

INÉGALITÉS
DE LOG SOBOLEV,
CONCENTRATION ET TOUT
APPROCHE À DEUX ÉCHELLES

Guidel, SMAI 2011, 23 mai

Cédric Villani

Université de Lyon
& Institut Henri Poincaré

THÈMES PRINCIPAUX

- Sobolev logarithmique est en lien **intime** avec la concentration de la mesure
- Approche fonctionnelle de problèmes probabilistes, e.g. limites hydrodynamiques de systèmes de particules
- Grandes déviations
- Grande dimension

Deux articles

- Otto–V. (*J. Funct. Anal.* 2000)
- Grunewald–Otto–V.–Westdickenberg (*Ann. IHP Prob-Statist.* 2009)

En préparation : Menz–Otto ; Fathi

Inégalité de Sobolev logarithmique

μ , mesure de probabilité de référence, vérifie **LSI**(ρ) si pour toute densité de proba f ,

$$\int f \log f \, d\mu \leq \frac{1}{2\rho} \int \frac{|\nabla f|^2}{f} \, d\mu$$

Inégalité de Sobolev logarithmique

μ , mesure de probabilité de référence, vérifie **LSI**(ρ) si pour toute densité de proba f ,

$$\int f \log f \, d\mu \leq \frac{1}{2\rho} \int \frac{|\nabla f|^2}{f} \, d\mu$$

LSI se tensorise :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_1 \quad \text{LSI}(\rho_1) \\ \mu_2 \quad \text{LSI}(\rho_2) \end{array} \right\} \implies \mu_1 \otimes \mu_2 \quad \text{LSI}(\min(\rho_1, \rho_2))$$

\implies se comporte bien en grande dimension

Concentration de la mesure

(\mathcal{X}, d, ν) un espace métrique probabilisé

$A \subset \mathcal{X}$ avec $\nu[A] \geq 1/2$ (par exemple)

Alors $\nu[A^r] \geq 1 - \varepsilon(r)$, $\varepsilon(r) \rightarrow 0$ quand $r \rightarrow \infty$

$$A^r = \left\{ x \in \mathcal{X}; d(x, A) \leq r \right\}$$

(En agrandissant un ensemble de mesure positive, on **envahit** l'espace entier)

Formulation équivalente : pour toute fonction f
1-Lipschitz (p.ex.)

$$\nu \left[\left\{ x \in \mathcal{X}; f(x) \geq m + r \right\} \right] \leq \varepsilon(r)$$

$m =$ médiane ou moyenne

Sur la concentration de la mesure

Nombreuses applications (Lévy, Milman, Gromov, Talagrand...)

Référence : [Ledoux] (AMS, 2001)

Deux grands types de concentration :

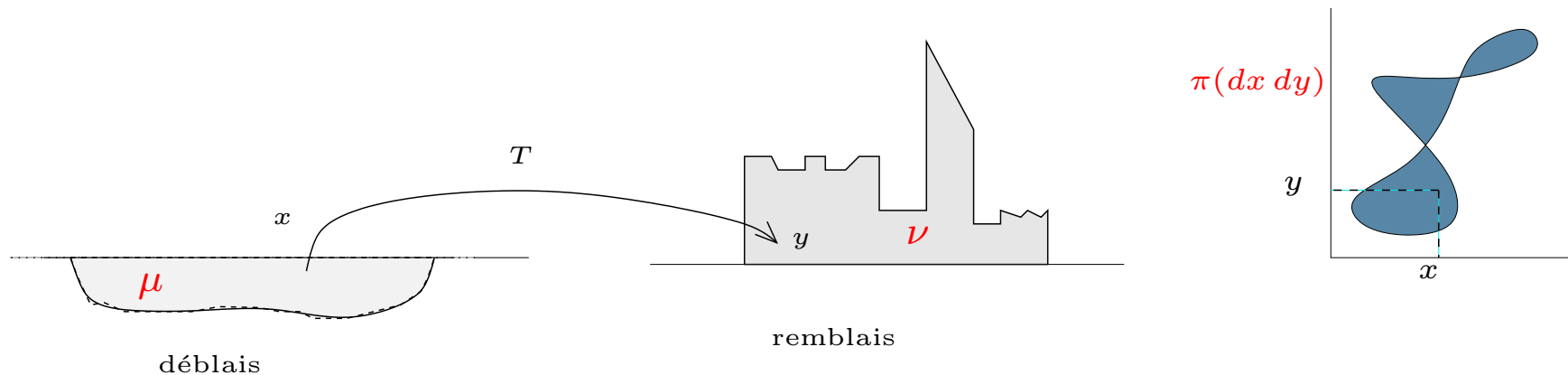
- gaussienne $\varepsilon(r) \simeq e^{-cr^2}$
- exponentielle $\varepsilon(r) \simeq e^{-cr}$ (pour $r \gg 1$)

Transport optimal

μ, ν deux mesures de proba, $c(x, y)$ fonction de coût

$\Pi(\mu, \nu) =$ ensemble des probas jointes de marginales μ, ν

$$C(\mu, \nu) = \inf_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \int c(x, y) \pi(dx dy)$$



Ex : $c(x, y) = |x - y|^2 \implies$ corrélation maximale

Référence : *Optimal transport, old and new* (2008)

Concentration via le transport optimal

(\mathcal{X}, d, ν) espace de probabilité (polonais)

Fait : On peut encoder des principes de concentration par des **inégalités de transport-énergie**

$$\forall \mu \in P(\mathcal{X}), \quad C(\mu, \nu) \leq \Phi(U_\nu(\mu))$$

Intuition

Prenons $\mu_A = \frac{1_A \nu}{\nu[A]}$, alors le m. droite contrôle le volume de A , le m. gauche quantifie la facilité à envahir l'espace entier, partant de A

Pionniers : Marton, Talagrand

Référence : [oldnew, Chap. 22]

Inégalités T_p

(\mathcal{X}, d, ν) vérifie $T_p(K)$ ($K > 0$) si

$$(T_p) \quad \forall \mu \in P(\mathcal{X}), \quad W_p(\mu, \nu) \leq \sqrt{\frac{2 H_\nu(\mu)}{K}}$$

$$H_\nu(\mu) = \int \rho \log \rho d\nu \quad \rho = \frac{d\mu}{d\nu}$$

$$W_p(\mu, \nu) = \inf \left\{ \int d(x, y)^p \pi(dx dy); \pi \in \Pi(\mu, \nu) \right\}^{1/p}$$

(distance p -Wasserstein)

T_p implique concentration gaussienne

$$\nu[A] \geq \frac{1}{2} \quad B = \mathcal{X} \setminus (A^r)$$

- $W_p(\mu_A, \mu_B) \geq r$

- $$\begin{aligned} W_p(\mu_A, \mu_B) &\leq W_p(\mu_A, \nu) + W_p(\mu_B, \nu) \\ &\leq C \left(\sqrt{H_\nu(\mu_A)} + \sqrt{H_\nu(\mu_B)} \right) \\ &= C \left(\sqrt{\log \frac{1}{\nu[A]}} + \sqrt{\log \frac{1}{1 - \nu[A^r]}} \right) \end{aligned}$$

$$\implies \nu[A^r] \geq 1 - e^{-cr^2}$$

Sur les inégalités (T_p)

- Approche **fonctionnelle** de la concentration de la mesure
- Implique un bon contrôle des p -moments par entropie
- Se renforce quand p augmente
- $p = 2$ est critique car (T_2) **préservé par tensorisation** :
 (\mathcal{X}, d, ν) sat. $T_2(K) \implies (\mathcal{X}^N, d_2^{(N)}, \nu^{\otimes N})$ aussi
- ... Donc T_2 fournit **concentration sans dimension**

- $(T_1) \iff \int e^{a d(x_0, x)^2} \nu(dx) < +\infty$

- (T_2) plus mystérieux. Talagrand prouve $T_2(1)$ pour la mesure gaussienne standard

Thm Otto–Villani (1999)

$$\text{LSI}(K) \implies T_2(K)$$

$$\left[\forall \mu \quad H_\nu(\mu) \leq \frac{I_\nu(\mu)}{2K} \right]$$

$$\implies \left[\forall \mu \quad W_2(\mu, \nu) \leq \sqrt{\frac{2 H_\nu(\mu)}{K}} \right]$$

$$H_\nu(\mu) = \int \rho \log \rho \, d\nu \quad I_\nu(\mu) = \int \frac{|\nabla \rho|^2}{\rho} \, d\nu$$

Quel intérêt ?

- LSI est “locale” \implies facile à perturber

Ex : Si ν vérifie LSI alors aussi $e^{-v} \nu$, si v est borné

- Tous critères pour LSI s'appliquent

Parenthèse : Développements inattendus

À partir de ce problème, Otto–V développent l'étude de la géométrie “riemannienne” de l'espace de Wasserstein ($P_2(M) :=$ mesures de proba avec distance W_2)

- “calcul d'Otto” = calcul diff (formel) sur $P_2(M)$
- Étude de condition $\text{CD}(K, N) : \nu = e^{-V}$ vol sur (M, g)
 $\longrightarrow \text{Ric} + \nabla^2 V - \frac{\nabla V \otimes \nabla V}{N-n} \geq K g$
- Nous conjecturons : $\text{CD}(0, \infty) \iff$ Fonctionnelle H de Boltzmann est (géodésiquement) convexe dans $P_2(M)$
 \implies point de départ pour la future théorie synthétique des bornes de Ricci dans des espaces métriques mesurés :
..... Sturm (*Acta Math.* 2006)
Lott–V. (*Ann. Math.* 2009)....

Preuves du Thm d'Otto–V.

Trois arguments complètement différents sont connus :

- **méthode du semigroupe de la chaleur** (Otto–V) : OK sur variété riemannienne avec courbure de Ricci minorée
- **méthode du semigroupe de Hamilton–Jacobi** (Bobkov–Gentil–Ledoux) : OK sur espace géodésique vérifiant inégalités de doublement et Poincaré localement (Lott–V.)
- **méthode de grandes déviations** (Gozlan) : OK sur n'importe quel espace polonais !

Rappel : Théorème de Sanov

Traduction mathématique de la [formule de Boltzmann](#)

x_1, x_2, \dots (“v.a. microscopiques”) i.i.d. de loi ν ;

$$\hat{\mu}^N := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{x_i} \text{ (mesure aléatoire, “empirique”)}$$

Quelle mesure observerons-nous ??

Rappel : Théorème de Sanov

Traduction mathématique de la **formule de Boltzmann**

x_1, x_2, \dots (“v.a. microscopiques”) i.i.d. de loi ν ;

$$\hat{\mu}^N := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{x_i} \text{ (mesure aléatoire, “empirique”)}$$

Quelle mesure observerons-nous ??

Informel : $\mathbb{P} [\hat{\mu}^N \simeq \mu] \sim e^{-N H_\nu(\mu)}$

Rappel : Théorème de Sanov

Traduction mathématique de la [formule de Boltzmann](#)

x_1, x_2, \dots (“v.a. microscopiques”) i.i.d. de loi ν ;

$$\hat{\mu}^N := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{x_i} \text{ (mesure aléatoire, “empirique”)}$$

Quelle mesure observerons-nous ??

Informel : $\mathbb{P} [\hat{\mu}^N \simeq \mu] \sim e^{-N H_\nu(\mu)}$

Rigoureux : $H_\nu(\mu) = \lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{N \rightarrow \infty}$

$$- \frac{1}{N} \log \mathbb{P}_{\nu^{\otimes N}} \left[\left\{ \forall j \leq k, \left| \frac{\varphi_j(x_1) + \dots + \varphi_j(x_N)}{N} - \int \varphi_j d\mu \right| < \varepsilon \right\} \right]$$

Rappel : Théorème de Sanov

Traduction mathématique de la [formule de Boltzmann](#)

x_1, x_2, \dots (“v.a. microscopiques”) i.i.d. de loi ν ;

$$\hat{\mu}^N := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{x_i} \text{ (mesure aléatoire, “empirique”)}$$

Quelle mesure observerons-nous ??

Informel : $\mathbb{P} [\hat{\mu}^N \simeq \mu] \sim e^{-N H_\nu(\mu)}$

Rigoureux : $H_\nu(\mu) = \lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{N \rightarrow \infty}$

$$- \frac{1}{N} \log \mathbb{P}_{\nu^{\otimes N}} \left[\left\{ \forall j \leq k, \left| \frac{\varphi_j(x_1) + \dots + \varphi_j(x_N)}{N} - \int \varphi_j d\mu \right| < \varepsilon \right\} \right]$$

$“S = k \log W”$

$$S = k \cdot \log W$$



LVDWIG
BOLTZMANN
1844 - 1906

DR PHIL. PAUL
BOLTZMANN
GEB. CHIARI
1891 - 1977



Esquisse de la preuve par Gozlan du thm Otto–V

(On renverse tout : concentration implique T_2 !)

Étape 1

Bien connu (Herbst, Ledoux, Bobkov...)

$$\begin{aligned} (\mathcal{X}, d, \nu) \text{ sat. LSI}(K) &\implies (\mathcal{X}^N, d_2^{(N)}, \nu^{\otimes N}) \text{ sat. LSI}(K) \\ &\implies \text{concentration gaussienne dans } \mathcal{X}^N \end{aligned}$$

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad \forall f \in \text{Lip}(\mathcal{X}^N, d_2^{(N)}),$$

$$\nu^{\otimes N} \left[\left\{ x \in \mathcal{X}^N; f(x) \geq m + r \right\} \right] \leq e^{-\frac{K r^2}{2 \|f\|_{\text{Lip}}^2}}$$

Étape 2

Soit $f_N : (\mathcal{X}^N, d_2^{(N)}) \longrightarrow \mathbb{R}$ défini par

$$f_N(x) = W_2(\hat{\mu}_x^N, \nu) \quad \hat{\mu}_x^N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{x_i}$$

$$\|f_N\|_{\text{Lip}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \implies \nu^{\otimes N} [f_N \geq m_N + r] \leq e^{-\frac{K N r^2}{2}}$$

Étape 3

- Partons de $\nu^{\otimes N} [f_N \geq m_N + r] \leq e^{-\frac{K N r^2}{2}}$

Quand $N \rightarrow \infty$, $\hat{\mu}_x^N \rightarrow \nu$ p.s. (Varadarajan), donc $m_N \rightarrow 0$

$$\implies \liminf_{N \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{N} \log \nu^{\otimes N} [W_2(\hat{\mu}_x^N, \nu) \geq r] \right) \geq \frac{K r^2}{2}$$

- Comparer à **Sanov** :

$$\begin{aligned} \limsup_{N \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{N} \log \nu^{\otimes N} [W_2(\hat{\mu}_x^N, \nu) \geq r] \right) \\ \leq \inf_{\mu} \left\{ H_{\nu}(\mu); W_2(\mu, \nu) > r \right\} \end{aligned}$$

- Donc $[W_2(\mu, \nu) > r] \implies [H_{\nu}(\mu) \geq K r^2 / 2]$, cqfd

Chaîne d'inégalités fonctionnelles

$$\begin{array}{ccccccc} \text{CD}(K, \infty) & \implies & (\text{LS}) & \implies & (T_2) & \implies & (\text{P}) \implies (\text{exp}_1) \\ & & & & \Downarrow & & \\ & & & & (T_1) & \iff & (\text{exp}_2) \implies (\text{exp}_1) \end{array}$$

$(T_1) \iff (\mathcal{X}, d, \nu)$ profil de concentration gaussienne e^{-cr^2}

$(T_2) \iff (\mathcal{X}^N, d_2^{(N)}, \nu^{\otimes N})$ profil gaussien e^{-cr^2} , $\forall N$
(concentration gaussienne sans dimension)

Beaucoup d'autres inégalités, e.g.

- Concentration exponentielle : coût de transport quadratique-linéaire $c_{q\ell}(x, y) = \min(d(x, y), d(x, y)^2)$
- **HWI** : $\text{CD}(0, \infty) \implies H_\nu(\mu) \leq W_2(\mu, \nu) \sqrt{I_\nu(\mu)}$

Et maintenant...

QUE FAIRE de toutes ces inégalités ??

Développons un exemple “important” ...

Le système de particules de Ginzburg–Landau

Un “spin” se transmet par processus de dérive-diffusion conservative entre sites d’un réseau (dynamique de Kawasaki)

$$(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N \quad (x_j \simeq x(j/N))$$

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dW^{(i,i+1)}}{dt} - \frac{dW^{(i-1,i)}}{dt} + \psi'(x_{i-1}) - 2\psi'(x_i) + \psi'(x_{i+1})$$

Le système de particules de Ginzburg–Landau

Un “spin” se transmet par processus de dérive-diffusion conservative entre sites d’un réseau (dynamique de Kawasaki)

$$(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N \quad (x_j \simeq x(j/N))$$

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dW^{(i,i+1)}}{dt} - \frac{dW^{(i-1,i)}}{dt} + \psi'(x_{i-1}) - 2\psi'(x_i) + \psi'(x_{i+1})$$

- $\sum x_i = \text{const.}$

Le système de particules de Ginzburg–Landau

Un “spin” se transmet par processus de dérive-diffusion conservative entre sites d’un réseau (dynamique de Kawasaki)

$$(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N \quad (x_j \simeq x(j/N))$$

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dW^{(i,i+1)}}{dt} - \frac{dW^{(i-1,i)}}{dt} + \psi'(x_{i-1}) - 2\psi'(x_i) + \psi'(x_{i+1})$$

- $\sum x_i = \text{const.}$
- Typiquement $\psi = \text{potentiel double puits}$

Le système de particules de Ginzburg–Landau

Un “spin” se transmet par processus de dérive-diffusion conservative entre sites d’un réseau (dynamique de Kawasaki)

$$(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N \quad (x_j \simeq x(j/N))$$

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dW^{(i,i+1)}}{dt} - \frac{dW^{(i-1,i)}}{dt} + \psi'(x_{i-1}) - 2\psi'(x_i) + \psi'(x_{i+1})$$

- $\sum x_i = \text{const.}$
- Typiquement $\psi =$ potentiel double puits
- Comparer : dérive-diffusion sans échange :

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dW^{(i)}}{dt} - \psi'(x_i)$$

Équation dans l'espace des mesures

Espace des phases : $X_{N,0} = \{(x_1, \dots, x_N); \sum x_i = 0\}$

Mesure invariante :

$$\mu_N = \frac{\exp\left(-\sum_{i=1}^N \psi(x_i)\right)}{Z} \mathcal{H}^{N-1} \lfloor_{X_{N,0}}$$

Matrice de la dynamique :

$$A_{ij} = N^2(-\delta_{i,j-1} + 2\delta_{i,j} - \delta_{i,j+1})$$

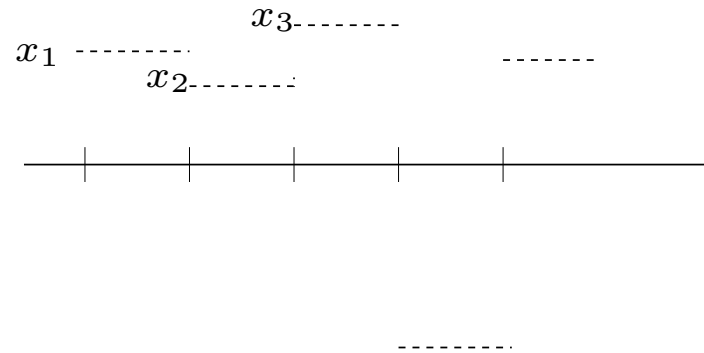
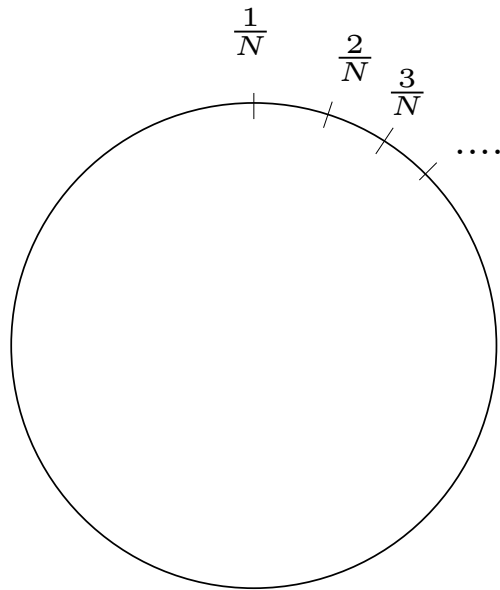
(-Laplacien discret \implies pénalise fluctuations)

Inconnue : $f(t, x_1, \dots, x_N)$ densité dans espace des phases

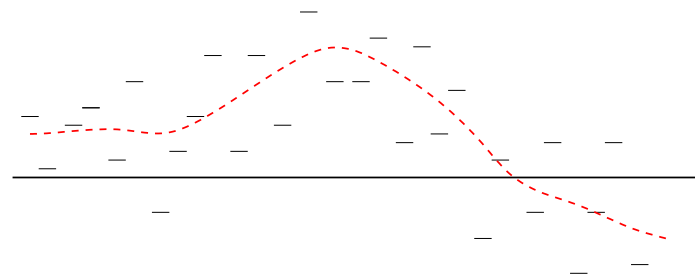
Équation : $\frac{\partial}{\partial t}(f\mu) = \nabla \cdot (A \nabla f \mu)$

Limite hydrodynamique

$(x_1, \dots, x_N) \longrightarrow$ (constant p.m., aléatoire) fonction $\bar{x}(\theta)$,
 $\theta \in \mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$



Question : Limite de \bar{x} quand $N \rightarrow \infty$, en topologie faible



Limite hydrodynamique : résultat principal

$$(a) \quad \psi = \frac{x^2}{2} + \delta\psi, \quad \|\delta\psi\|_{C^2} < +\infty$$

$$(b) \quad \int f_0 \log f_0 d\mu_N = O(N)$$

$$(c) \quad \exists \zeta_0 \in L^2(\mathbb{T}); \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \int \|\bar{x} - \zeta_0\|_{H^{-1}}^2 f_0(x) \mu_N(x) = 0$$

$$\text{Alors} \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{N \rightarrow \infty} \int \|\bar{x} - \zeta(t, \cdot)\|_{H^{-1}}^2 f(t, x) \mu_N(x) = 0 \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \Delta \varphi'(\zeta) \end{array} \right.$$

Limite hydrodynamique : résultat principal

$$(a) \psi = \frac{x^2}{2} + \delta\psi, \quad \|\delta\psi\|_{C^2} < +\infty$$

$$(b) \int f_0 \log f_0 d\mu_N = O(N)$$

$$(c) \exists \zeta_0 \in L^2(\mathbb{T}); \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \int \|\bar{x} - \zeta_0\|_{H^{-1}}^2 f_0(x) \mu_N(x) = 0$$

$$\text{Alors} \left\{ \begin{array}{l} \lim_{N \rightarrow \infty} \int \|\bar{x} - \zeta(t, \cdot)\|_{H^{-1}}^2 f(t, x) \mu_N(x) = 0 \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \Delta \varphi'(\zeta) \end{array} \right.$$

$$\varphi = \text{Cramér}(\psi) = (\log \text{Laplace})^*(\psi)$$

$$\varphi(m) = \sup_{p \in \mathbb{R}} \left\{ p m - \log \int_{\mathbb{R}} e^{px} e^{-\psi(x)} dx \right\}$$

Remarques

- Limite hydro déjà prouvée par Guo–Papanicolaou–Varadhan pour des ψ plus généraux
- mais ce résultat entièrement quantitatif (bornes d'erreur)

Remarques

- Limite hydro déjà prouvée par Guo–Papanicolaou–Varadhan pour des ψ plus généraux
- mais ce résultat entièrement quantitatif (bornes d'erreur)
- Deux méthodes principales auparavant : GPV (non quantitative) et méthode d'entropie relative de Yau (inégalité de Gronwall en entropie : plus explicite, mais suppose Gibbs Local)
 - Nous utilisons une **troisième méthode**, à la fois quantitative et moins restrictive sur la donnée initiale : **Gronwall en distance de Wasserstein**
 - Techniquement, utilise log Sobolev et inégalités de concentration

Premier ingrédient principal

$$\Theta(t) := \frac{1}{N} \int \left\| A^{-1/2}(x - \eta(t)) \right\|^2 f(t, x) \mu_N(dx)$$

$\eta(t)$: profil “lentement variable” obtenu par approximation de la limite hydro ζ

$$\implies \Theta(t) \simeq W_{2; A^{-1}}(f(t)\mu_N, \delta_{\zeta(t)})^2$$

.... Gronwall sur Θ

Deuxième ingrédient principal

Bien connu : Il y a une échelle **microscopique** et une échelle **macroscopique**

$$Px = y \ni Y, \quad y_j = \frac{1}{K} \sum_{i=(j-1)K+1}^{jK} x_i$$

Nous utilisons

- la dynamique pénalise les fluctuations microscopiques

$$\|(\text{Id} - NP^t P)x\|^2 \leq \frac{C \langle x, Ax \rangle}{(\dim Y)^2}$$

- “convexité uniforme” à échelle macro

Ce dernier ingrédient est bien capturé par **Log Sobolev**

LSI avec loi de conservation

$\psi \in C^2(\mathbb{R})$, $\psi'' \geq K > 0$ for $|x| \leq R$

- $\frac{e^{-\psi} dx}{Z}$ LSI (Bakry–Émery + Holley–Stroock)
- $\frac{e^{-\sum \psi(x_i)} dx}{Z}$ LSI uniforme en N (tensorisation)
- $\frac{e^{-\sum \psi(x_i)} \mathcal{H}^{N-1}(dx) \lfloor_{\sum x_i=0}}{Z}$ LSI uniforme en N ??

LSI avec loi de conservation

$\psi \in C^2(\mathbb{R})$, $\psi'' \geq K > 0$ for $|x| \leq R$

- $\frac{e^{-\psi} dx}{Z}$ LSI (Bakry–Émery + Holley–Stroock)
- $\frac{e^{-\sum \psi(x_i)} dx}{Z}$ LSI uniforme en N (tensorisation)
- $\frac{e^{-\sum \psi(x_i)} \mathcal{H}^{N-1}(dx) \lfloor_{\sum x_i=0}}{Z}$ LSI uniforme en N ??

Oui si $\psi(x) = x^2 + (C^2\text{-borné})$ (Landim–Panizo–Yau, Chafaï)

Preuve alternative par GOVW

Échelles micro et macro

X, Y deux espaces euclidiens, $P : X \rightarrow Y$, $PNP^t = \text{Id}$

($P =$ projection micro \rightarrow macro)

$$\mu(dx) = e^{-H(x)} dx \text{ sur } X$$

Désintégration $\longrightarrow \mu(dx) = \mu(dx|y) \bar{\mu}(dy)$

$$\bar{\mu}(dy) = e^{-N\bar{H}(y)} dy \quad (\bar{H} = \text{hamiltonien macroscopique})$$

Macro/micro décomposition d'un profil x :

$$x = NP^t P x + (\text{Id} - NP^t P)x$$

(induit une décomposition des gradients)

Mariage des log Sobolev micro et macro

Thm (GOVW) : Si

(a) $\langle \nabla^2 H(x) \cdot u, v \rangle \leq \kappa |u| |v|,$

$u \in \text{Range}(NP^tP), v \in \text{Range}(\text{Id} - NP^tP)$

(b) $\mu(dx|y)$ satisfait $\text{LSI}(\rho)$ pour tout y

(c) $\bar{\mu}$ satisfait $\text{LSI}(\lambda N)$

Mariage des log Sobolev micro et macro

Thm (GOVW) : Si

(a) $\langle \nabla^2 H(x) \cdot u, v \rangle \leq \kappa |u| |v|,$

$u \in \text{Range}(NP^tP), v \in \text{Range}(\text{Id} - NP^tP)$

(b) $\mu(dx|y)$ satisfait $\text{LSI}(\rho)$ pour tout y

(c) $\bar{\mu}$ satisfait $\text{LSI}(\lambda N)$

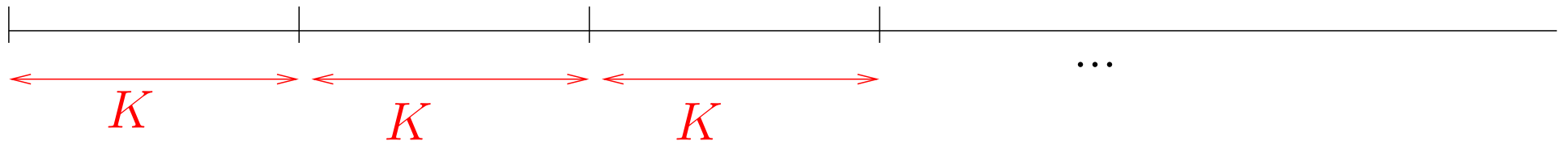
Alors μ satisfait $\text{LSI}(\hat{\rho})$ avec

$$\hat{\rho} := \frac{1}{2} \left(\rho + \lambda + \frac{\kappa^2}{\rho} - \sqrt{\left(\rho + \lambda + \frac{\kappa^2}{\rho} \right)^2 - 4\rho\lambda} \right) > 0$$

Rq : $\kappa = 0$ redonne le principe de tensorisation (optimal)

Application

$$\text{Disons } N = MK \quad Px = y \quad y_j = \frac{1}{K} \sum_{i=(j-1)K+1}^{jK} x_i$$



$$X = \left\{ (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N; \frac{1}{N} \sum x_i = m \right\}$$

$$Y = \left\{ (x_1, \dots, x_M) \in \mathbb{R}^M; \frac{1}{M} \sum y_j = m \right\}$$

Application

$$\text{Disons } N = MK \quad Px = y \quad y_j = \frac{1}{K} \sum_{i=(j-1)K+1}^{jK} x_i$$



$$X = \left\{ (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N; \frac{1}{N} \sum x_i = m \right\}$$

$$Y = \left\{ (x_1, \dots, x_M) \in \mathbb{R}^M; \frac{1}{M} \sum y_j = m \right\}$$

Pour K grand mais fixé,

- LSI micro, indépendante de N (Holley–Stroock + tensorisation)
- \bar{H} unif. convexe $\implies \bar{\mu}$ LSI(λN) (Bakry–Émery)

Convexification (“renormalisation”)

$$\begin{aligned} f_K(m) &= \frac{1}{Z_K} \int e^{-\sum \psi(x_i)} \mathcal{H}^{K-1}(dx) \\ &= \text{densité de } m = (x_1 + \dots + x_K)/K \end{aligned}$$

Thm de Cramér : $-\frac{1}{K} \log \int_a^b f_K(m) dm \xrightarrow{K \rightarrow \infty} \inf_{[a,b]} \varphi$

Convexification (“renormalisation”)

$$\begin{aligned} f_K(m) &= \frac{1}{Z_K} \int e^{-\sum \psi(x_i)} \mathcal{H}^{K-1}(dx) \\ &= \text{densité de } m = (x_1 + \dots + x_K)/K \end{aligned}$$

Thm de Cramér : $-\frac{1}{K} \log \int_a^b f_K(m) dm \xrightarrow{K \rightarrow \infty} \inf_{[a,b]} \varphi$

Thm de Cramér local : $-\frac{1}{K} \log f_K \xrightarrow{K \rightarrow \infty} \varphi$

en topologie C^2 uniforme

... Donc f_K hérite de φ les propriétés de log concavité uniforme

En cours (M. Fathi) : propriétés physiques en plus

- Propriété d'État de Gibbs Local :

$$f(t, x_1, \dots, x_N) \mu_N \simeq \exp(-\sum \lambda_i x_i) \mu_N, \lambda \text{ à échelle macro}$$

(au sens de l'entropie relative pour $t > 0$)

- Déf par dynamique macro : $\lambda = NP^t \nabla \bar{H}(\eta)$

- Déf par EDP : $\lambda_i(t) = \varphi'(\zeta(t, \frac{i}{N}))$

En cours (M. Fathi) : propriétés physiques en plus

- Propriété d'État de Gibbs Local :

$$f(t, x_1, \dots, x_N) \mu_N \simeq \exp(-\sum \lambda_i x_i) \mu_N \quad \lambda \text{ à échelle macro}$$

(au sens de l'entropie relative pour $t > 0$)

- Déf par dynamique macro : $\lambda = NP^t \nabla \bar{H}(\eta)$

- Déf par EDP : $\lambda_i(t) = \varphi'(\zeta(t, \frac{i}{N}))$

- $\frac{1}{N} \int f \log f d\mu_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int \varphi(\zeta(\theta)) d\theta$

(entropie microscopique \longrightarrow entropie macroscopique)

Kosygina a traité le cas convexe (*Ann. Probab. 2001*)

Preuve via inégalités d'interpolation

- Cas convexe : $\mu_\zeta^G = \text{Gibbs local associé à } \zeta$;
- 1. $W_{2; A^{-1}}(f\mu_N, \mu_\zeta^G) \leq W_{2; A^{-1}}(f\mu_N, \delta_\zeta) + W_{2; A^{-1}}(\delta_\zeta, \mu_\zeta^G) = o(N)$
- 2. $I_A(f\mu_N | \mu_\zeta^G) = O(N)$, où $I = \text{information de Fisher}$ relative (de matrice A)
- 3. Par log concavité, appliquer l'inégalité HWI de Otto–V : $H(f\mu_N | \mu_\zeta^G) \leq W_{2; A^{-1}} \sqrt{I_A} = o(N)$
- 4. Conclure que $H(f\mu_N)/N \simeq H(\mu_\zeta^G)/N \simeq \int \varphi(\zeta)$
- 5. Ceci est intégré en temps, mais la propagation de la limite entropique (Yau) implique uniformité en temps
 - Si non convexe : renormaliser/convexifier ...
 - Jouer sur les différentes notions de Gibbs Local

Résumé

- Analyse en dimension infinie (distances faibles, log Sobolev, interpolation, concentration de la mesure)
- Double échelle, approche analytique de la limite hydro (recyclé par Funaki pour modèles d'interface)
- **Théorèmes limites locaux** : tellement utiles dans l'analyse des lois de conservation

Autres développements

Menz–Otto traitent des potentiels surquadratiques grâce à une **inégalité de Brascamp–Lieb asymétrique...**
(en 1d)

