Moyennisation d'EDP Stochastiques

Charles-Edouard BREHIER

ENS Cachan, Antenne de Bretagne, IRMAR
Thèse avec A. Debussche and E. Faou

Congrès Smai, mai 2011

Système :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x^\epsilon(t,\xi)}{\partial t} &= \frac{\partial^2 x^\epsilon(t,\xi)}{\partial \xi^2} + f(\xi, x^\epsilon(t,\xi), y^\epsilon(t,\xi)),\\
\frac{\partial y^\epsilon(t,\xi)}{\partial t} &= \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial^2 y^\epsilon(t,\xi)}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\epsilon} g(\xi, x^\epsilon(t,\xi), y^\epsilon(t,\xi)) + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\frac{\partial \omega(t,\xi)}{\partial t},
\end{aligned} \tag{1}$$

$\forall t \geq 0, \xi \in (0,1)$, avec conditions initiales $(x^\epsilon(0,.), y^\epsilon(0,.)) = (x,y)$ et conditions au bord de Dirichlet homogènes.
$\frac{\partial \omega(t,\xi)}{\partial t}$: bruit blanc en temps et en espace.
Le paramètre $\epsilon > 0$ tend vers 0.

Système :

$$\frac{\partial x^\epsilon(t,\xi)}{\partial t} = \frac{\partial^2 x^\epsilon(t,\xi)}{\partial \xi^2} + f(\xi, x^\epsilon(t,\xi), y^\epsilon(t,\xi)),$$
$$\frac{\partial y^\epsilon(t,\xi)}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial^2 y^\epsilon(t,\xi)}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\epsilon} g(\xi, x^\epsilon(t,\xi), y^\epsilon(t,\xi)) + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\frac{\partial \omega(t,\xi)}{\partial t}, \tag{1}$$

$\forall t \geq 0, \xi \in (0,1)$, avec conditions initiales $(x^\epsilon(0,.), y^\epsilon(0,.)) = (x,y)$ et conditions au bord de Dirichlet homogènes.
$\frac{\partial \omega(t,\xi)}{\partial t}$: bruit blanc en temps et en espace.
Le paramètre $\epsilon > 0$ tend vers 0.
Réécriture dans $L^2(0,1)$:

$$dX^\epsilon(t) = (AX^\epsilon(t) + F(X^\epsilon(t), Y^\epsilon(t)))\,dt$$
$$dY^\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon}(BY^\epsilon(t) + G(X^\epsilon(t), Y^\epsilon(t)))\,dt + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} dW(t), \tag{2}$$

W processus de Wiener cylindrique.

Principe de Moyennisation : X^ϵ peut être approximé par $\overline{X}$ défini par

$$\frac{d\overline{X}(t)}{dt} = A\overline{X}(t) + \overline{F}(\overline{X}(t))$$
$$\overline{X}(0) = x.$$

Principe de Moyennisation : X^ϵ peut être approximé par $\overline{X}$ défini par

$$\frac{d\overline{X}(t)}{dt} = A\overline{X}(t) + \overline{F}(\overline{X}(t))$$
$$\overline{X}(0) = x.$$

Types de convergence :

- Sens fort : $\mathbb{E}|X^\epsilon(t) - \overline{X}(t)| = O(\epsilon^{1/2})$.
- Sens faible : $\forall \phi$ fonction test $|\mathbb{E}\phi(X^\epsilon(t)) - \phi(\overline{X}(t))| = O(\epsilon)$.

Principe de Moyennisation : X^ϵ peut être approximé par $\overline{X}$ défini par

$$\frac{d\overline{X}(t)}{dt} = A\overline{X}(t) + \overline{F}(\overline{X}(t))$$
$$\overline{X}(0) = x.$$

Types de convergence :

- Sens fort : $\mathbb{E}|X^\epsilon(t) - \overline{X}(t)| = O(\epsilon^{1/2})$.
- Sens faible : $\forall \phi$ fonction test $|\mathbb{E}\phi(X^\epsilon(t)) - \phi(\overline{X}(t))| = O(\epsilon)$.

Connu en dimension finie (Khasminskii, Freidlin-Wentzell...) ; convergence sans ordre en dimension infinie (Cerrai).

Coefficients linéaires

A partir de (1) : pour $\phi \in H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1) \subset L^2(0,1)$, $A\phi = B\phi = \frac{d^2\phi}{d\xi^2}$.
Plus généralement : A et B opérateurs linéaires non bornés sur H espace de Hilbert séparable, avec :

$$Ae_k = -\lambda_k e_k, \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\lambda := \inf_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k > 0, \lambda_k \to +\infty$$

$$Bf_k = -\mu_k f_k, \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\mu := \inf_{k \in \mathbb{N}} \mu_k > 0, \mu_k \to +\infty, \forall \alpha > 1/2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\mu_k^\alpha} < +\infty.$$

Coefficients linéaires

A partir de (1) : pour $\phi \in H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1) \subset L^2(0,1)$, $A\phi = B\phi = \frac{d^2\phi}{d\xi^2}$.
Plus généralement : A et B opérateurs linéaires non bornés sur H espace de Hilbert séparable, avec :

$$Ae_k = -\lambda_k e_k, \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\lambda := \inf_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k > 0, \lambda_k \to +\infty$$

$$Bf_k = -\mu_k f_k, \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\mu := \inf_{k\in\mathbb{N}} \mu_k > 0, \mu_k \to +\infty, \forall \alpha > 1/2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\mu_k^\alpha} < +\infty.$$

Applications : puissances de $-A$ et semi-groupe $(e^{tA})_{t\geq 0}$: si $x = \sum_k x_k e_k$, $\theta \in [0,1]$,

$$(-A)^\theta x = \sum_k x_k \lambda_k^\theta e_k$$

$$e^{tA} x = \sum_k e^{-\lambda_k t} x_k e_k.$$

Coefficients non linéaires

A partir de (1) : si $x, y \in H$, on pose $F(x,y)(\xi) = f(\xi, x(\xi), y(\xi))$ (opérateur de **Nemytskii**).
Plus généralement : F est bornée et vérifie pour un $\eta \in [0, 1/2[$

- $|D_{.}F(x,y).h| \leq C|h|_H$.
- $|D^2_{..}F(x,y).(h,k)| \leq C|h|_H|k|_{(-A)^\eta}$.

Pour G : mêmes hypothèses + hypothèse gradient :

$$G(x,y) := \nabla_y U(x,y).$$

Coefficients non linéaires

A partir de (1) : si $x, y \in H$, on pose $F(x,y)(\xi) = f(\xi, x(\xi), y(\xi))$ (opérateur de **Nemytskii**).
Plus généralement : F est bornée et vérifie pour un $\eta \in [0, 1/2[$

- $|D_. F(x,y).h| \leq C|h|_H$.
- $|D^2_{..} F(x,y).(h,k)| \leq C|h|_H|k|_{(-A)^\eta}$.

Pour G : mêmes hypothèses + hypothèse gradient :

$$G(x,y) := \nabla_y U(x,y).$$

Stricte dissipativité :

$$L_g := \sup_{x \in H} [G(x,.)]_{\mathrm{Lip}} < \mu.$$

Intégrale stochastique dans H

Sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ on pose

$$W(t) = \sum_k \beta_k(t) q_k,$$

avec $(q_k)_k$ base hilbertienne de H et $(\beta_k)_k$ famille de mouvements browniens standard réels indépendants.

Intégrale stochastique dans H

Sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ on pose

$$W(t) = \sum_k \beta_k(t) q_k,$$

avec $(q_k)_k$ base hilbertienne de H et $(\beta_k)_k$ famille de mouvements browniens standard réels indépendants.
Comme $\dim(H) = +\infty$, cette série ne converge pas dans H, mais seulement dans tout espace K tel que $\Psi : H \subset K$ est un opérateur de **Hilbert-Schmidt** :

$$|\Psi|^2_{\mathcal{L}_2(H,K)} := \sum_{k=0}^{+\infty} |\Psi(q_k)|^2_K < +\infty.$$

Soit $(H,(q_k))$ et $(K,(r_l))$, ainsi que Ψ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{L}(H,K)$.

$$\int_0^T \Psi(s)dW(s) := \sum_{k,l} \int_0^T < \Psi(s)q_k, r_l > d\beta_k(s) r_l$$

est bien définie dans K lorsque $\Psi \in L^2(\Omega \times [0,T]; \mathcal{L}_2(H,K))$.
Propriétés :

$$\mathbb{E} \int_0^T \Psi(s)dW(s) = 0$$

$$\mathbb{E}| \int_0^T \Psi(s)dW(s)|_K^2 = \mathbb{E} \int_0^T |\Psi(s)|_{\mathcal{L}_2(H,K)}^2 ds.$$

Soit $(H,(q_k))$ et $(K,(r_l))$, ainsi que Ψ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{L}(H,K)$.

$$\int_0^T \Psi(s)dW(s) := \sum_{k,l} \int_0^T < \Psi(s)q_k, r_l > d\beta_k(s)r_l$$

est bien définie dans K lorsque $\Psi \in L^2(\Omega \times [0,T]; \mathcal{L}_2(H,K))$.
Propriétés :

$$\mathbb{E}\int_0^T \Psi(s)dW(s) = 0$$

$$\mathbb{E}|\int_0^T \Psi(s)dW(s)|_K^2 = \mathbb{E}\int_0^T |\Psi(s)|_{\mathcal{L}_2(H,K)}^2 ds.$$

Exemple : si $v \in H$, $< v, W(t) >$ est bien définie et on a

$$\mathbb{E}[< v_1, W(t) >< v_2, W(s) >] = t \wedge s < v_1, v_2 > .$$

Convolution stochastique

Pour tout $t \geq 0$, on définit

$$W^B(t) = \int_0^t e^{(t-s)B} dW(s).$$

C'est l'unique solution mild de

$$dZ(t) = BZ(t)dt + dW(t),$$
$$Z(0) = 0.$$

Convolution stochastique

Pour tout $t \geq 0$, on définit

$$W^B(t) = \int_0^t e^{(t-s)B} dW(s).$$

C'est l'unique solution mild de

$$dZ(t) = BZ(t)dt + dW(t),$$
$$Z(0) = 0.$$

Propriétés :

- $W^B(t)$ suit une loi Gaussienne centrée sur H, d'opérateur de covariance $\int_0^t e^{2sB} ds$.
- Pour tout $0 < r < 1/4$, il existe C_r telle que pour tous $t, s > 0$

  $$\mathbb{E}|W^B(t) - W^B(s)|^2 \leq C_r |t-s|^{2r}.$$

  Donc trajectoires r-Holder en temps, $\forall r < 1/4$ (par critère de Kolmogorov).
- En espace : pour tout $0 \leq \gamma < 1/4$, il existe $C(\gamma)$ telle que pour tout $t \geq 0$

  $$\mathbb{E}|(-B)^\gamma W^B(t)|^2 \leq C(\gamma).$$

  Pour plus de régularité en espace : besoin d'hypothèses sur les fonctions de base (f_k).

Solution du système

Dans H, le système s'écrit :

$$dX^\epsilon(t) = (AX^\epsilon(t) + F(X^\epsilon(t), Y^\epsilon(t)))\, dt$$

$$dY^\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon}(BY^\epsilon(t) + G(X^\epsilon(t), Y^\epsilon(t)))\, dt + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} dW(t),$$

avec $X^\epsilon(0) = x$ et $Y^\epsilon(0) = y$.

Proposition

Pour tout $\epsilon > 0$, $T > 0$, $x \in H$, $y \in H$, ce système admet une unique solution mild (X^ϵ, Y^ϵ) :

$$X^\epsilon(t) = e^{tA}x + \int_0^t e^{(t-s)A}F(X^\epsilon(s), Y^\epsilon(s))ds$$

$$Y^\epsilon(t) = e^{\frac{t}{\epsilon}B}y + \frac{1}{\epsilon}\int_0^t e^{\frac{(t-s)}{\epsilon}B}G(X^\epsilon(s), Y^\epsilon(s))ds + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\int_0^t e^{\frac{(t-s)}{\epsilon}B}dW(s).$$

Equation rapide avec composante lente figée

$$\begin{aligned} dY_x(t,y) &= (BY_x(t,y) + G(x, Y_x(t,y)))dt + dW(t) \\ Y_x(0,y) &= y. \end{aligned} \tag{3}$$

Equation rapide avec composante lente figée

$$\begin{aligned} dY_x(t,y) &= (BY_x(t,y) + G(x, Y_x(t,y)))dt + dW(t) \\ Y_x(0,y) &= y. \end{aligned} \tag{3}$$

Contractivité des trajectoires (par stricte dissipativité) : $\forall t \geq 0$, $\forall y, z \in H$,

$$|Y_x(t,y) - Y_x(t,z)| \leq e^{-(\mu - L_g)t}|y - z| \text{ ps.}$$

Equation rapide avec composante lente figée

$$\begin{aligned} dY_x(t,y) &= (BY_x(t,y) + G(x, Y_x(t,y)))dt + dW(t) \\ Y_x(0,y) &= y. \end{aligned} \tag{3}$$

Contractivité des trajectoires (par stricte dissipativité) : $\forall t \geq 0$, $\forall y, z \in H$,

$$|Y_x(t,y) - Y_x(t,z)| \leq e^{-(\mu - L_g)t}|y - z| \text{ ps.}$$

Conséquence : existence et unicité d'une mesure de probabilité invariante, ergodique, notée μ^x ; de plus :

- si $\nu = \mathcal{N}(0, (-B)^{-1}/2)$, alors $\mu^x(dy) = \frac{e^{2U(x,y)}}{Z(x)}\nu(dy)$.
- la convergence vers l'équilibre est exponentielle : si ϕ est Lipschitzienne

$$|\mathbb{E}\phi(Y_x(t,y)) - \int_H \phi(z)\mu^x(dz)| \leq C(x,y)e^{-(\mu - L_g)t}[\phi]_{\text{Lip}}.$$

L'équation moyennée

On pose pour tout $x \in H$

$$\overline{F}(x) = \int_H F(x,y)\mu^x(dy).$$

$\overline{F}$ est bornée, Lipschitzienne.

L'équation moyennée

On pose pour tout $x \in H$

$$\overline{F}(x) = \int_H F(x,y)\mu^x(dy).$$

$\overline{F}$ est bornée, Lipschitzienne.
L'équation moyennée est définie par

$$\frac{d\overline{X}(t)}{dt} = A\overline{X}(t) + \overline{F}(\overline{X}(t)),$$
$$\overline{X}(0) = x.$$

Elle admet une unique solution mild

$$\overline{X}(t) = e^{tA}x + \int_0^t e^{(t-s)A}\overline{F}(\overline{X}(s))ds.$$

Ordres de convergence

Théorème (Ordre fort)

Pour tous $0 < r < 1/2$, $T > 0$, $x \in H$, $y \in H$, il existe $C > 0$ telle que pour tous $\epsilon > 0$ et $0 \leq t \leq T$

$$\mathbb{E}|X^\epsilon(t) - \overline{X}(t)|_H \leq C\epsilon^{1/2-r}. \tag{4}$$

Ordres de convergence

Théorème (Ordre fort)

Pour tous $0 < r < 1/2$, $T > 0$, $x \in H$, $y \in H$, *il existe* $C > 0$ *telle que pour tous* $\epsilon > 0$ *et* $0 \leq t \leq T$

$$\mathbb{E}|X^{\epsilon}(t) - \overline{X}(t)|_H \leq C\epsilon^{1/2-r}. \tag{4}$$

Théorème (Ordre faible)

Pour tous $0 < r < 1$, $T > 0$, $0 < \theta \leq 1$, $x \in D(-A)^{\theta}$, $y \in H$, $\phi \in \mathcal{C}_b^2(H)$, *il existe* $C > 0$, *telle que pour tous* $\epsilon > 0$ *et* $0 \leq t \leq T$

$$|\mathbb{E}[\phi(X^{\epsilon}(t))] - \phi(\overline{X}(t))| \leq C\epsilon^{1-r}. \tag{5}$$

Idées de preuves

Ordre fort : subdivision de $[0,T]$ avec pas $\delta=\sqrt{\epsilon}$.
Sur $[k\delta,(k+1)\delta]$, avec $0\leq k\leq N:=\lfloor\frac{T_0}{\delta}\rfloor$, on pose

$$
\begin{aligned}
d\tilde{X}^{\epsilon}(t) &= (A\tilde{X}^{\epsilon}(t)+F(X^{\epsilon}(k\delta),\tilde{Y}^{\epsilon}(t)))dt\\
d\tilde{Y}^{\epsilon}(t) &= \frac{1}{\epsilon}(B\tilde{Y}^{\epsilon}(t)+G(X^{\epsilon}(k\delta),\tilde{Y}^{\epsilon}(t)))dt+\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}dW(t),
\end{aligned}
$$

avec $\tilde{X}^{\epsilon}(0)=x,\ \tilde{Y}^{\epsilon}(0)=y$, et une condition de continuité en $k\delta$.

Idées de preuves

Ordre fort : subdivision de $[0, T]$ avec pas $\delta = \sqrt{\epsilon}$.
Sur $[k\delta, (k+1)\delta]$, avec $0 \leq k \leq N := \lfloor \frac{T_0}{\delta} \rfloor$, on pose

$$d\tilde{X}^\epsilon(t) = (A\tilde{X}^\epsilon(t) + F(X^\epsilon(k\delta), \tilde{Y}^\epsilon(t)))dt$$
$$d\tilde{Y}^\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon}(B\tilde{Y}^\epsilon(t) + G(X^\epsilon(k\delta), \tilde{Y}^\epsilon(t)))dt + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}dW(t),$$

avec $\tilde{X}^\epsilon(0) = x$, $\tilde{Y}^\epsilon(0) = y$, et une condition de continuité en $k\delta$.

Ordre faible : interprétation via des équations de Kolmogorov et recherche d'un développement en ϵ : si $u^\epsilon(t, x, y) = \mathbb{E}[\phi(X^\epsilon(t))]$

$$u^\epsilon = u_0 + \epsilon u_1 + \text{reste},$$

avec $\frac{\partial}{\partial} u^\epsilon = (\frac{L_1}{\epsilon} + L_2)u^\epsilon$.

La méthode HMM

Objectif : approximer X^ϵ.
Si on connaissait $\overline{F}$: schéma d'Euler

$$\overline{X}_{n+1} = \overline{X}_n + \Delta t A \overline{X}_{n+1} + \Delta t \overline{F}(\overline{X}_n).$$

Principe : utiliser
$\overline{F}(X) = \int_H F(X, y)\mu^X(dy) = \lim_{s\to+\infty} \mathbb{E}[F(X, Y_X(s, y))]$.

La méthode HMM

Objectif : approximer X^{ϵ}.

Si on connaissait $\overline{F}$: schéma d'Euler

$$\overline{X}_{n+1} = \overline{X}_n + \Delta t A \overline{X}_{n+1} + \Delta t \overline{F}(\overline{X}_n).$$

Principe : utiliser

$\overline{F}(X) = \int_H F(X, y)\mu^X(dy) = \lim_{s\to+\infty} \mathbb{E}[F(X, Y_X(s, y))]$.

Macrosolveur :

$$X_{n+1} = X_n + \Delta t A X_{n+1} + \Delta t \tilde{F}_n$$
$$X_0 = x.$$

La méthode HMM (2)

Microsolveur :

$$Y_{n,m+1,j} = Y_{n,m,j} + \frac{\delta t}{\epsilon} B Y_{n,m+1,j} + \frac{\delta t}{\epsilon} G(X_n, Y_{n,m,j}) + \sqrt{\frac{\delta t}{\epsilon}} \chi_{n,m+1,j},$$

La méthode HMM (2)

Microsolveur :

$$Y_{n,m+1,j} = Y_{n,m,j} + \frac{\delta t}{\epsilon} B Y_{n,m+1,j} + \frac{\delta t}{\epsilon} G(X_n, Y_{n,m,j}) + \sqrt{\frac{\delta t}{\epsilon}} \chi_{n,m+1,j},$$

où $\chi_{n,m+1,j} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\delta t}{\epsilon}}} \left(W^{n,j}_{(m+1)\frac{\delta t}{\epsilon}} - W^{n,j}_{m\frac{\delta t}{\epsilon}} \right).$

La méthode HMM (2)

Microsolveur :

$$Y_{n,m+1,j} = Y_{n,m,j} + \frac{\delta t}{\epsilon} B Y_{n,m+1,j} + \frac{\delta t}{\epsilon} G(X_n, Y_{n,m,j}) + \sqrt{\frac{\delta t}{\epsilon}} \chi_{n,m+1,j},$$

où $\chi_{n,m+1,j} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\delta t}{\epsilon}}} (W^{n,j}_{(m+1)\frac{\delta t}{\epsilon}} - W^{n,j}_{m\frac{\delta t}{\epsilon}})$.

On pose

$$\tilde{F}_n = \frac{1}{MN} \sum_{j=1}^{M} \sum_{m=n_T}^{N_m} F(X_n, Y_{n,m,j}),$$

avec des paramètres M, n_T, N, $N_m = n_T + N - 1$.

La méthode HMM (2)

Microsolveur :

$$Y_{n,m+1,j} = Y_{n,m,j} + \frac{\delta t}{\epsilon} B Y_{n,m+1,j} + \frac{\delta t}{\epsilon} G(X_n, Y_{n,m,j}) + \sqrt{\frac{\delta t}{\epsilon}} \chi_{n,m+1,j},$$

où $\chi_{n,m+1,j} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\delta t}{\epsilon}}}\left(W^{n,j}_{(m+1)\frac{\delta t}{\epsilon}} - W^{n,j}_{m\frac{\delta t}{\epsilon}}\right)$.

On pose

$$\tilde{F}_n = \frac{1}{MN} \sum_{j=1}^{M} \sum_{m=n_T}^{N_m} F(X_n, Y_{n,m,j}),$$

avec des paramètres M, n_T, N, $N_m = n_T + N - 1$.

Procédé d'initialisation :

$$Y_{0,0,j} = y$$
$$Y_{n+1,0,j} = Y_{n,N_m,j}.$$

Résultats

Décomposition :

$$\begin{aligned} X^{\epsilon}(n\Delta t) - X_n = & X^{\epsilon}(n\Delta t) - \overline{X}(n\Delta t) \\ & + \overline{X}(n\Delta t) - \overline{X}_n \\ & + \overline{X}_n - X_n. \end{aligned}$$

Résultats

Décomposition :

$$\begin{aligned} X^{\epsilon}(n\Delta t) - X_n = & X^{\epsilon}(n\Delta t) - \overline{X}(n\Delta t) \\ & + \overline{X}(n\Delta t) - \overline{X}_n \\ & + \overline{X}_n - X_n. \end{aligned}$$

Erreur en 3 parties :

- $\epsilon^{1/2-r}$ (fort) ou ϵ^{1-r} (faible) par moyennisation.
- Δt^{1-r} : schéma déterministe.
- $(\frac{\delta t}{\epsilon})^{1/2-r}$: erreur entre mesures invariantes des processus continus et discrets.