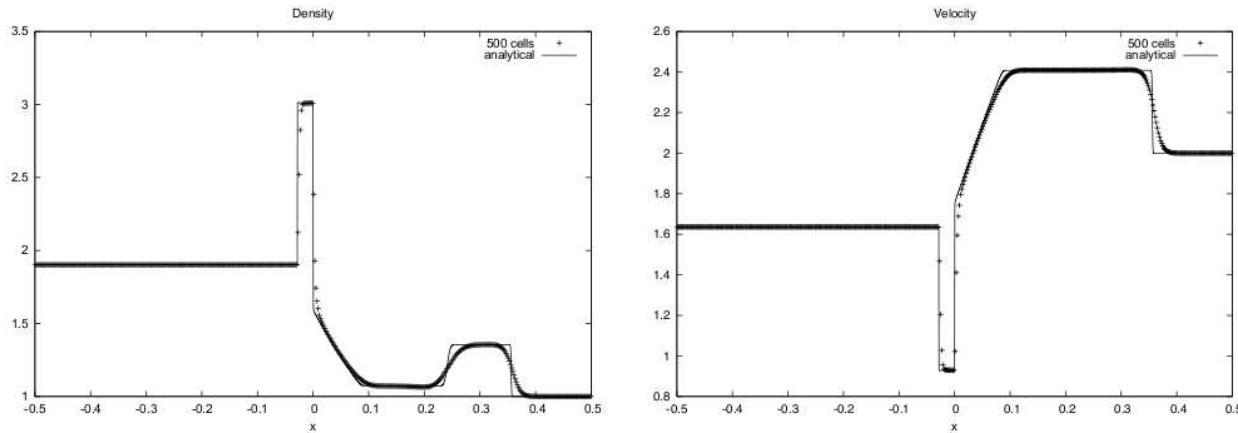
- ▷ prescrit aussi le comportement instationnaire de l'interface

Etude des solutions auto-semblables pour l'analyse du comportement en temps grands des solutions du problème de Cauchy couplé

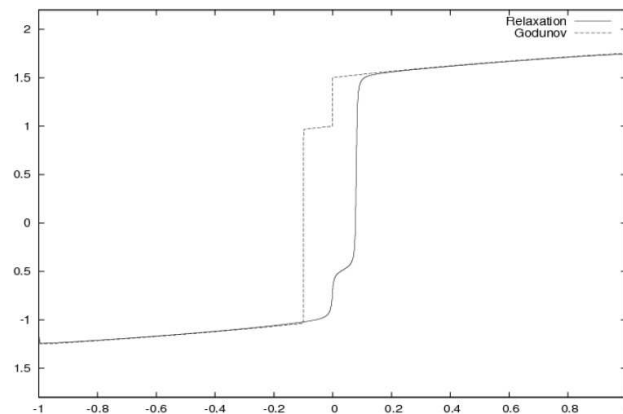
$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \mathbf{w} + \partial_x \mathbf{f}_-(\mathbf{w}) = 0, \quad x < 0, \\ w(0, x) = w_0(x), \\ \gamma_-^{-1}(\mathbf{w}(t, 0^-)) = \mathbf{u}(t, 0^+) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \mathbf{w} + \partial_x \mathbf{f}_+(\mathbf{w}) = 0, \quad x > 0, \\ w(0, x) = w_0(x), \\ \gamma_+^{-1}(\mathbf{w}(t, 0^+)) = \mathbf{u}(t, 0^-) \end{array} \right.$$

- ▷ Formulation de la condition de transmission doit être affaiblie : **phénomène de résonance**
-

Résonance et Conséquences



Transmission en (ρ, u, p) pour les équations d'Euler avec des lois de pressions $p_-(u)$ et $p_+(u)$ distinctes (T. Galié)



Défaut d'unicité et sensibilité à la méthode d'approximation lors de la résonance pour des lois de scalaires non convexes (B. Boutin)

Vers une modélisation purement EDP du couplage

**Restaurer l'unicité des solutions du problème couplé
en adoptant une modélisation susceptible de
supporter divers mécanismes de régularisations**

- ▷ Substituer une modélisation EDP à la modélisation géométrique de l'interface (vue comme double frontière)
 - ▷ Munir l'interface de mécanisme de régularisation EDPs
 - ▷ Examiner les questions d'unicité dans le contexte des solutions auto-sensibles (comportement en temps grand des solutions du problème de Cauchy couplé)
-

Modélisation du couplage par un système augmenté

Re-écrire le problème couplé en la variable \mathbf{u} plus une fonction couleur v

$$\begin{aligned}\partial_t \gamma_-(\mathbf{u}) + \partial_x \mathbf{f}_-(\gamma_-(\mathbf{u})) &= 0, \\ v(x) &= -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial_t \gamma_+(\mathbf{u}) + \partial_x \mathbf{f}_+(\gamma_+(\mathbf{u})) &= 0, \\ v(x) &= +1\end{aligned}$$

$\mathbf{u}(0^-, t) = \mathbf{u}(0^+, t)$, $v \in (-1, 1)$ modélisent la transition d'un système à l'autre

Formuler le problème de couplage sur \mathbb{R} tout entier

$$\begin{cases} \mathcal{A}_0(\mathbf{u}, v) \partial_t \mathbf{u} + \mathcal{A}_1(\mathbf{u}, v) \partial_x \mathbf{u} = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R} \\ \partial_t v = 0. \end{cases}$$

avec par exemple

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_0(\mathbf{u}, v) &= \frac{(1-v)}{2} D\gamma_-(\mathbf{u}) + \frac{(1+v)}{2} D\gamma_+(\mathbf{u}), \\ \mathcal{A}_1(\mathbf{u}, v) &= \frac{(1-v)}{2} \nabla f_-(\gamma_-(\mathbf{u})) D\gamma_-(\mathbf{u}) + \frac{(1+v)}{2} \nabla f_+(\gamma_+(\mathbf{u})) D\gamma_+(\mathbf{u}).\end{aligned}$$

Couplage d'équations pour une interface infiniment mince

$$\mathbf{u}_{0(x)}, v_0(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ +1, & x > 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{A}_0(\mathbf{u}, v) \partial_t \mathbf{u} + \mathcal{A}_1(\mathbf{u}, v) \partial_x \mathbf{u} = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R} \\ \partial_t v = 0. \end{cases}$$

$\begin{aligned} \partial_t \gamma_-(\mathbf{u}) + \partial_x \mathbf{f}_-(\gamma_-(\mathbf{u})) &= 0, \\ \partial_t v &= 0 \end{aligned}$	$\begin{aligned} \partial_t \gamma_+(\mathbf{u}) + \partial_x \mathbf{f}_+(\gamma_+(\mathbf{u})) &= 0, \\ \partial_t v &= 0 \end{aligned}$
--	--

$$\mathcal{A}_1(\mathbf{u}, v) D\mathbf{u} = 0$$

Soit en l'absence de résonance :

$$\text{Det}(\mathcal{A}_1(\mathbf{u}, v)) \neq 0 \longrightarrow D\mathbf{u} = 0, \quad \text{i.e.} \quad \mathbf{u}(0^-, t) = \mathbf{u}(0^+, t).$$

les conditions de transmission en \mathbf{u} sont restaurées

Existence de solutions pour le problème de Riemann couplé

Ansatz de Dafermos pour une analyse **asymptotique en temps grand** :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A}_0(\mathbf{u}^\epsilon, v^\epsilon) \partial_t \mathbf{u}^\epsilon + \mathcal{A}_1(\mathbf{u}^\epsilon, v^\epsilon) \partial_x \mathbf{u}^\epsilon = \epsilon t \partial_x (\mathcal{B}(\mathbf{u}^\epsilon, v^\epsilon) \partial_x \mathbf{u}^\epsilon), \quad t > 0, x \in \mathbb{R} \\ \partial_t v^\epsilon = \epsilon^2 t \partial_{xx} v^\epsilon. \end{array} \right.$$

\hookrightarrow solutions auto-semblables : $\xi = x/t$

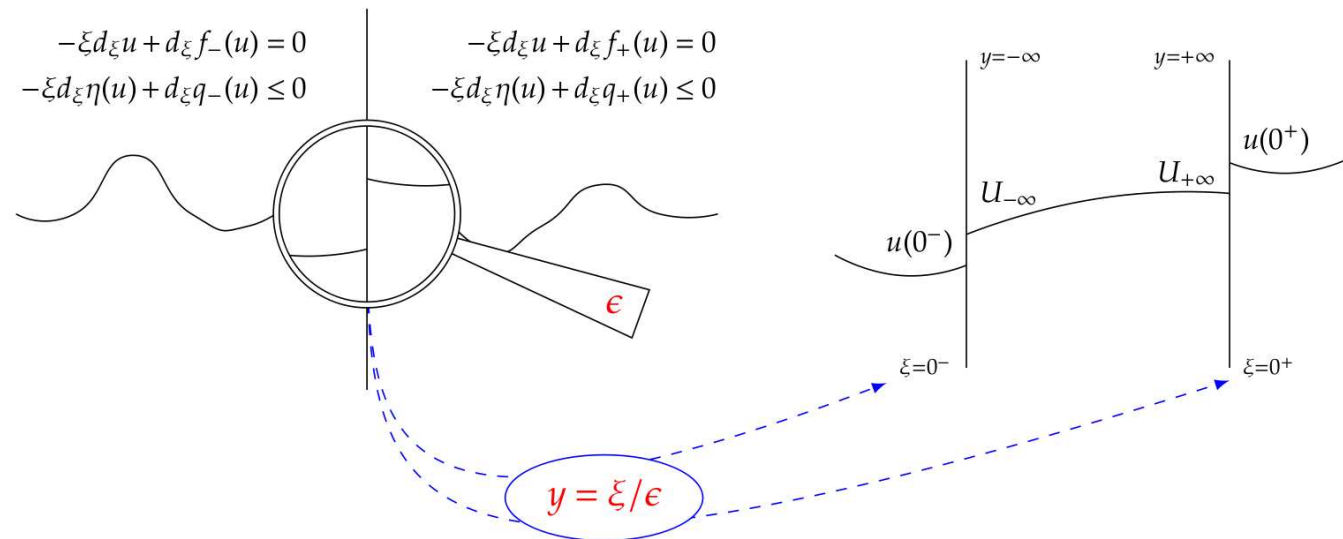
$$\left\{ \begin{array}{l} \left(-\xi \mathcal{A}_0(\mathbf{u}^\epsilon, v^\epsilon) + \mathcal{A}_1(\mathbf{u}^\epsilon, v^\epsilon) \right) d_\xi \mathbf{u}^\epsilon = \epsilon d_\xi (\mathcal{B}(\mathbf{u}^\epsilon, v^\epsilon) d_\xi \mathbf{u}^\epsilon), \quad \xi \in \mathbb{R} \\ -\xi d_\xi v^\epsilon = \epsilon^2 d_{\xi\xi} v^\epsilon, \\ (\mathbf{u}^\epsilon, v^\epsilon)(-\infty) = (\mathbf{u}_L, -1) \quad \text{et} \quad (\mathbf{u}^\epsilon, v^\epsilon)(+\infty) = (\mathbf{u}_R, +1) \end{array} \right.$$

Théorème (B. Boutin, FC, P. LeFloch) *Pour des données \mathbf{u}_L et \mathbf{u}_R suffisamment proches et des hypothèses naturelles sur $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1$ et \mathcal{B} , alors pour tout $\epsilon > 0$ il existe une solution \mathbf{u}^ϵ et des sous-suites extraites $\{\mathbf{u}^\epsilon\}_{\epsilon > 0}$ convergeant simplement vers une limite \mathbf{u} à variation bornée, solution faible auto-semblable et entropique dans chaque demi-espace de*

$$\partial_t \gamma_-(\mathbf{u}) + \partial_x \mathbf{f}_-(\gamma_-(\mathbf{u})) = 0, \quad x < 0, \quad \partial_t \gamma_+(\mathbf{u}) + \partial_x \mathbf{f}_+(\gamma_+(\mathbf{u})) = 0, \quad x > 0.$$

Caractérisation de la Structure Interne de l'Interface

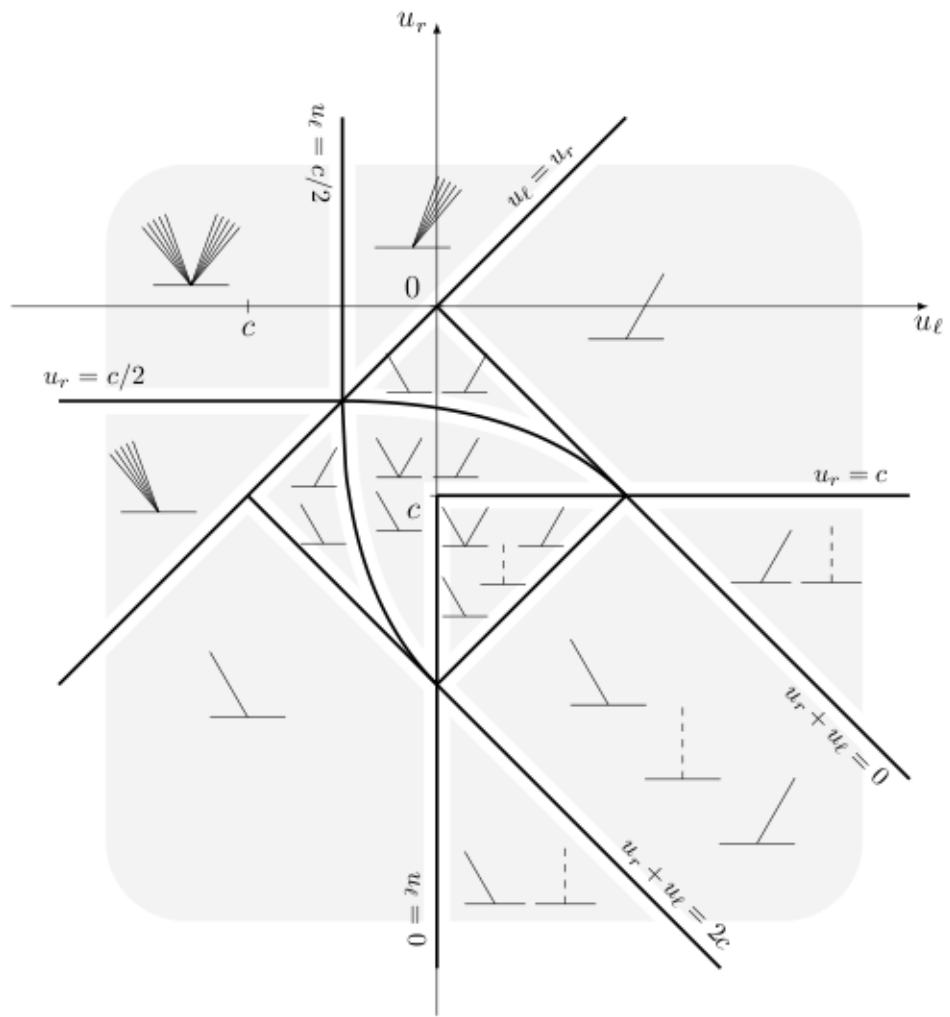
Renormalisation de la solution à l'interface : $\mathcal{U}^\epsilon(y) = \mathbf{u}^\epsilon(\epsilon\xi)$



- ▷ Dénombrement et structure des solutions couplées dans le cadre scalaire (B. Boutin, FC, E. Godlewski)

Non-unicité des solutions auto-semblables limites

- ▷ Exemple : $f_-(w) = w^2/2$, $f_+(w) = (w - c)^2/2$, $c < 0$



Du Défaut d'Unicité des Solutions du Problème de Riemann

Le problème de Riemann gouverne le comportement asymptotique en temps des solutions du problème de Cauchy

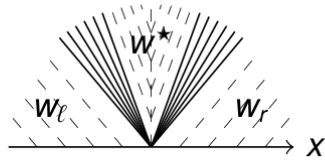
- ▶ Problème de Cauchy pour des données initiales résultant de **perturbations de la fonction couleur**

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A}_0(\mathbf{u}, v) \partial_t \mathbf{u} + \mathcal{A}_1(\mathbf{u}, v) \partial_x \mathbf{u} = 0, \quad t > 0, x \in \mathbb{R} \\ \partial_t v = 0, \\ (\mathbf{u}(0, x), v(0, x)) = (\mathbf{u}_0(x), v_0^\eta(x)), \quad v_0^\eta(x) = \rho^\eta(x) * v_0(x), \quad \eta > 0. \end{array} \right.$$

- ▶ Exploration numérique de la sensibilité des solutions du problème de Cauchy perturbé avec

$$v_0^{\nu, \theta}(x) = \frac{(\text{Erf}(x/\nu + \zeta) + 1)}{2}, \quad \nu \text{ épaisseur}, \quad \zeta \text{ translation}$$

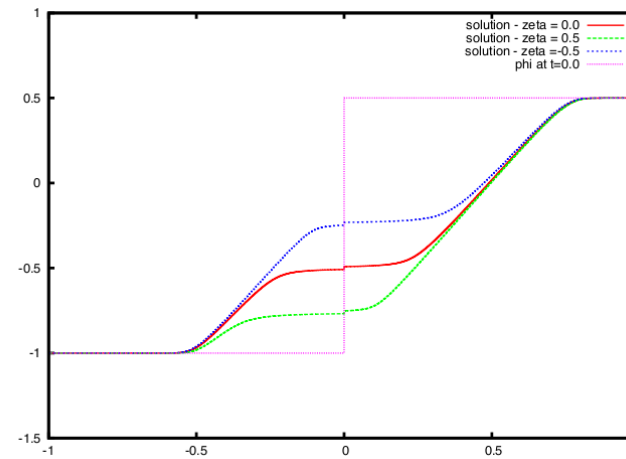
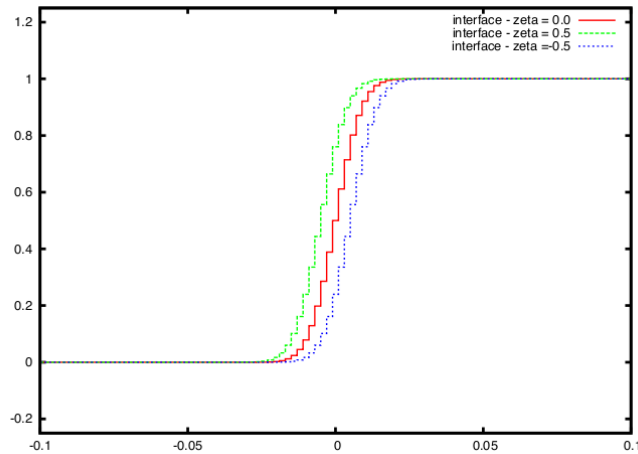
Solutions auto-semblables régulières multiples



Continuum de solutions admissibles

$$w^* \in [w_\ell, w_r]$$

$$v(x) = \frac{\operatorname{erf}(x/\eta + \zeta) + 1}{2}.$$



Solutions auto-semblables discontinues multiples

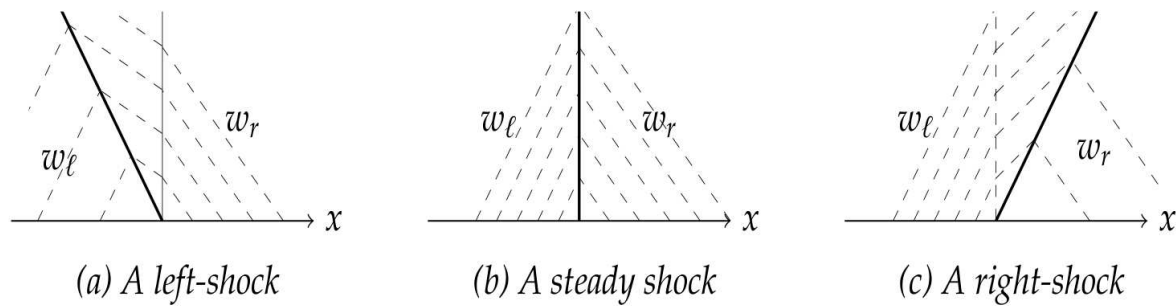


Figure 4.10: Possible solutions for the thick coupling

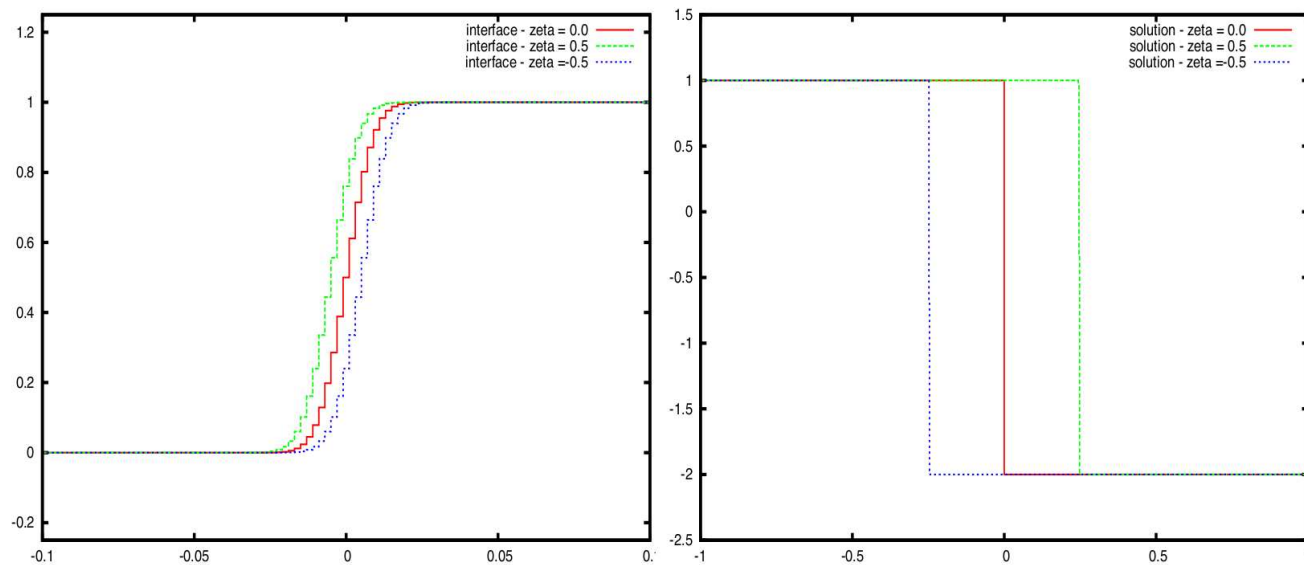


Figure 4.11: Three different interfaces (left) and corresponding solutions (right) - $N = 1000$

Couplage d'équations par interface épaisse

- ▷ Inhomogénéités spatiales **régulières** $v_0^\eta(x) = \rho^\eta(x) * v_0(x)$

$$\mathcal{A}_0(\mathbf{u}, v_0^\eta(x)) \partial_t \mathbf{u} + \mathcal{A}_1(\mathbf{u}, v_0^\eta(x)) \partial_x \mathbf{u} = 0,$$

- ▷ Soit en considérant la nouvelle inconnue

$$\mathbf{w}(x, t) = \frac{(1 - v_0^\eta(x))}{2} \gamma_-(\mathbf{u}(x, t)) + \frac{(1 + v_0^\eta(x))}{2} \gamma_+(\mathbf{u}(x, t))$$

Système de lois de conservation avec inhomogénéités spatiales et terme source **réguliers**

$$\partial_t \mathbf{w} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{w}, v_0^\eta(x)) = \mathbf{l}(\mathbf{w}, v_0^\eta(x)) \frac{d}{dx} v_0^\eta(x)$$

Couplage de lois de conservation scalaire par interface épaisse

Notion usuelle de solutions faibles entropiques

$$\begin{cases} \partial_t w + \partial_x f(w, v_0^\eta(x)) = l(w, v_0^\eta(x)) \frac{d}{dx} v_0^\eta(x), & \mathcal{D}'(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x), \\ \partial_t \mathcal{U}(w) + \partial_x \mathcal{F}(w, v_0^\eta(x)) = \mathcal{L}(w, v_0^\eta(x)) \frac{d}{dx} v_0^\eta(x), \end{cases}$$

pour toute fonction convexe $\mathcal{U}(w)$.

↪ Théorème de Kruzkov pour une LCS avec inhomogénéités Lipschitz-continues

Soit $w_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ et $v_0^\eta \in W^{2,\infty}(\mathbb{R})$,

alors il existe une **unique solution faible entropique**

$w \in L^\infty(\mathbb{R}_t, L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}))$ au problème de Cauchy couplé.

Schéma de Volumes Finis Equilibre : Principes

$$\partial_t w + \partial_x f(w, v) = l(w, v) \frac{d}{dx} v, \quad \text{versus} \quad \mathcal{A}_0(u, v) \partial_t u + \mathcal{A}_1(u, v) \partial_x u = 0.$$

Approcher de manière consistante la loi en w en préservant les équilibres (constance) en u

- ▷ Approximation **non-colocalisée** en u et v avec reconstruction à la Bouchut-Perthame :

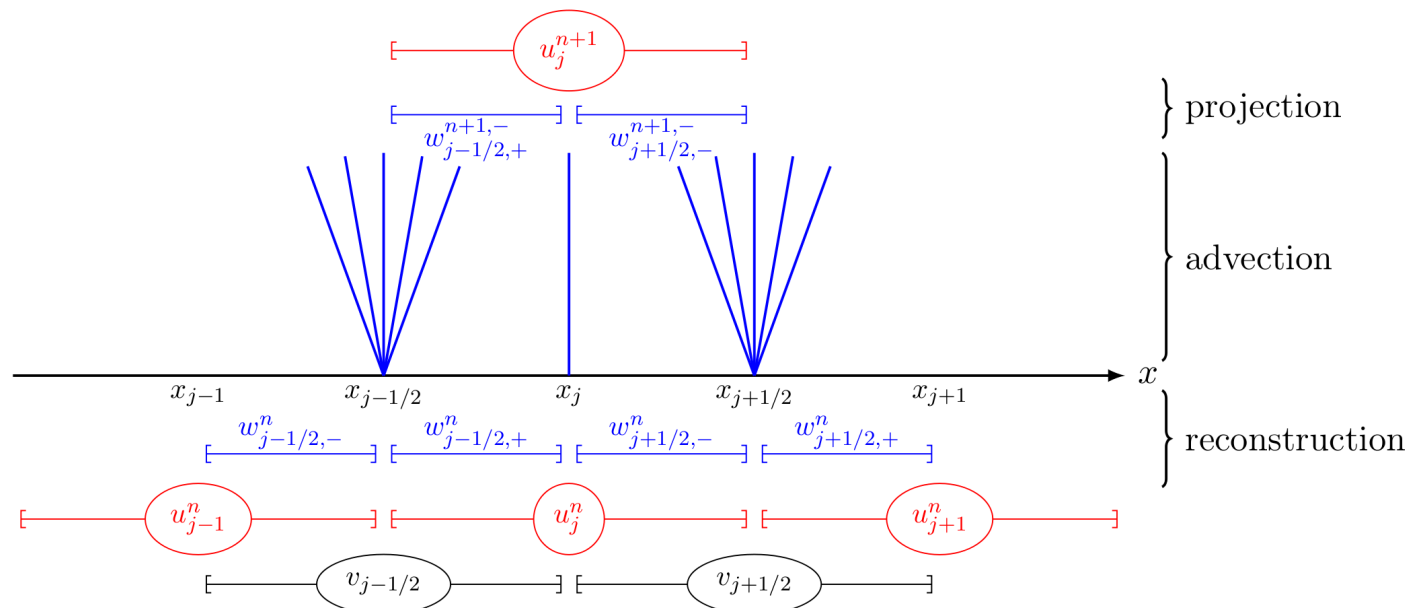
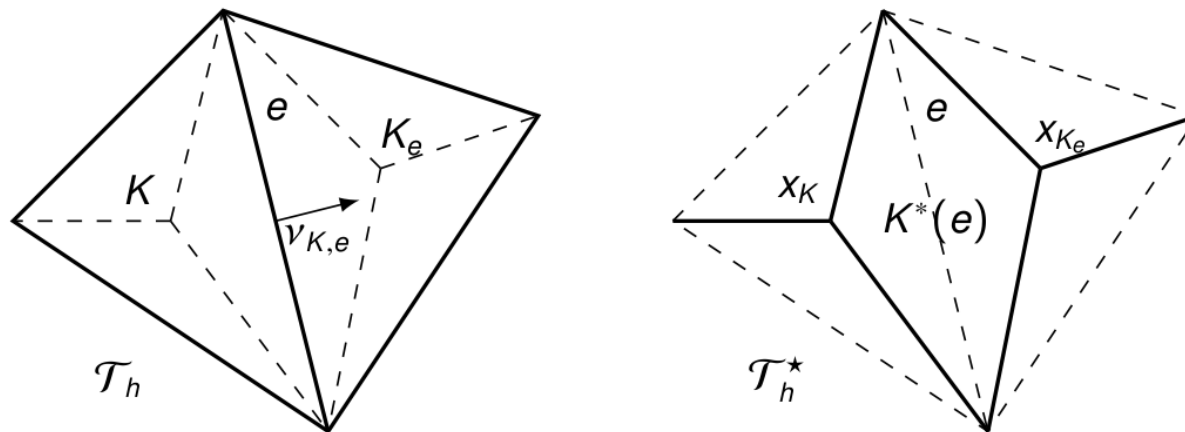


Schéma de Volumes Finis Equilibre Multidimensionnel

- ▷ Formulation par EDP augmentées du couplage multiD très souple : partition générale du domaine avec recouvrement possible
- ▷ Approximation non-colocalisée par des techniques de maillages duaux



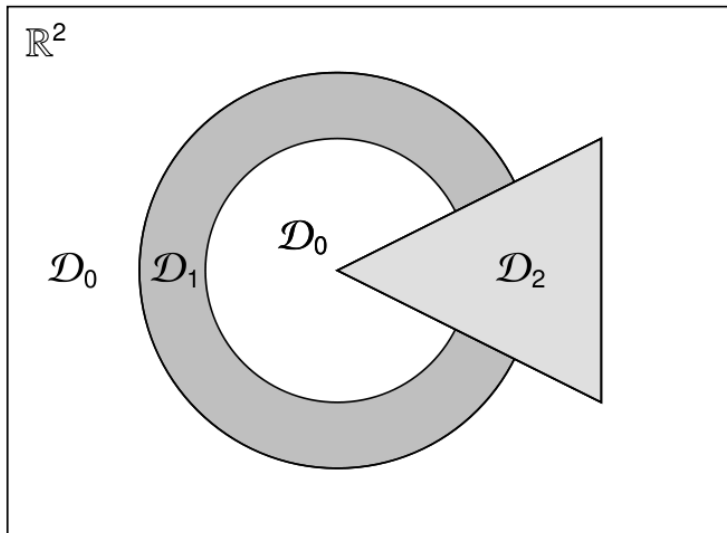
Soit $w_0 \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $v_0 \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^d)$,

alors sous une restriction CFL naturelle, la famille de solutions approchées converge vers l'unique solution Kruzkov

$w \in L^\infty(\mathbb{R}_t, L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d))$ du problème de Cauchy couplé avec interfaces épaisses.

Un problème de couplage 2D avec recouvrement

Configuration géométrique :



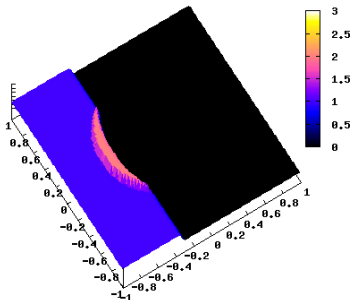
$$\partial_t w + \partial_x f_i(w) = 0, \quad x \in \mathcal{D}_i, \quad i = 0, 1, 2.$$

$$f_0(w) = w^2/2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \theta_0(w) = w,$$

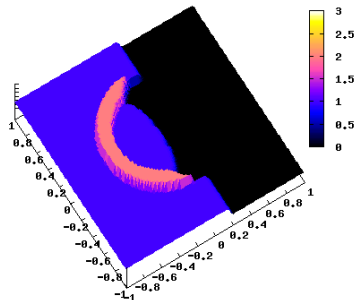
$$f_1(w) = w^2/2 \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \theta_1(w) = w/2,$$

$$f_2(w) = w^2/2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \theta_2(w) = w/3.$$

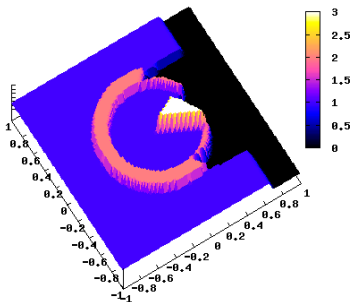
$$\theta_i(w(x^i, t)) = \theta_j(w(x^j, t)), \quad i \neq j.$$



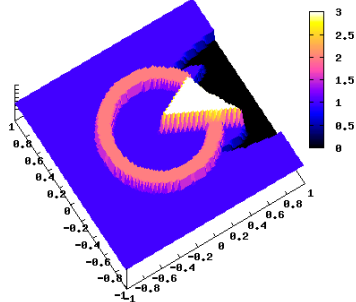
(a) Solution w at $t = 1.0$



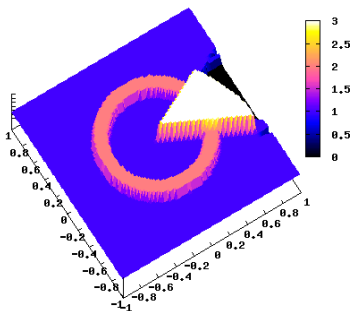
(b) Solution w at $t = 2.0$



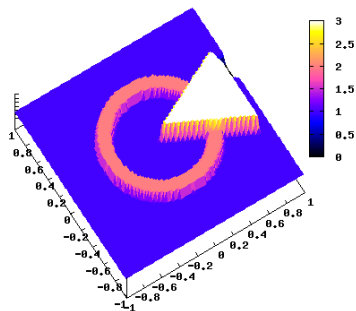
(c) Solution w at $t = 3.0$



(d) Solution w at $t = 4.0$



(e) Solution w at $t = 5.0$



(f) Solution w at $t = 6.0$