



energie atomique • énergies alternatives



Méthode d'éléments finis et d'équations intégrales d'ordre élevé pour les études de furtivité radar de structures axisymétriques

CAMBON Sébastien

Doctorant 3^{ème} année de l'I.N.S.A Toulouse
Thèse réalisée au CEA/DAM/CESTA – Le Barp (33)
Janvier 2009 – Janvier 2012

Directrice de thèse

Anne-Sophie BONNET-BEN DHIA

Encadrants

Francis COLLINO
Patrick LACOSTE



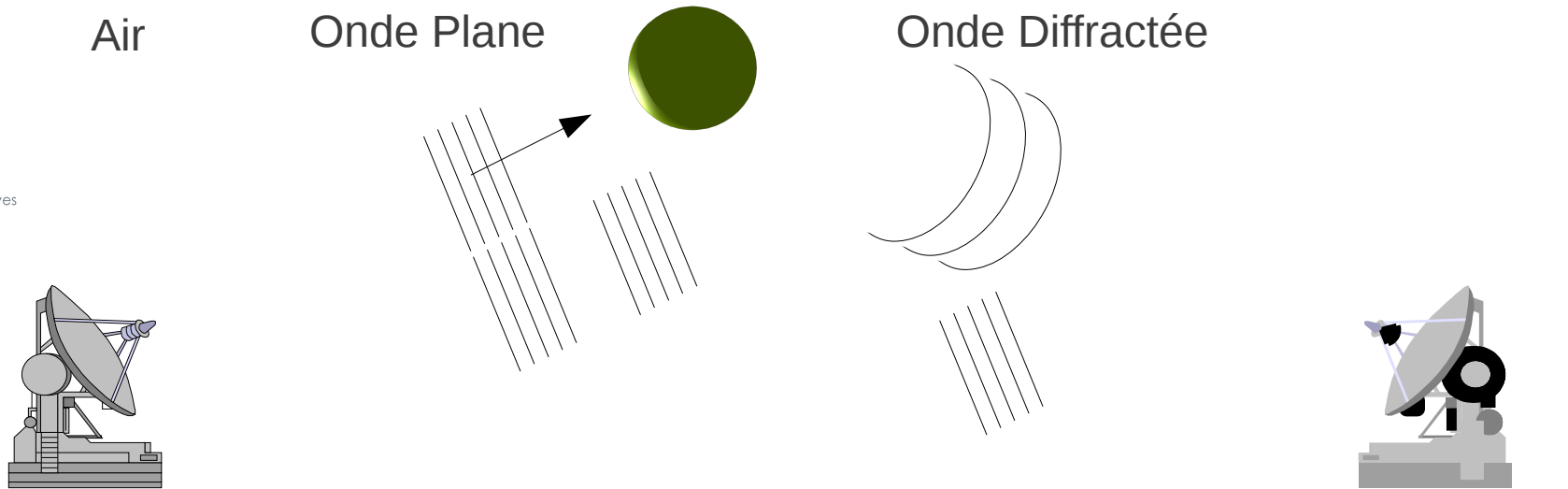
énergie atomique • énergies alternatives

Contexte et problématique

I-1) Le phénomène physique I-2) Modélisation



énergie atomique • énergies alternatives



Nos objectifs

Simuler la diffraction d'une onde plane par un objet à symétrie de révolution en régime harmonique.

- Évaluer les champs (resp. courants) électriques et magnétiques ;
- Évaluer la surface équivalente radar à partir du champ lointain \mathbf{E}^∞ .

Concevoir et réaliser un code de simulation.

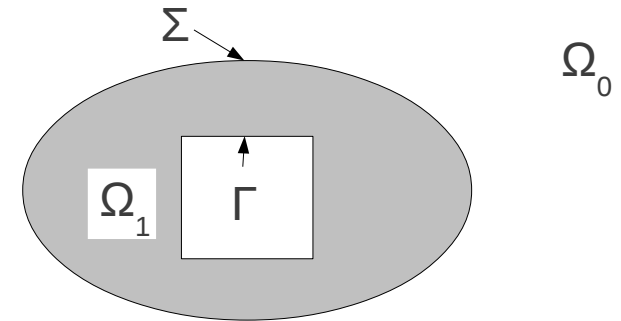
- Prendre en compte des objets complexes : formes, matériaux ;
- Développer une méthode numérique « précise » ;
- Réaliser un code de simulation « performant ».

I-1) Le phénomène physique I-2) Modélisation



energie atomique • énergies alternatives

Soit E (resp. H) le champ électrique (resp. magnétique) total dans \mathbb{R}^3 et le courant surfacique associé M (resp. J) sur Σ .



Notations : $E_0 = E|_{\Omega_0}$, $H_0 = H|_{\Omega_0}$
 $E_1 = E|_{\Omega_1}$, $H_1 = H|_{\Omega_1}$

Le milieu intérieur Ω_1

$$\begin{cases} \nabla \times E_1 - ikZ_0\mu_r H_1 = 0 \\ \nabla \times H_1 + ikY_0\varepsilon_r E_1 = 0 \end{cases}$$

Condition de conducteur parfait :

$$n_\Gamma \times (E_1 \times n_\Gamma) = 0 \text{ sur } \Gamma$$

Le milieu extérieur Ω_0

$$\begin{cases} \nabla \times E_0 - ikZ_0 H_0 = 0 \\ \nabla \times H_0 + ikY_0 E_0 = 0 \end{cases}$$

Condition de « Silver-Müller » :

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x| [Z_0 H_0^d \times \hat{x} - E_0^d] = 0$$

A l'interface Σ

$$n_1 \times (E_1 \times n_1) = n_0 \times (E_0 \times n_0) \quad n_1 \times (H_1 \times n_1) = n_0 \times (H_0 \times n_0)$$

P. Monk, "Finite Element Methods for Maxwell's Equations", Numerical Mathematics and Scientific Computation, 2003
 D. Colton, R. Kress, "Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory", AMS 93, 1992



énergie atomique • énergies alternatives

Utilisation de la propriété de symétrie de révolution

II-1) Une formulation en 3D II-2) Formulation 2D axisymétrique



energie atomique • énergies alternatives

Équations de Maxwell d'ordre deux dans Ω_1

$$\begin{cases} \nabla \times E_1 - ikZ_0\mu_r H_1 = 0 \\ \nabla \times H_1 + ikY_0\varepsilon_r E_1 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \nabla \times (\mu_r^{-1} \nabla \times E_1) - k^2 \varepsilon_r E_1 = 0 \\ H_1 = -iY_0(k\mu_r)^{-1} \nabla \times E_1 \end{cases}$$

Représentations intégrales dans Ω_0

Formules de “Stratton-Chu”. Soit $x \in \Omega_0 \setminus \Sigma$:

$$\begin{cases} E_0(x) = E_0^{inc}(x) + iZ_0 \tilde{T} J(x) + \tilde{K} M(x) \\ H_0(x) = H_0^{inc}(x) + iY_0 \tilde{T} M(x) - \tilde{K} J(x) \end{cases}$$

où,
$$\tilde{T} J(x) = \int_{\Sigma} \{ k G(x, y) J(y) + k^{-1} \nabla_x G(x, y) \operatorname{div}_{\Sigma} J(y) \} d\Sigma(y)$$

$$\tilde{K} J(x) = \int_{\Sigma} \nabla_y G(x, y) \times J(y) d\Sigma(y)$$

$$J = (n_1 \times H)|_{\Sigma}, M = (E \times n_1)|_{\Sigma}, \text{ et le noyau de Green, } G(x, y) = \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}.$$

F. Collino, “ Construction d'une nouvelle formulation pour l'amélioration des performances des codes axisymétriques ”, Rapport d'étude C.E.A, 2009

II-1) Une formulation en 3D II-2) Formulation 2D axisymétrique



energie atomique • énergies alternatives

Formulation variationnelle

Trouver $(E, J) \in H(\text{rot}, \Omega_1) \times H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Sigma, \Sigma)$ tels que :

$\forall (E', J') \in H(\text{rot}, \Omega_1) \times H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Sigma, \Sigma),$

$$+iZ_0 \int_\Sigma \int_\Sigma G(x, y) \{k J(x) \cdot J'(y) - k^{-1} \text{div}_\Sigma J(x) \cdot \text{div}_\Sigma J'(y)\} d\Sigma(x) d\Sigma(y)$$

$$-iY_0 \int_\Sigma \int_\Sigma G(x, y) \{k M(x) \cdot M'(y) - k^{-1} \text{div}_\Sigma M(x) \cdot \text{div}_\Sigma M'(y)\} d\Sigma(x) d\Sigma(y)$$

$$- \int_\Sigma \int_\Sigma \nabla_x G(x, y) \cdot \{J(x) \times M'(y) + M(x) \times J'(y)\} d\Sigma(x) d\Sigma(y)$$

$$-iY_0 \int_{\Omega_1} \{k \epsilon_r E(x) \cdot E'(x) - (k \mu_r)^{-1} \text{rot} E(x) \cdot \text{rot} E'(x)\} d\Omega_1(x)$$

$$+ \frac{1}{2} \int_\Sigma \{J(x) \times M'(x) - M(x) \times J'(x)\} \cdot n_1 d\Sigma(x)$$

$$= \int_\Sigma \{H^{inc}(x) \cdot M'(x) - E^{inc}(x) \cdot J'(x)\} d\Sigma(x)$$

Avantages :

- Formulation symétrique ;
- Champ électrique complet en volume ;
- Domaine de calcul réduit ;
- Prise en compte d'objets complexes ;

* V. Levillain, “ Couplage éléments finis équations intégrales pour la résolution des équations de Maxwell en milieu hétérogène ”, Thèse de Doctorat, École Polytechnique, 1991

II-1) Une formulation en 3D II-2) Formulation 2D axisymétrique



energie atomique • énergies alternatives

Formulation variationnelle

Trouver $(E, J) \in H(\text{rot}, \Omega_1) \times H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Sigma, \Sigma)$ tels que :

$$\forall (E', J') \in H(\text{rot}, \Omega_1) \times H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Sigma, \Sigma),$$

$$+ iZ_0 \int_\Sigma \int_\Sigma G(x, y) \{ k J(x) \cdot J'(y) - k^{-1} \text{div}_\Sigma J(x) \cdot \text{div}_\Sigma J'(y) \} d\Sigma(x) d\Sigma(y)$$

$$- iY_0 \int_\Sigma \int_\Sigma G(x, y) \{ k M(x) \cdot M'(y) - k^{-1} \text{div}_\Sigma M(x) \cdot \text{div}_\Sigma M'(y) \} d\Sigma(x) d\Sigma(y)$$

$$- \int_\Sigma \int_\Sigma \nabla_x G(x, y) \cdot \{ J(x) \times M'(y) + M(x) \times J'(y) \} d\Sigma(x) d\Sigma(y)$$

$$- iY_0 \int_{\Omega_1} \{ k \epsilon_r E(x) \cdot E'(x) - (k \mu_r)^{-1} \text{rot} E(x) \cdot \text{rot} E'(x) \} d\Omega_1(x)$$

$$+ \frac{1}{2} \int_\Sigma \{ J(x) \times M'(x) - M(x) \times J'(x) \} \cdot n_1 d\Sigma(x)$$

$$= \int_\Sigma \{ H^{inc}(x) \cdot M'(x) - E^{inc}(x) \cdot J'(x) \} d\Sigma(x)$$

Problème d'unicité ?

Présence de fréquences irrégulières.

Problème intérieur

Trouver $k \in \mathbb{R}$, tel que :

$$\begin{cases} \text{rot rot} E_1 - k^2 E_1 = 0 & \text{dans } \Omega_1 \\ E_1 \times n_1 = 0 & \text{sur } \Gamma \text{ et } \Sigma \end{cases}$$

* V. Levillain, “ Couplage éléments finis équations intégrales pour la résolution des équations de Maxwell en milieu hétérogène ”, Thèse de Doctorat, École Polytechnique, 1991

II-1) Une formulation en 3D II-2) Formulation 2D axisymétrique



energie atomique • énergies alternatives

Formulation variationnelle

Trouver $(E, J) \in H(\text{rot}, \Omega_1) \times H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Sigma, \Sigma)$ tels que :

$$\forall (E', J') \in H(\text{rot}, \Omega_1) \times H^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Sigma, \Sigma),$$

$$+ iZ_0 \int_\Sigma \int_\Sigma G(x, y) \{ k J(x) \cdot J'(y) - k^{-1} \text{div}_\Sigma J(x) \cdot \text{div}_\Sigma J'(y) \} d\Sigma(x) d\Sigma(y)$$

$$- iY_0 \int_\Sigma \int_\Sigma G(x, y) \{ k M(x) \cdot M'(y) - k^{-1} \text{div}_\Sigma M(x) \cdot \text{div}_\Sigma M'(y) \} d\Sigma(x) d\Sigma(y)$$

$$- \int_\Sigma \int_\Sigma \nabla_x G(x, y) \cdot \{ J(x) \times M'(y) + M(x) \times J'(y) \} d\Sigma(x) d\Sigma(y)$$

$$- iY_0 \int_{\Omega_1} \{ k \epsilon_r E(x) \cdot E'(x) - (k \mu_r)^{-1} \text{rot} E(x) \cdot \text{rot} E'(x) \} d\Omega_1(x)$$

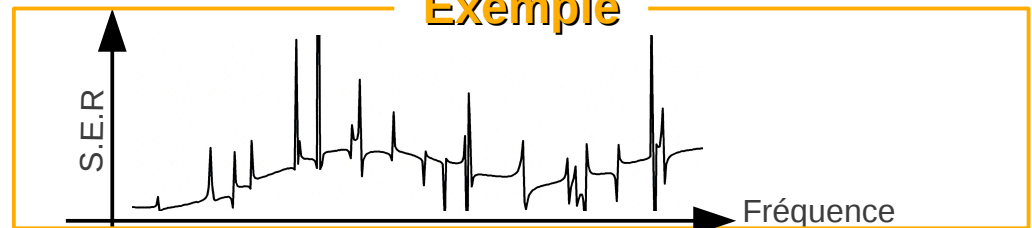
$$+ \frac{1}{2} \int_\Sigma \{ J(x) \times M'(x) - M(x) \times J'(x) \} \cdot n_1 d\Sigma(x)$$

$$= \int_\Sigma \{ H^{inc}(x) \cdot M'(x) - E^{inc}(x) \cdot J'(x) \} d\Sigma(x)$$

Problème d'unicité ?

Présence de fréquences irrégulières.

Exemple

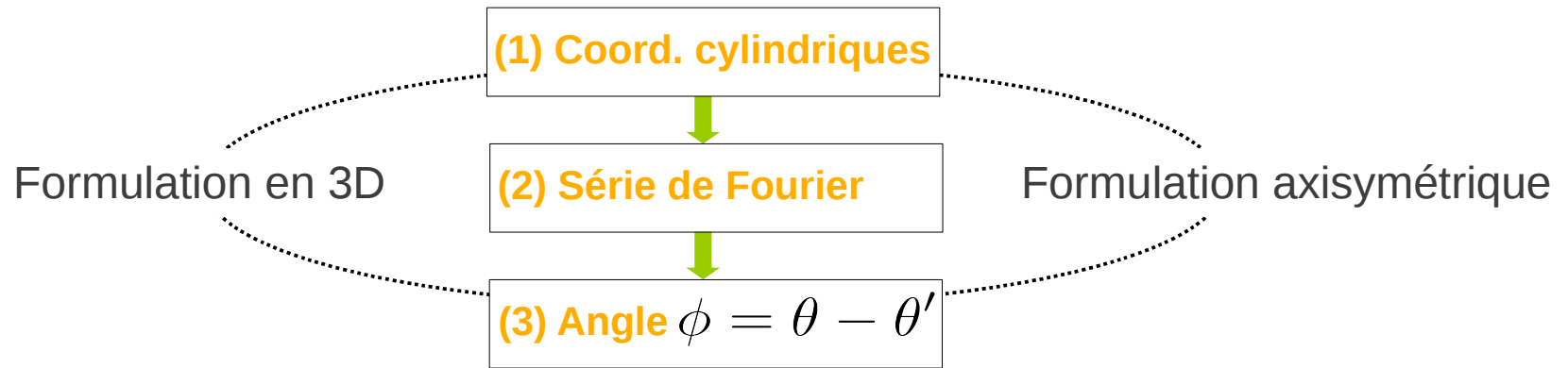


* V. Levillain, "Couplage éléments finis équations intégrales pour la résolution des équations de Maxwell en milieu hétérogène", Thèse de Doctorat, École Polytechnique, 1991

II-1) Une formulation en 3D II-2) Formulation 2D axisymétrique



energie atomique • énergies alternatives



Série de Fourier (2)

Soit e le champ électrique en coordonnées cylindriques.

$$e = \begin{bmatrix} e_r^0 \\ e_\theta^0 \\ e_z^0 \end{bmatrix} + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \begin{bmatrix} e_r^n \cos n\theta \\ e_\theta^n \sin n\theta \\ e_z^n \cos n\theta \end{bmatrix} + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \begin{bmatrix} e_r^{-n} \sin n\theta \\ e_\theta^{-n} \cos n\theta \\ e_z^{-n} \sin n\theta \end{bmatrix}$$

Soit m le courant associé dans la base (τ_{rz}, τ_θ) .

$$m = \begin{bmatrix} m_{rz}^0 \\ m_\theta^0 \end{bmatrix} + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \begin{bmatrix} m_{rz}^n \cos n\theta \\ m_\theta^n \sin n\theta \end{bmatrix} + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \begin{bmatrix} m_{rz}^{-n} \sin n\theta \\ m_\theta^{-n} \cos n\theta \end{bmatrix}$$

Propriété de trace

L'opérateur $(\cdot \times n_1)|_\Sigma$ induit :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \begin{cases} m_{rz}^n = (e_\theta^n)|_\Sigma \\ m_\theta^n = \left(- \begin{bmatrix} e_r^n \\ e_z^n \end{bmatrix} \cdot \hat{\tau} \right)|_\Sigma \end{cases}$$

B. Stupfel, P. Bonnemason, " Solution of the scattering problem by axisymmetrical penetrable objects with a mixed boundary-element and finite-element method ", JINA'90, 116-119



énergie atomique • énergies alternatives

Développement d'une méthode d'éléments finis d'ordre élevé

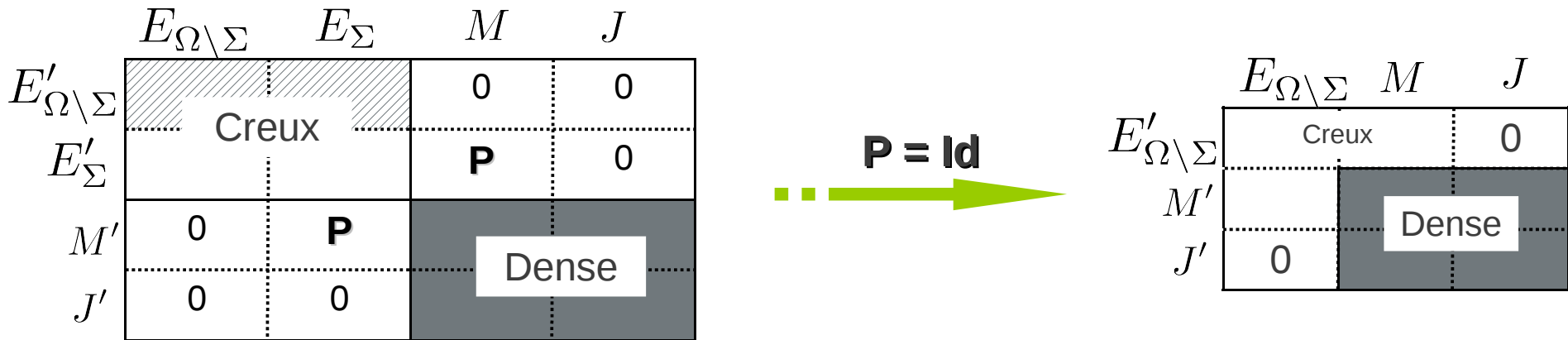


energie atomique • énergies alternatives

Objectifs

- Concevoir une méthode E.F d'ordre élevé ;
- Raccord des E.F volumiques et surfaciques via l'opérateur $(\cdot \times n_1)|_{\Sigma}$;

Pourquoi une propriété de raccord ?



L'idée [*]

Construire un **changement de variables**

- naturel dans le cas d'un tore ;
- obtenir des espaces fonctionnels "simples" : $H(\text{rot})$, $H(\text{div})$, H^1 .

* P. Lacoste, "Solution of Maxwell equation in axisymmetric geometry by Fourier series decomposition and by use of $H(\text{rot})$ conforming finite element." Numer. Math. 84 (4), 577-609, 2000



energie atomique • énergies alternatives

Considérons la partie volumique de la formulation axisymétrique.

$$-iY_0 \int_{\omega_1} \{ k\varepsilon_r e \cdot e' - (k\mu_r)^{-1} \text{rot}_r e \cdot \text{rot}_r e' \} d\omega_1 \quad \text{où } \text{rot}_r e = \begin{bmatrix} -\frac{1}{r} \left(n e_z^n + \frac{\partial(r e_\theta^n)}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial e_r^n}{\partial z} - \frac{\partial e_z^n}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \left(n e_r^n + \frac{\partial(r e_\theta^n)}{\partial r} \right) \end{bmatrix}$$

Définition

Soit n un mode de Fourier. On définit \mathbf{U} et v telles que :

$$\forall n \in \mathbb{Z}^*, \mathbf{U} = \frac{1}{r} \left(n \begin{bmatrix} e_r^n \\ e_z^n \end{bmatrix} + \nabla_{r,z}(r e_\theta^n) \right) \quad \text{et } v = e_\theta^n$$

$$\text{pour } n = 0, \mathbf{U} = \begin{bmatrix} e_r^0 \\ e_z^0 \end{bmatrix} \quad \text{et } v = \frac{e_\theta^0}{r}$$

Pour n non nul, la partie volumique devient :

$$-\frac{iY_0}{n^2} \int_{\omega_1} \{ k\varepsilon_r [(r\mathbf{U} - \nabla_{r,z}(r v)) \cdot (r\mathbf{U}' - \nabla_{r,z}(r v')) + n^2 v \cdot v'] - (k\mu_r)^{-1} [n^2 \mathbf{U} \cdot \mathbf{U}' + \text{rot}(r\mathbf{U}) \cdot \text{rot}(r\mathbf{U}')] \} r d\omega_1$$

Propriété

Supposons que, $\mathbf{U} \in H(\text{rot}, \omega_1)$ et $v \in H^1(\omega_1)$

alors, $e \in H(\text{rot}_r, \omega_1)$.

La réciproque est fautive, sauf pour un objet torique ($\forall (r, z) \in \omega_1, r \neq 0$).



energie atomique • énergies alternatives

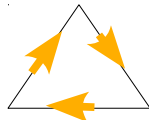
ORDRE R1-P1 pour n non nul

Soit K une maille triangulaire, S_i une arête de celle-ci et “ n ” un mode de Fourier.

E.F volumique

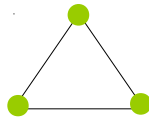
$$\mathbf{U}_h \in R_1(K) = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha_1 - \alpha_3 z \\ \alpha_2 + \alpha_3 r \end{bmatrix}; \alpha_i \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\sigma_{S_i} : \mathbf{U} \rightarrow \int_{S_i} \mathbf{U} \cdot \boldsymbol{\tau}_i \, dS_i$$



$$v_h \in P_1(K) = \{\beta_1 + \beta_2 r + \beta_3 z; \beta_i \in \mathbb{R}\}$$

$$\sigma_i : v \rightarrow v(r_i, z_i)$$



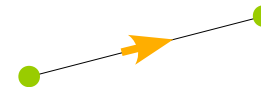
E.F de frontière

$$m_h \in \left\{ \begin{bmatrix} \gamma_1 + \gamma_2 s \\ \frac{1}{n} \left(r(\gamma_3 - \gamma_2) - \frac{\partial r}{\partial s} (\gamma_1 + \gamma_2 s) \right) \end{bmatrix}; \gamma_i \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\sigma_0 : m \rightarrow m_{rz}(0)$$

$$\sigma_1 : m \rightarrow m_{rz}(1)$$

$$\sigma_{S_i} : m \rightarrow \int_0^1 \frac{1}{r(s)} \left(n m_\theta + \frac{\partial}{\partial s} (r m_{rz}) \right) (s) \, ds$$



La propriété de raccord entre volume et surface est respectée par construction.

J-C. Nédélec, “ Mixed finite elements in \mathbb{R}^3 ”, Numer. Math. **35**, 315-341, 1980



energie atomique • énergies alternatives

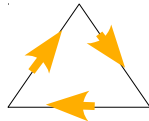
ORDRE R1-P2 pour n = 0

Soit K une maille triangulaire, S_i une arête de celle-ci et "n" un mode de Fourier.

E.F volumique

$$\mathbf{U}_h \in R_1(K) = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha_1 - \alpha_3 z \\ \alpha_2 + \alpha_3 r \end{bmatrix}; \alpha_i \in \mathbb{R} \right\}$$

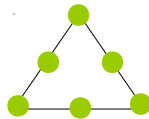
$$\sigma_{S_i} : \mathbf{U} \rightarrow \int_{S_i} \mathbf{U} \cdot \boldsymbol{\tau}_i \, dS_i$$



$$v_h \in P_2(K) = \{ \beta_1 + \beta_2 r + \beta_3 r^2 + \dots \\ \beta_4 z + \beta_5 rz + \beta_6 z^2; \beta_i \in \mathbb{R} \}$$

$$\sigma_i : v \rightarrow v(r_i, z_i)$$

$$\sigma_{i+3} : v \rightarrow v(mr_i, mz_i)$$



E.F de frontière

$$m_h \in \left\{ \begin{bmatrix} r(\gamma_1 + \gamma_2 s + \gamma_3 s^2) \\ -\gamma_4 \end{bmatrix}; \gamma_i \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\sigma_0 : m \rightarrow \frac{m_{rz}}{r}(0)$$

$$\sigma_1 : m \rightarrow \frac{m_{rz}}{r}(1)$$

$$\sigma_{S_i} : m \rightarrow - \int_0^1 m_\theta(s) \, ds$$



La propriété de raccord entre volume et surface est respectée par construction.

J-C. Nédélec, " Mixed finite elements in \mathbb{R}^3 ", Numer. Math. **35**, 315-341, 1980



énergie atomique • énergies alternatives

Validation de l'assemblage et de la méthode d'éléments finis

IV-1) Fréquences de résonance IV-2) Cas test IV-3) Exemple avec la 3D

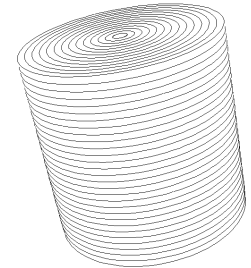


energie atomique • énergies alternatives

Cavité Cylindrique

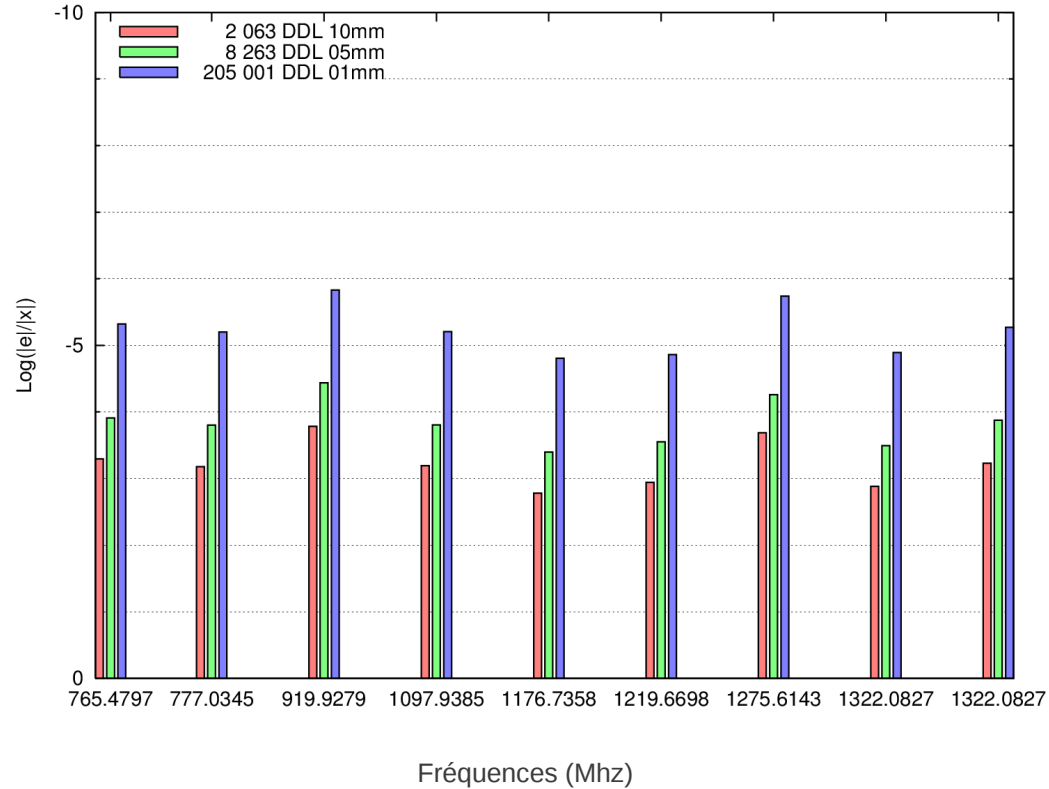
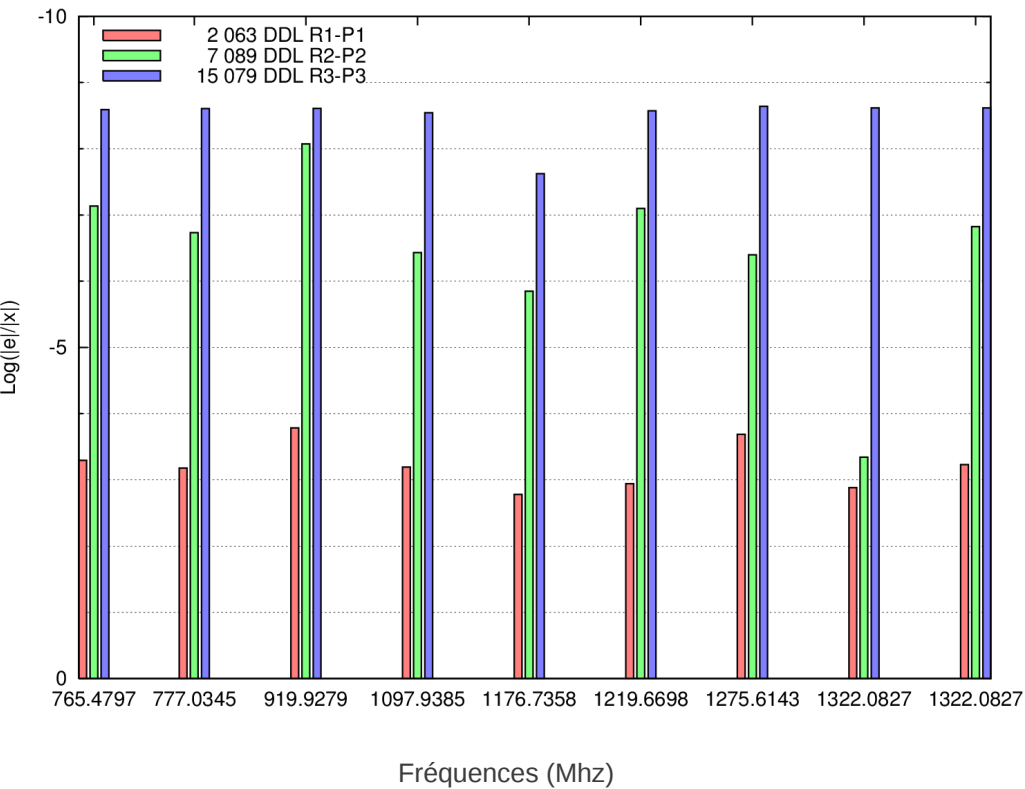
Calcul des fréquences de résonance entre 750Mhz et 1350Mhz.

- hauteur : 0.294 m
- rayon : 0.150 m



Comparaison avec différents ordres de la méthode.
h = 10 mm

Comparaison avec différentes valeurs de h.
Ordre R1-P1



IV-1) Fréquences de résonance IV-2) Cas test IV-3) Exemple avec la 3D



energie atomique • énergies alternatives

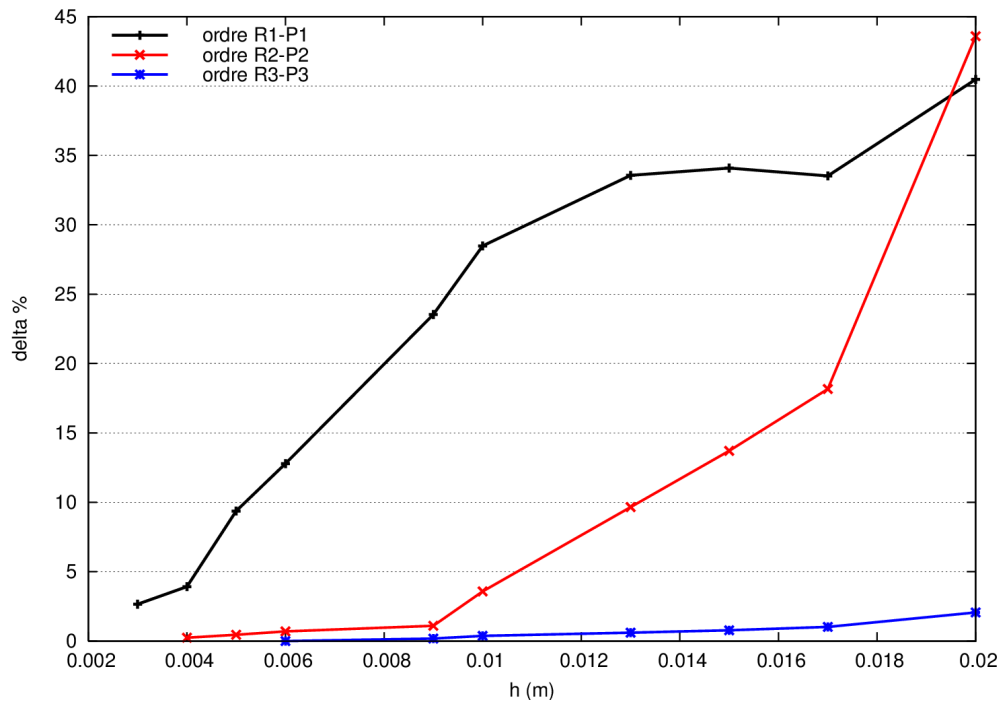
Cylindre Diélectrique avec noyau conducteur parfait

S.E.R monostatique à 0 degrés de 100Mhz à 20Ghz ($\delta f=1\text{Mhz}$).

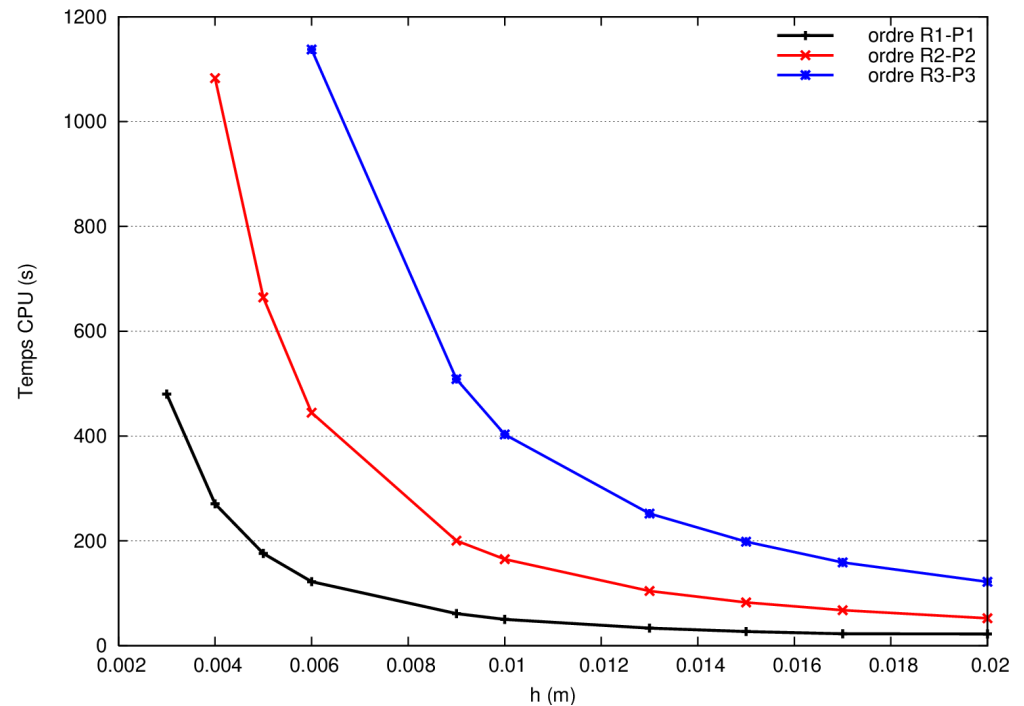
- hauteur : 0.4 m
- épaisseur matériau : 0.05 m
- rayon : 0.2 m
- caractéristiques matériau : $\epsilon_r = 3 + i, \mu_r = 1$

L'erreur est définie par :
$$\delta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\sigma_i - \tilde{\sigma}_i)^2}{\sum_{i=1}^N \tilde{\sigma}_i^2}}$$

Erreur relative versus h



Temps CPU versus h



IV-1) Fréquences de résonance IV-2) Cas test IV-3) Exemple avec la 3D



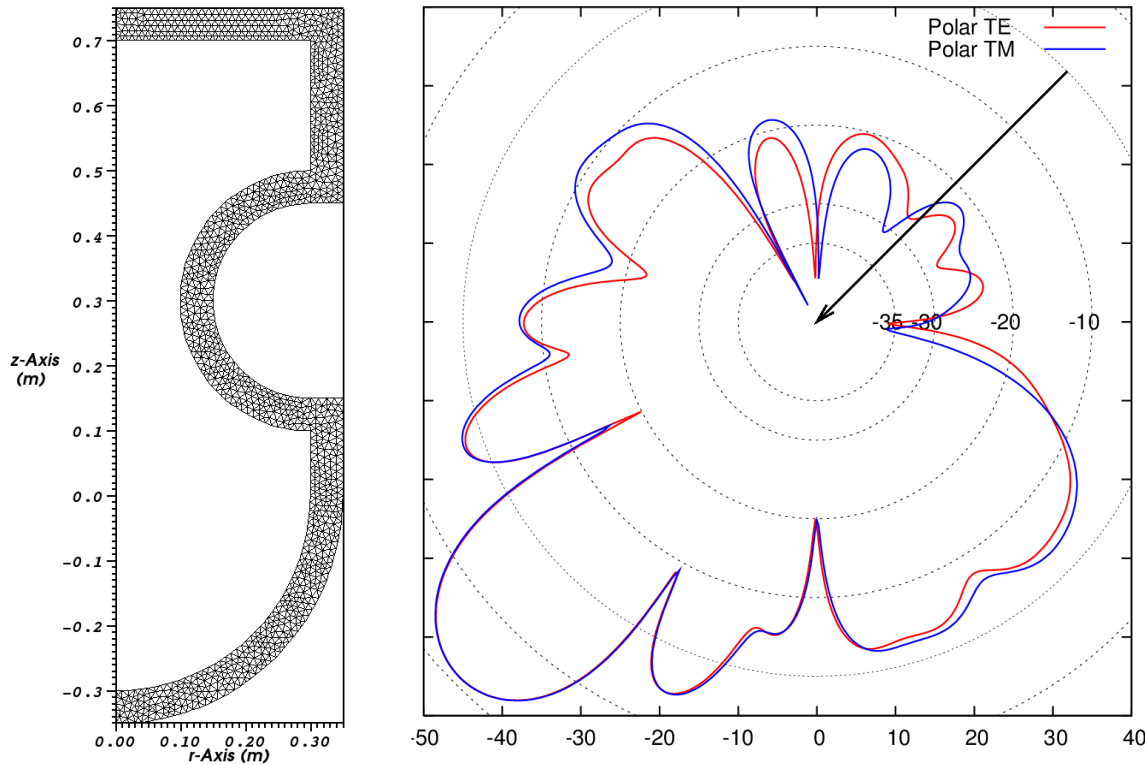
energie atomique • énergies alternatives

ALTR diélectrique avec noyau conducteur parfait

S.E.R bistatique de 0 à 360 degrés dont l'angle d'incidence est de 45 degrés et à 1 Ghz.

- épaisseur matériau : 0.05 m
- caractéristiques matériau : $\epsilon_r = 1 + i$, $\mu_r = 1 + i$

Méthode d'ordre **R3-P3** avec **h = 10 mm**
Erreur < 1%



h ~	Nombre d'inconnues		Temps	Nombre
0.01 m	Volume	Surface	CPU	de CPU
3D	1 288 825	175 455	3 337 s	128
2D axi	32 094	1 123	272 s	1

Bilan

- La montée en ordre donne des **résultats précis**
- L'invariance par rotation est un atout :
 - gain en mémoire, nombre et temps CPU,
 - méthode aisée à paralléliser (sur les modes).



énergie atomique • énergies alternatives

Conclusions & Perspectives



énergie atomique • énergies alternatives

Conclusions

- ✓ Montée en ordre aisée sur maillage en triangles ;
- ✓ Méthode adaptée aux objets diélectriques complexes : hétérogène, anisotrope, avec noyau conducteur ou impédant ;
- ✓ Augmentation de la gamme de fréquences accessibles pour la simulation.

Perspectives

- ✗ Compléter l'étude de l'existence et de l'unicité en axisymétrie ;
- ✗ Palier au défaut des fréquences irrégulières ;
- ✗ Améliorer les techniques d'intégration des noyaux singuliers.

S. Cambon, P. Lacoste, “ *Équations de Maxwell en géométrie axisymétrique : Couplage éléments finis $H(\text{rot})$ en volume et éléments finis $H(\text{div})$ en surface.* ”, Rapport CEA-R-6262, 2011



énergie atomique • énergies alternatives

Merci de votre attention