Un théorème de Noether discret fractionnaire dans le cadre des plongements discrets

Loïc Bourdin

Laboratoire de Mathématiques Appliquées,
Université de Pau et des Pays de l'Adour

Congrès SMAI 2011
5ème Biennale française des Mathématiques Appliquées,
à Guidel le 25 mai 2011

Un théorème de Noether discret fractionnaire
dans le cadre des plongements discrets

L. Bourdin, J. Cresson, I. Greff et P. Inizan *Variational integrators on fractional Lagrangian systems in the framework of discrete embeddings*. Soumis. Preprint arXiv:1103.0465v1[math.DS]

L. Bourdin *Discrete fractional Noether's theorem in the framework of discrete embeddings*. Soumis.

http://lbourdi1.perso.univ-pau.fr/index

Théorème de Noether discret fractionnaire :
Pourquoi un tel résultat ?

- **Qu'est-ce que le calcul fractionnaire ?**
  f, $\dot{f}$, $\ddot{f}$, $f^{(3)}$, ..., $f^{(n)}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
  Question de L'Hospital à Leibniz (1695) : $f^{(\alpha)}$ pour $\alpha = 1/2$? pour $\alpha > 0$?

S.G. Samko, A.A. Kilbas et O.I. Marichev *Fractional integrals and derivatives* 1993.

Théorème de Noether discret fractionnaire :
Pourquoi un tel résultat ?

- **Qu'est-ce que le calcul fractionnaire ?**
- **Extension du formalisme Lagrangien au cas fractionnaire :**
  Les systèmes Lagrangiens codent les systèmes dynamiques possédant une structure variationnelle Lagrangienne (provenant d'une minimisation de fonctionnelle Lagrangienne).
  Exemples : Équation de Laplace, pendule simple (OK). Équation de la chaleur, de Navier-Stokes (NON).
  Problème : Cela ne concerne essentiellement que des systèmes conservatifs.
  Idée : Trouver des structures variationnelles fractionnaires pour les systèmes non conservatifs.
  Exemples : Équation de convection-diffusion, de Newton avec friction.

Théorème de Noether discret fractionnaire :
Pourquoi un tel résultat ?

- **Qu'est-ce que le calcul fractionnaire ?**
- **Extension du formalisme Lagrangien au cas fractionnaire :**
- **Théorème de Noether fractionnaire ?**
  Théorème de Noether classique : Si un système Lagrangien exhibe une symmétrie alors une constante de mouvement (intégrale première) peut être explicitée.
  Question : Peut-on formuler un résultat similaire pour les systèmes Lagrangiens fractionnaires ? Problème ouvert.

Théorème de Noether discret fractionnaire :
Pourquoi un tel résultat ?

- **Qu'est-ce que le calcul fractionnaire ?**
- **Extension du formalisme Lagrangien au cas fractionnaire :**
- **Théorème de Noether fractionnaire ?**
- **Discrétisation des systèmes Lagrangiens fractionnaires :**
  En règle général, les systèmes fractionnaires sont difficiles à résoudre explicitement. Besoin de schémas numériques.
  La formulation d'un théorème de Noether discret fractionnaire peut fournir des intuitions sur la version continue encore hypothétique.

Table des matières

Table des matières

Notion de Grünwald-Letnikov (1867-1868)

Formule de la n-ième semi-dérivée de f :

$$(\pm d_{\mp})^n f(t) = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r C_n^r f(t \mp rh).$$

Notion de Grünwald-Letnikov (1867-1868)

Formule de la n-ième semi-dérivée de f :

$$(\pm d_{\mp})^n f(t) = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r C_n^r f(t \mp rh).$$

Définition 2 (*Grünwald-Letnikov*)

Pour $\alpha > 0$ et $f \in \mathcal{C}^{-[-\alpha]}([a,b], \mathbb{R}^d)$, on définit :

$$\forall a < t \leq b, \quad D_{-}^{\alpha} f(t) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ nh = t-a}} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{r=0}^{n} \alpha_r f(t - rh)$$

$$\forall a \leq t < b, \quad D_{+}^{\alpha} f(t) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ nh = b-t}} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{r=0}^{n} \alpha_r f(t + rh)$$

*les **dérivées fractionnaires** à gauche et à droite de f d'ordre α au sens de Grünwald-Letnikov (où $\alpha_r = (-1)^r C_\alpha^r$).*

Notion de Grünwald-Letnikov (1867-1868)

Formule de la n-ième semi-dérivée de f :

$$(\pm d_{\mp})^n f(t) = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r C_n^r f(t \mp rh).$$

Définition 3 (*Grünwald-Letnikov*)

Pour $\alpha > 0$ et $f \in \mathcal{C}^{-[-\alpha]}([a,b], \mathbb{R}^d)$, on définit :

$$\forall a < t \leq b, \quad D_-^\alpha f(t) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ nh = t-a}} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{r=0}^{n} \alpha_r f(t - rh)$$

$$\forall a \leq t < b, \quad D_+^\alpha f(t) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ nh = b-t}} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{r=0}^{n} \alpha_r f(t + rh)$$

*les **dérivées fractionnaires** à gauche et à droite de f d'ordre α au sens de Grünwald-Letnikov (où $\alpha_r = (-1)^r C_\alpha^r$).*

Généralisation de la notion classique de dérivée :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad D_-^n f = f^{(n)} \quad \text{et} \quad D_+^n f = (-1)^n f^{(n)}$$

Table des matières

Équation d'Euler-Lagrange fractionnaire ($0 < \alpha \leq 1$)

Soient $\mathcal{L}^\alpha$ la **fonctionnelle Lagrangienne fractionnaire** associée au **Lagrangien** L de classe $\mathcal{C}^2$ suivants :

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{L}^\alpha : & \mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{R}^d) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & q & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b L(q, D_-^\alpha q, t)dt \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} L : & \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,v,t) & \longmapsto & L(x,v,t). \end{array}$$

Équation d'Euler-Lagrange fractionnaire ($0 < \alpha \leq 1$)

Soient $\mathcal{L}^\alpha$ la **fonctionnelle Lagrangienne fractionnaire** associée au **Lagrangien** L de classe $\mathcal{C}^2$ suivants :

$$\mathcal{L}^\alpha : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{R}^d) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ q & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b L(q, D_-^\alpha q, t)dt \end{array} \qquad L : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,v,t) & \longmapsto & L(x,v,t). \end{array}$$

Théorème 2 (*Équation d'Euler-Lagrange fractionnaire*)

q est point critique de $\mathcal{L}^\alpha$ si et seulement si :

$$\frac{\partial L}{\partial x}(q, D_-^\alpha q, t) + D_+^\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial v}(q, D_-^\alpha q, t) \right) = 0. \qquad (EL^\alpha)$$

O.P. Agrawal *Formulation of Euler-Lagrange equations for fractional variational problems.* JMAA, 2002.

Équation d'Euler-Lagrange fractionnaire ($0 < \alpha \leq 1$)

Soient $\mathcal{L}^\alpha$ la **fonctionnelle Lagrangienne fractionnaire** associée au **Lagrangien** L de classe $\mathcal{C}^2$ suivants :

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{L}^\alpha : & \mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{R}^d) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & q & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b L(q, D_-^\alpha q, t)dt \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} L : & \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,v,t) & \longmapsto & L(x,v,t). \end{array}$$

Théorème 3 (*Équation d'Euler-Lagrange fractionnaire*)

q est point critique de $\mathcal{L}^\alpha$ si et seulement si :

$$\frac{\partial L}{\partial x}(q, D_-^\alpha q, t) + D_+^\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial v}(q, D_-^\alpha q, t) \right) = 0. \qquad (EL^\alpha)$$

O.P. Agrawal *Formulation of Euler-Lagrange equations for fractional variational problems.* JMAA, 2002.

Cas classique ($\alpha = 1$), on retrouve l'équation d'Euler-Lagrange classique (1750) :

$$\frac{\partial L}{\partial x}(q, \dot{q}, t) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v}(q, \dot{q}, t) \right) = 0. \qquad (EL^1)$$

Symétrie et intégrale première d'un système Lagrangien fractionnaire

Définition 4 (*Symétrie d'un SLF*)

Soit $\Phi = \big(\varphi(s,0)\big)_{s \in \mathbb{R}}$ *un groupe à un paramètre de difféomorphismes. On dit que* L *est* D^{α}_{-}***-invariant*** *sous l'action de* Φ *si pour toute solution* q *de* (EL^{α}) *et tout* $(s,t) \in \mathbb{R} \times [a,b]$ *:*

$$L\Big(\varphi(s,q), D^{\alpha}_{-}\big(\varphi(s,q)\big), t\Big) = L(q, D^{\alpha}_{-}q, t).$$

On dit alors que le système (EL^{α}) *possède une* ***symétrie*** *ou encore qu'il est inchangé sous l'action de* Φ *dans le sens que pour toute solution* q *de* (EL^{α}) *et tout* $s \in \mathbb{R}$ *:*

$$\mathcal{L}^{\alpha}\big(\varphi(s,q)\big) = \mathcal{L}^{\alpha}(q).$$

Symétrie et intégrale première d'un système Lagrangien fractionnaire

Définition 6 (*Symétrie d'un SLF*)

Soit $\Phi = \big(\varphi(s,0)\big)_{s\in\mathbb{R}}$ *un groupe à un paramètre de difféomorphismes. On dit que L est* D^{α}_{-}***-invariant*** *sous l'action de* Φ *si pour toute solution q de* (EL^{α}) *et tout* $(s,t) \in \mathbb{R} \times [a,b]$ *:*

$$L\Big(\varphi(s,q), D^{\alpha}_{-}\big(\varphi(s,q)\big), t\Big) = L(q, D^{\alpha}_{-}q, t).$$

On dit alors que le système (EL^{α}) *possède une* ***symétrie*** *ou encore qu'il est inchangé sous l'action de* Φ *dans le sens que pour toute solution q de* (EL^{α}) *et tout* $s \in \mathbb{R}$ *:*

$$\mathcal{L}^{\alpha}\big(\varphi(s,q)\big) = \mathcal{L}^{\alpha}(q).$$

Définition 7 (*Intégrale première d'un SLF*)

On dit que $I: \quad \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une* ***intégrale première*** *de* (EL^{α}) *si :*

$$\forall q \text{ solution de } (EL^{\alpha}), \quad \frac{d}{dt}\big(I(q, D^{\alpha}_{-}q, t)\big) = 0$$

Symétrie et intégrale première d'un système Lagrangien fractionnaire

Définition 8 (*Symétrie d'un SLF*)

Soit $\Phi = \big(\varphi(s,0)\big)_{s\in\mathbb{R}}$ *un groupe à un paramètre de difféomorphismes. On dit que L est* D_-^α***-invariant*** *sous l'action de* Φ *si pour toute solution q de* (EL^α) *et tout* $(s,t) \in \mathbb{R} \times [a,b]$ *:*

$$L\Big(\varphi(s,q), D_-^\alpha\big(\varphi(s,q)\big), t\Big) = L(q, D_-^\alpha q, t).$$

On dit alors que le système (EL^α) *possède une* ***symétrie*** *ou encore qu'il est inchangé sous l'action de* Φ *dans le sens que pour toute solution q de* (EL^α) *et tout* $s \in \mathbb{R}$ *:*

$$\mathcal{L}^\alpha\big(\varphi(s,q)\big) = \mathcal{L}^\alpha(q).$$

Définition 9 (*Intégrale première d'un SLF*)

On dit que $I : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une* ***intégrale première*** *de* (EL^α) *si :*

$$\forall q \text{ solution de } (EL^\alpha), \quad \frac{d}{dt}\big(I(q, D_-^\alpha q, t)\big) = 0$$

Question : peut-on relier ces deux notions ?

Théorème de Noether fractionnaire ?

Avec une preuve analogue à celle du théorème de Noether classique :

Théorème 4

Si L est D^{α}_{-}-invariant sous l'action de Φ. Alors, pour toute solution q de (EL^{α}) :

$$f \; D^{\alpha}_{-} g - g \; D^{\alpha}_{+} f = 0$$

où

$$f = \frac{\partial L}{\partial v}(q, D^{\alpha}_{-} q, t) \quad \text{et} \quad g = \frac{\partial \varphi}{\partial s}(0, q).$$

G.S.F. Frederico, D.F.M. Torres *A formulation of Noether's theorem for fractional problems of the calculus of variations*. JMAA, 2007.

Théorème de Noether fractionnaire ?

Avec une preuve analogue à celle du théorème de Noether classique :

Théorème 5

Si L est D^α_--invariant sous l'action de Φ. Alors, pour toute solution q de (EL^α) :

$$f \ D^\alpha_- g - g \ D^\alpha_+ f = 0$$

où

$$f = \frac{\partial L}{\partial v}(q, D^\alpha_- q, t) \quad et \quad g = \frac{\partial \varphi}{\partial s}(0, q).$$

G.S.F. Frederico, D.F.M. Torres *A formulation of Noether's theorem for fractional problems of the calculus of variations*. JMAA, 2007.

Question : Peut-on extraire une intégrale première de ce résultat ?

Théorème de Noether classique (1918)

Pour $\alpha = 1$, par la formule de Leibniz :

$$f \; D_-^{\alpha} g - g \; D_+^{\alpha} f = f \, \dot{g} + \dot{f} \, g = 0 = \frac{d}{dt}(fg).$$

Théorème de Noether classique (1918)

Pour $\alpha = 1$, par la formule de Leibniz :

$$f \ D_-^\alpha g - g \ D_+^\alpha f = f \dot{g} + \dot{f} g = 0 = \frac{d}{dt}(fg).$$

Théorème 7 (*de Noether*)

Si L est d/dt-invariant sous l'action de Φ alors

$$\begin{array}{rccl} I : & \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,v,t) & \longmapsto & \dfrac{\partial L}{\partial v}(x,v,t)\dfrac{\partial \varphi}{\partial s}(0,x) \end{array}$$

est une intégrale première de (EL^1).

E. Noether *Invariant variation problems*. 1918.

Théorème de Noether fractionnaire ?

Théorème 8

Si L est D^α_--invariant sous l'action de Φ. Alors, pour toute solution q de (EL^α) :

$$f \; D^\alpha_- g - g \; D^\alpha_+ f = 0$$

où

$$f = \frac{\partial L}{\partial v}(q, D^\alpha_- q, t) \quad \textit{et} \quad g = \frac{\partial \varphi}{\partial s}(0, q).$$

Question : Peut-on extraire une intégrale première de ce résultat ?

Théorème de Noether fractionnaire ?

Théorème 9

Si L est D_-^α-invariant sous l'action de Φ. Alors, pour toute solution q de (EL^α) :

$$f \; D_-^\alpha g - g \; D_+^\alpha f = 0$$

où

$$f = \frac{\partial L}{\partial v}(q, D_-^\alpha q, t) \quad \textit{et} \quad g = \frac{\partial \varphi}{\partial s}(0, q).$$

Question : Peut-on extraire une intégrale première de ce résultat ?

Formules de Leibniz fractionnaires inutilisables ici.

Théorème de Noether fractionnaire ?

Théorème 10

Si L est D_-^α-invariant sous l'action de Φ. Alors, pour toute solution q de (EL^α) :

$$f\ D_-^\alpha g - g\ D_+^\alpha f = 0$$

où

$$f = \frac{\partial L}{\partial v}(q, D_-^\alpha q, t) \quad \text{et} \quad g = \frac{\partial \varphi}{\partial s}(0, q).$$

Question : Peut-on extraire une intégrale première de ce résultat ?

Formules de Leibniz fractionnaires inutilisables ici.

T.M. Atanacković, S. Konjik, S. Pilipović et S. Simić *Variational problems with fractional derivatives: invariance conditions and Noether's theorem*. Nonlinear Anal., 2009.

Absence de constantes de mouvement explicites : formulations insatisfaisantes.

Problème ouvert !

$$\begin{tikzcd}
(EL^\alpha) & \\
\mathcal{L}^\alpha \arrow[u, "\text{Princ. var.}"'] \arrow[loop left, "\text{invariance}"] \arrow[d, "\text{Frederico, Torres}"'] & \\
f\ D^\alpha_- g - g\ D^\alpha_+ f = 0 \arrow[d, dashed, "0<\alpha<1"'] \arrow[dr, "\text{Leibniz}", "\alpha=1"'] & \\
? & \mathrm{IP}
\end{tikzcd}$$

Table des matières

Discrétisation directe de (EL^α)

Rappel : $$\frac{\partial L}{\partial x}(q, D_-^\alpha q, t) + D_+^\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial v}(q, D_-^\alpha q, t) \right) = 0 \qquad (EL^\alpha)$$

Besoin des analogues discrets de l'inconnue q et des opérateurs fractionnaires $D_\pm^\alpha$.

Discrétisation directe de (EL^α)

Rappel : $\dfrac{\partial L}{\partial x}(q, D_-^\alpha q, t) + D_+^\alpha \left(\dfrac{\partial L}{\partial v}(q, D_-^\alpha q, t) \right) = 0 \qquad (EL^\alpha)$

Besoin des analogues discrets de l'inconnue q et des opérateurs fractionnaires $D_\pm^\alpha$.

$N \in \mathbb{N}^*$, $h = (b-a)/N$ et $\tau = (t_k)_{k=0,\dots,N} = (a+kh)_{k=0,\dots,N}$.

Discrétisation directe de (EL^α)

Rappel : $$\frac{\partial L}{\partial x}(q, D_-^\alpha q, t) + D_+^\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial v}(q, D_-^\alpha q, t) \right) = 0 \qquad (EL^\alpha)$$

Besoin des analogues discrets de l'inconnue q et des opérateurs fractionnaires $D_\pm^\alpha$.

$N \in \mathbb{N}^*$, $h = (b-a)/N$ et $\tau = (t_k)_{k=0,\dots,N} = (a+kh)_{k=0,\dots,N}$.

- Les versions discrètes des courbes q sont donc les éléments $Q = (Q_k)_{k=0,\dots,N}$ de $(\mathbb{R}^d)^{N+1}$.

Discrétisation directe de (EL^α)

Rappel : $\dfrac{\partial L}{\partial x}(q, D_-^\alpha q, t) + D_+^\alpha \left(\dfrac{\partial L}{\partial v}(q, D_-^\alpha q, t) \right) = 0 \qquad (EL^\alpha)$
Besoin des analogues discrets de l'inconnue q et des opérateurs fractionnaires $D_\pm^\alpha$.

$N \in \mathbb{N}^*$, $h = (b-a)/N$ et $\tau = (t_k)_{k=0,\dots,N} = (a+kh)_{k=0,\dots,N}$.

- Les versions discrètes des courbes q sont donc les éléments $Q = (Q_k)_{k=0,\dots,N}$ de $(\mathbb{R}^d)^{N+1}$. Ils sont reliés par l'application $\iota(q) = \big(q(t_k)\big)_{k=0,\dots,N}$.

Discrétisation directe de (EL^α)

Rappel : $\dfrac{\partial L}{\partial x}(q, D_-^\alpha q, t) + D_+^\alpha \left(\dfrac{\partial L}{\partial v}(q, D_-^\alpha q, t) \right) = 0 \qquad (EL^\alpha)$

Besoin des analogues discrets de l'inconnue q et des opérateurs fractionnaires $D_\pm^\alpha$.

$N \in \mathbb{N}^*$, $h = (b-a)/N$ et $\tau = (t_k)_{k=0,\dots,N} = (a+kh)_{k=0,\dots,N}$.

- Les versions discrètes des courbes q sont donc les éléments $Q = (Q_k)_{k=0,\dots,N}$ de $(\mathbb{R}^d)^{N+1}$. Ils sont reliés par l'application $\iota(q) = \big(q(t_k)\big)_{k=0,\dots,N}$.
- Les versions discrètes des opérateurs fractionnaires sont :

$$\begin{array}{rrcl} \Delta_-^\alpha : & (\mathbb{R}^d)^{N+1} & \longrightarrow & (\mathbb{R}^d)^{N+1} \\ & Q & \longmapsto & \left(\dfrac{1}{h^\alpha} \displaystyle\sum_{r=0}^{k} \alpha_r Q_{k-r} \right)_{k=0,\dots,N} \end{array},$$

$$\begin{array}{rrcl} \Delta_+^\alpha : & (\mathbb{R}^d)^{N+1} & \longrightarrow & (\mathbb{R}^d)^{N+1} \\ & Q & \longmapsto & \left(\dfrac{1}{h^\alpha} \displaystyle\sum_{r=0}^{N-k} \alpha_r Q_{k+r} \right)_{k=0,\dots,N} \end{array}.$$

Discrétisation directe de (EL^α)

$$\frac{\partial L}{\partial x}(Q, \Delta_-^\alpha Q, \tau) + \Delta_+^\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial v}(Q, \Delta_-^\alpha Q, \tau) \right) = 0. \qquad (EL_h^\alpha)$$

Discrétisation directe de (EL^α)

$$\frac{\partial L}{\partial x}(Q, \Delta_-^\alpha Q, \tau) + \Delta_+^\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial v}(Q, \Delta_-^\alpha Q, \tau) \right) = 0. \qquad (EL_h^\alpha)$$

$$\begin{tikzcd}
(EL^\alpha) \arrow[rrr, "\text{Discrétisation directe}"] & & & (EL_h^\alpha) \\
\mathcal{L}^\alpha \arrow[u, "\text{Princ. Var.}"] & & &
\end{tikzcd}$$

Discrétisation directe de (EL^α)

$$\frac{\partial L}{\partial x}(Q, \Delta_-^\alpha Q, \tau) + \Delta_+^\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial v}(Q, \Delta_-^\alpha Q, \tau) \right) = 0. \qquad (EL_h^\alpha)$$

$$\begin{tikzcd}
(EL^\alpha) \arrow[rrr, "\text{Discrétisation directe}"] & & & (EL_h^\alpha) \\
\mathcal{L}^\alpha \arrow[u, "\text{Princ. Var.}"] & & &
\end{tikzcd}$$

Théorème 13

Q est solution de (EL_h^α) si et seulement si Q est point critique de $\mathcal{L}_h^\alpha$ où :

$$\begin{array}{rccc}
\mathcal{L}_h^\alpha : & (\mathbb{R}^d)^{N+1} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
 & Q & \longmapsto & h \displaystyle\sum_{k=1}^{N} L(Q_k, (\Delta_-^\alpha Q)_k, t_k).
\end{array}$$

L. Bourdin, J. Cresson, I. Greff et P. Inizan *Variational integrators on fractional Lagrangian systems in the framework of discrete embeddings.* Soumis.

Discrétisation directe de (EL^α)

$$\frac{\partial L}{\partial x}(Q,\Delta_-^\alpha Q,\tau)+\Delta_+^\alpha\left(\frac{\partial L}{\partial v}(Q,\Delta_-^\alpha Q,\tau)\right)=0. \qquad (EL_h^\alpha)$$

$$\begin{tikzcd}
(EL^\alpha) \arrow[rrr, "\text{Discrétisation directe}"] & & & (EL_h^\alpha) \\
\mathcal{L}^\alpha \arrow[u, "\text{Princ. Var.}"] \arrow[rrr, "\text{Discrétisation de fonctionnelle}"] & & & \mathcal{L}_h^\alpha
\end{tikzcd}$$

Théorème 14

Q est solution de (EL_h^α) si et seulement si Q est point critique de $\mathcal{L}_h^\alpha$ où :

$$\begin{array}{rccl}
\mathcal{L}_h^\alpha : & (\mathbb{R}^d)^{N+1} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
& Q & \longmapsto & h\displaystyle\sum_{k=1}^{N} L(Q_k,(\Delta_-^\alpha Q)_k,t_k).
\end{array}$$

L. Bourdin, J. Cresson, I. Greff et P. Inizan *Variational integrators on fractional Lagrangian systems in the framework of discrete embeddings.* Soumis.

Discrétisation directe de (EL^α)

$$\frac{\partial L}{\partial x}(Q,\Delta_-^\alpha Q,\tau)+\Delta_+^\alpha\left(\frac{\partial L}{\partial v}(Q,\Delta_-^\alpha Q,\tau)\right)=0. \qquad (EL_h^\alpha)$$

$$\begin{tikzcd}
(EL^\alpha) \arrow[rrr, "\text{Discrétisation directe}"] & & & (EL_h^\alpha) \\
\mathcal{L}^\alpha \arrow[u, "\text{Princ. Var.}"] \arrow[rrr, "\text{Discrétisation de fonctionnelle}"] & & & \mathcal{L}_h^\alpha \arrow[u, "\text{Princ. Var. Disc.}"']
\end{tikzcd}$$

Théorème 15

Q est solution de (EL_h^α) si et seulement si Q est point critique de $\mathcal{L}_h^\alpha$ où :

$$\begin{array}{rccl}
\mathcal{L}_h^\alpha : & (\mathbb{R}^d)^{N+1} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
& Q & \longmapsto & h\displaystyle\sum_{k=1}^{N} L(Q_k,(\Delta_-^\alpha Q)_k,t_k).
\end{array}$$

L. Bourdin, J. Cresson, I. Greff et P. Inizan *Variational integrators on fractional Lagrangian systems in the framework of discrete embeddings.* Soumis.

Discrétisation directe de (EL^α)

Équation d'Euler-Lagrange fractionnaire discrète :

$$\frac{\partial L}{\partial x}(Q, \Delta_-^\alpha Q, \tau) + \Delta_+^\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial v}(Q, \Delta_-^\alpha Q, \tau) \right) = 0. \qquad (EL_h^\alpha)$$

$$\begin{tikzcd}
(EL^\alpha) \arrow[rr, "\text{Discrétisation directe}"] & & (EL_h^\alpha) \\
\mathcal{L}^\alpha \arrow[u, "\text{Princ. Var.}"] \arrow[rr, "\text{Discrétisation de fonctionnelle}"] & & \mathcal{L}_h^\alpha \arrow[u, "\text{Princ. Var. Disc.}"']
\end{tikzcd}$$

Théorème 16

Q est solution de (EL_h^α) si et seulement si Q est point critique de $\mathcal{L}_h^\alpha$ où :

$$\begin{array}{rccl}
\mathcal{L}_h^\alpha : & (\mathbb{R}^d)^{N+1} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
& Q & \longmapsto & h \displaystyle\sum_{k=1}^{N} L(Q_k, (\Delta_-^\alpha Q)_k, t_k).
\end{array}$$

L. Bourdin, J. Cresson, I. Greff et P. Inizan *Variational integrators on fractional Lagrangian systems in the framework of discrete embeddings.* Soumis.

$$
\begin{tikzcd}
(EL^{\alpha}) \arrow[rr, "\text{Discrétisation directe}"] & & (EL_h^{\alpha}) \\
\mathcal{L}^{\alpha} \arrow[u, "\text{Princ. Var.}"] \arrow[rr, "\text{Discrétisation de fonctionnelle}"] \arrow[d, "\text{Frederico, Torres}"'] \arrow[loop left, "\text{invariance}"] & & \mathcal{L}_h^{\alpha} \arrow[u, "\text{Princ. Var. D.}"'] \\
f\ D_-^{\alpha} g - g\ D_+^{\alpha} f = 0 \arrow[d, dashed, "0<\alpha<1"] \arrow[dr, "\alpha=1"', "\text{Leibniz}"] & & \\
? & \text{IP} &
\end{tikzcd}
$$

Question : On a conservation de la structure variationnelle au niveau discret. A-t-on aussi conservation du formalisme de Noether ?

2 notions (symétrie et intégrale première) à relier dans l'espace continu (ok pour $\alpha = 1$, problème ouvert pour $0 < \alpha < 1$).

2 notions (symétrie et intégrale première) à relier dans l'espace continu (ok pour $\alpha = 1$, problème ouvert pour $0 < \alpha < 1$).

Peut-on définir les analogues discrets de ces deux notions ?
Si oui, peut-on les relier dans l'espace discret ?

Symétrie et intégrale première d'un système Lagrangien fractionnaire discret

Définition 10 (*Symétrie discrète d'un SLFD*)

*Soit $\Phi = \big(\varphi(s,0)\big)_{s\in\mathbb{R}}$ un groupe à un paramètre de difféomorphismes. On dit que L est Δ_-^α-**invariant** sous l'action de Φ si pour toute solution Q de (EL_h^α) et tout $s \in \mathbb{R}$:*

$$L\Big(\varphi(s,Q), \Delta_-^\alpha\big(\varphi(s,Q)\big), \tau\Big) = L(Q, \Delta_-^\alpha Q, \tau).$$

*On dit alors que le système (EL_h^α) possède une **symétrie** ou encore qu'il est inchangé sous l'action de Φ dans le sens que pour toute solution Q de (EL_h^α) et tout $s \in \mathbb{R}$:*

$$\mathcal{L}_h^\alpha\big(\varphi(s,Q)\big) = \mathcal{L}_h^\alpha(Q).$$

Symétrie et intégrale première d'un système Lagrangien fractionnaire discret

Définition 12 (*Symétrie discrète d'un SLFD*)

Soit $\Phi = \big(\varphi(s,0)\big)_{s\in\mathbb{R}}$ *un groupe à un paramètre de difféomorphismes. On dit que* L *est* Δ_-^α***-invariant*** *sous l'action de* Φ *si pour toute solution* Q *de* (EL_h^α) *et tout* $s \in \mathbb{R}$ *:*

$$L\Big(\varphi(s,Q), \Delta_-^\alpha\big(\varphi(s,Q)\big), \tau\Big) = L(Q, \Delta_-^\alpha Q, \tau).$$

On dit alors que le système (EL_h^α) *possède une* ***symétrie*** *ou encore qu'il est inchangé sous l'action de* Φ *dans le sens que pour toute solution* Q *de* (EL_h^α) *et tout* $s \in \mathbb{R}$ *:*

$$\mathcal{L}_h^\alpha\big(\varphi(s,Q)\big) = \mathcal{L}_h^\alpha(Q).$$

Définition 13 (*Intégrale première discrète d'un SLFD*)

On dit que $I_h : (\mathbb{R}^d)^{N+1} \times (\mathbb{R}^d)^{N+1} \times [a,b]^{N+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{N+1}$ *est une* ***intégrale première discrète*** *de* (EL_h^α) *si :*

$$\forall Q \text{ solution de } (EL_h^\alpha), \quad \Delta_-^1\big(I_h(Q, \Delta_-^\alpha Q, \tau)\big) = 0$$

Symétrie et intégrale première d'un système Lagrangien fractionnaire discret

Définition 14 (*Symétrie discrète d'un SLFD*)

Soit $\Phi = \big(\varphi(s,0)\big)_{s\in\mathbb{R}}$ *un groupe à un paramètre de difféomorphismes. On dit que L est* Δ_-^α***-invariant*** *sous l'action de* Φ *si pour toute solution Q de* (EL_h^α) *et tout* $s \in \mathbb{R}$ *:*

$$L\Big(\varphi(s,Q), \Delta_-^\alpha\big(\varphi(s,Q)\big), \tau\Big) = L(Q, \Delta_-^\alpha Q, \tau).$$

On dit alors que le système (EL_h^α) *possède une* ***symétrie*** *ou encore qu'il est inchangé sous l'action de* Φ *dans le sens que pour toute solution Q de* (EL_h^α) *et tout* $s \in \mathbb{R}$ *:*

$$\mathcal{L}_h^\alpha\big(\varphi(s,Q)\big) = \mathcal{L}_h^\alpha(Q).$$

Définition 15 (*Intégrale première discrète d'un SLFD*)

On dit que $I_h : (\mathbb{R}^d)^{N+1} \times (\mathbb{R}^d)^{N+1} \times [a,b]^{N+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{N+1}$ *est une* ***intégrale première discrète*** *de* (EL_h^α) *si :*

$$\forall Q \text{ solution de } (EL_h^\alpha), \quad \Delta_-^1\big(I_h(Q, \Delta_-^\alpha Q, \tau)\big) = 0$$

Question : peut-on relier ces deux notions discrètes ?

Théorème de Noether discret fractionnaire ?

Avec une preuve analogue à celle du théorème de Noether classique :

Théorème 17

Si L est Δ_-^α-invariant sous l'action de Φ. Alors, pour toute solution Q de (EL_h^α) :

$$F \Delta_-^\alpha G - G \Delta_+^\alpha F = 0$$

où

$$F = \frac{\partial L}{\partial v}(Q, \Delta_-^\alpha Q, \tau) \quad \text{et} \quad G = \frac{\partial \varphi}{\partial s}(0, Q).$$

L. Bourdin *Discrete fractional Noether's theorem in the framework of discrete embeddings.* Soumis.

Théorème de Noether discret fractionnaire ?

Avec une preuve analogue à celle du théorème de Noether classique :

Théorème 18

Si L est Δ_-^α-invariant sous l'action de Φ. Alors, pour toute solution Q de (EL_h^α) :

$$F \Delta_-^\alpha G - G \Delta_+^\alpha F = 0$$

où

$$F = \frac{\partial L}{\partial v}(Q, \Delta_-^\alpha Q, \tau) \quad \text{et} \quad G = \frac{\partial \varphi}{\partial s}(0, Q).$$

L. Bourdin *Discrete fractional Noether's theorem in the framework of discrete embeddings.* Soumis.

Question : Peut-on extraire une intégrale première discrète de ce résultat ?

Théorème de Noether discret classique

Pour $\alpha = 1$, par la formule discrète de Leibniz :

$$F \Delta_{-}^{1} G - G \Delta_{+}^{1} F = 0 = \Delta_{-}^{1} \big(\sigma(F) G \big) \quad \text{où} \quad \sigma(F)_k = F_{k+1}$$

Théorème de Noether discret classique

Pour $\alpha = 1$, par la formule discrète de Leibniz :

$$F\Delta_-^1 G - G\Delta_+^1 F = 0 = \Delta_-^1\big(\sigma(F)G\big) \quad \text{où} \quad \sigma(F)_k = F_{k+1}$$

Théorème 20 (*de Noether discret*)

Si L est Δ_-^1-invariant sous l'action de Φ alors

$$\begin{array}{rrcl} I_h : & (\mathbb{R}^d)^{N+1} \times (\mathbb{R}^d)^{N+1} \times [a,b]^{N+1} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{N+1} \\ & (X,V,\tau) & \longmapsto & \sigma\left(\dfrac{\partial L}{\partial v}(X,V,\tau)\right)\dfrac{\partial \varphi}{\partial s}(0,X) \end{array}$$

est une intégrale première discrète de (EL_h^1).

E. Hairer, C. Lubich et G. Wanner *Geometric numerical integration*. 2006.

Théorème de Noether discret fractionnaire

Théorème 21

Si L est Δ_{-}^{α}-invariant sous l'action de Φ. Alors, pour toute solution Q de (EL_h^{α}) :

$$F \Delta_{-}^{\alpha} G - G \Delta_{+}^{\alpha} F = 0$$

où $F = (\partial L/\partial v)(Q, \Delta_{-}^{\alpha} Q, \tau)$ et $G = (\partial \varphi/\partial s)(0, Q)$.

Théorème de Noether discret fractionnaire

Théorème 23

Si L est Δ_-^α-invariant sous l'action de Φ. Alors, pour toute solution Q de (EL_h^α) :

$$F\Delta_-^\alpha G - G\Delta_+^\alpha F = 0$$

où $F = (\partial L/\partial v)(Q, \Delta_-^\alpha Q, \tau)$ et $G = (\partial \varphi/\partial s)(0, Q)$.

Système d'équations discrètes facilement manipulables contrairement au cas continu.

Théorème de Noether discret fractionnaire

Théorème 25

Si L est Δ^α_--invariant sous l'action de Φ. Alors, pour toute solution Q de (EL^α_h) :

$$F\Delta^\alpha_- G - G\Delta^\alpha_+ F = 0$$

où $F = (\partial L/\partial v)(Q, \Delta^\alpha_- Q, \tau)$ et $G = (\partial\varphi/\partial s)(0, Q)$.

Système d'équations discrètes facilement manipulables contrairement au cas continu.

Théorème 26 (*de Noether discret fractionnaire*)

Si L est Δ^α_--invariant sous l'action de Φ alors

$$\begin{array}{rccl} I_h : & (\mathbb{R}^d)^{N+1} \times (\mathbb{R}^d)^{N+1} \times [a,b]^{N+1} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{N+1} \\ & (X, V, \tau) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{p=1}^{N-1} \alpha_p A_p \left[\sigma^p \left(\frac{\partial L}{\partial v}(X, V, \tau)\right) \frac{\partial \phi}{\partial s}(0, X)\right] \end{array}$$

est une intégrale première discrète de (EL^α_h).

L. Bourdin *Discrete fractional Noether's theorem in the framework of discrete embeddings.* Soumis.

$$
\begin{tikzcd}
(EL^\alpha) \arrow[rr, "\text{Discrétisation directe}"] & & (EL_h^\alpha) \\
\mathcal{L}^\alpha \arrow[u, "\text{Princ. Var.}"] \arrow[loop left, "\text{invariance}"] \arrow[rr, "\text{Discrétisation de fonctionnelle}"] \arrow[d, "\text{Frederico, Torres}"'] & & \mathcal{L}_h^\alpha \arrow[u, "\text{Princ. Var. D.}"'] \\
f\ D_-^\alpha g - g\ D_+^\alpha f = 0 \arrow[d, dashed, "0<\alpha<1"'] \arrow[dr, "\text{Leibniz}", "\alpha=1"'] & & \\
? & \mathrm{IP} &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
(EL^{\alpha}) \arrow[rr, "\text{Discrétisation directe}"] & & (EL_h^{\alpha}) \\
\mathcal{L}^{\alpha} \arrow[u, "\text{Princ. var.}"] \arrow[loop left, "\text{Invariance}"] \arrow[rr, "\text{Discrétisation de fonctionnelle}"] \arrow[d, "\text{Frederico, Torres}"'] & & \mathcal{L}_h^{\alpha} \arrow[u, "\text{Princ. var. D.}"'] \arrow[loop right, "\text{Invariance D.}"] \\
f\ D_-^{\alpha} g - g\ D_+^{\alpha} f = 0 \arrow[d, dashed, "0<\alpha<1"'] \arrow[dr, "\alpha=1"', "\text{Leibniz}"] & & \\
? & \text{IP} &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
(EL^\alpha) \arrow[rr, "\text{Discrétisation directe}"] & & (EL_h^\alpha) \\
\mathcal{L}^\alpha \arrow[u, "\text{Princ. var.}"'] \arrow[rr, "\text{Discrétisation de fonctionnelle}"] \arrow[d, "\text{Frederico, Torres}"'] \arrow[loop left, "\text{Invariance}"] & & \mathcal{L}_h^\alpha \arrow[u, "\text{Princ. var. D.}"] \arrow[d, "\text{L.B.}"] \arrow[loop right, "\text{Invariance D.}"] \\
f\ D_-^\alpha g - g\ D_+^\alpha f = 0 \arrow[d, dashed, "0<\alpha<1"'] \arrow[dr, "\alpha=1"', "\text{Leibniz}"] & & F\Delta_-^\alpha G - G\Delta_+^\alpha F = 0 \\
? & \mathrm{IP} &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
(EL^\alpha) \arrow[rr, "\text{Discrétisation directe}"] & & (EL_h^\alpha) \\
\mathcal{L}^\alpha \arrow[u, "\text{Princ. var.}"] \arrow[loop left, "\text{Invariance}"] \arrow[rr, "\text{Discrétisation de fonctionnelle}"] \arrow[d, "\text{Frederico, Torres}"'] & & \mathcal{L}_h^\alpha \arrow[u, "\text{Princ. var. D.}"'] \arrow[loop right, "\text{Invariance D.}"] \arrow[d, "\text{L.B.}"] \\
f\ D_-^\alpha g - g\ D_+^\alpha f = 0 \arrow[rr, "\text{Discrétisation directe}"] \arrow[dd, dashed, "0<\alpha<1"'] \arrow[dr, "\alpha=1"', "\text{Leibniz}"] & & F\Delta_-^\alpha G - G\Delta_+^\alpha F = 0 \\
& \text{IP} & \\
? & &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
(EL^\alpha) \arrow[rrr, "\text{Discrétisation directe}"] & & & (EL_h^\alpha) \\
\mathcal{L}^\alpha \arrow[u, "\text{Princ. var.}"] \arrow[d, "\text{Frederico, Torres}"'] \arrow[rrr, "\text{Discrétisation de fonctionnelle}"] \arrow[loop left, "\text{Invariance}"] & & & \mathcal{L}_h^\alpha \arrow[u, "\text{Princ. var. D.}"'] \arrow[d, "\text{L.B.}"] \arrow[loop right, "\text{Invariance D.}"] \\
f\ D_-^\alpha g - g\ D_+^\alpha f = 0 \arrow[rrr, "\text{Discrétisation directe}"] \arrow[ddr, "\alpha=1"] \arrow[ddd, dashed, "0<\alpha<1"'] & & & F\Delta_-^\alpha G - G\Delta_+^\alpha F = 0 \arrow[ddl, "\alpha=1"'] \\
& \text{Leibniz} \arrow[r, "\text{modulo } \sigma"] & \text{Leibniz D.} & \\
& \text{IP} \arrow[r, "\text{mod. } \sigma"] & \text{IPD} & \\
? & & &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
(EL^\alpha) \arrow[rrr, "\text{Discrétisation directe}"] & & & (EL_h^\alpha) \\
\mathcal{L}^\alpha \arrow[u, "\text{Princ. var.}"'] \arrow[d, "\text{Frederico, Torres}"'] \arrow[rrr, "\text{Discrétisation de fonctionnelle}"] \arrow[loop left, "\text{Invariance}"] & & & \mathcal{L}_h^\alpha \arrow[u, "\text{Princ. var. D.}"] \arrow[d, "\text{L.B.}"] \arrow[loop right, "\text{Invariance D.}"] \\
f\ D_-^\alpha g - g\ D_+^\alpha f = 0 \arrow[rrr, "\text{Discrétisation directe}"] \arrow[ddd, dashed, "0<\alpha<1"'] \arrow[ddr, "\alpha=1"] & & & F\Delta_-^\alpha G - G\Delta_+^\alpha F = 0 \arrow[ddl, "\alpha=1"'] \arrow[ddd, "0<\alpha<1"] \\
& \text{Leibniz} \arrow[r, "\text{modulo } \sigma"] & \text{Leibniz D.} & \\
& \text{IP} \arrow[r, "\text{mod. } \sigma"] & \text{IPD} & \\
? & & & \text{IPD}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
(EL^{\alpha}) \arrow[rrr, "\text{Discrétisation directe}"] & & & (EL_h^{\alpha}) \\
\mathcal{L}^{\alpha} \arrow[u, "\text{Princ. var.}"] \arrow[d, "\text{Frederico, Torres}"'] \arrow[loop left, "\text{Invariance}"] \arrow[rrr, "\text{Discrétisation de fonctionnelle}"] & & & \mathcal{L}_h^{\alpha} \arrow[u, "\text{Princ. var. D.}"'] \arrow[d, "\text{L.B.}"] \arrow[loop right, "\text{Invariance D.}"] \\
f\ D_-^{\alpha} g - g\ D_+^{\alpha} f = 0 \arrow[rrr, "\text{Discrétisation directe}"] \arrow[ddr, "\alpha=1"] \arrow[ddd, dashed, "0<\alpha<1"'] & & & F\Delta_-^{\alpha} G - G\Delta_+^{\alpha} F = 0 \arrow[ddl, "\alpha=1"'] \arrow[ddd, "0<\alpha<1"] \\
& \text{Leibniz} \arrow[r, "\text{modulo } \sigma"] & \text{Leibniz D.} & \\
& \text{IP} \arrow[r, "\text{mod. } \sigma"] & \text{IPD} & \\
? \arrow[rrr, dashed] & & & \text{IPD}
\end{tikzcd}
$$

Merci pour votre attention.