

Un théorème de Noether discret fractionnaire dans le cadre des plongements discrets

Loïc Bourdin

Laboratoire de Mathématiques Appliquées,
Université de Pau et des Pays de l'Adour

Congrès SMAI 2011
5ème Biennale française des Mathématiques Appliquées,
à Guidel le 25 mai 2011



Un théorème de Noether discret fractionnaire dans le cadre des plongements discrets



L. Bourdin, J. Cresson, I. Greff et P. Inizan *Variational integrators on fractional Lagrangian systems in the framework of discrete embeddings*. Soumis. Preprint arXiv:1103.0465v1[math.DS]



L. Bourdin *Discrete fractional Noether's theorem in the framework of discrete embeddings*. Soumis.

<http://lbourdi1.perso.univ-pau.fr/index>

Théorème de Noether discret fractionnaire : Pourquoi un tel résultat ?

- **Qu'est-ce que le calcul fractionnaire ?**

$f, \dot{f}, \ddot{f}, f^{(3)}, \dots, f^{(n)}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Question de L'Hospital à Leibniz (1695) : $f^{(\alpha)}$ pour $\alpha = 1/2$? pour $\alpha > 0$?



S.G. Samko, A.A. Kilbas et O.I. Marichev *Fractional integrals and derivatives* 1993.

Théorème de Noether discret fractionnaire : Pourquoi un tel résultat ?

- **Qu'est-ce que le calcul fractionnaire ?**
- **Extension du formalisme Lagrangien au cas fractionnaire :**
Les systèmes Lagrangiens codent les systèmes dynamiques possédant une structure variationnelle Lagrangienne (provenant d'une minimisation de fonctionnelle Lagrangienne).
Exemples : Équation de Laplace, pendule simple (OK). Équation de la chaleur, de Navier-Stokes (NON).
Problème : Cela ne concerne essentiellement que des systèmes **conservatifs**.
Idée : Trouver des structures variationnelles **fractionnaires** pour les systèmes **non conservatifs**.
Exemples : Équation de convection-diffusion, de Newton avec friction.

Théorème de Noether discret fractionnaire : Pourquoi un tel résultat ?

- **Qu'est-ce que le calcul fractionnaire ?**
- **Extension du formalisme Lagrangien au cas fractionnaire :**
- **Théorème de Noether fractionnaire ?**

Théorème de Noether classique : Si un système Lagrangien exhibe une symmétrie alors une constante de mouvement (intégrale première) peut être explicitée.

Question : Peut-on formuler un résultat similaire pour les systèmes Lagrangiens fractionnaires ? **Problème ouvert.**

Théorème de Noether discret fractionnaire : Pourquoi un tel résultat ?

- **Qu'est-ce que le calcul fractionnaire ?**
- **Extension du formalisme Lagrangien au cas fractionnaire :**
- **Théorème de Noether fractionnaire ?**
- **Discrétisation des systèmes Lagrangiens fractionnaires :**
En règle général, les systèmes fractionnaires sont difficiles à résoudre explicitement.
Besoin de schémas numériques.
La formulation d'un théorème de Noether discret fractionnaire peut fournir des intuitions sur la version continue encore hypothétique.

- 1 Dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov
- 2 Systèmes Lagrangiens fractionnaires
- 3 Discrétisation des systèmes Lagrangiens fractionnaires

Table des matières

- 1 Dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov
- 2 Systèmes Lagrangiens fractionnaires
- 3 Discrétisation des systèmes Lagrangiens fractionnaires

Notion de Grünwald-Letnikov (1867-1868)

Formule de la n -ième semi-dérivée de f :

$$(\pm d_{\mp})^n f(t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^n (-1)^r C_n^r f(t \mp rh).$$

Notion de Grünwald-Letnikov (1867-1868)

Formule de la n -ième semi-dérivée de f :

$$(\pm d_{\mp})^n f(t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^n (-1)^r C_n^r f(t \mp rh).$$

Définition 2 (Grünwald-Letnikov)

Pour $\alpha > 0$ et $f \in C^{-[-\alpha]}([a, b], \mathbb{R}^d)$, on définit :

$$\forall a < t \leq b, \quad D_-^\alpha f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh = t - a}} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{r=0}^n \alpha_r f(t - rh)$$

$$\forall a \leq t < b, \quad D_+^\alpha f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh = b - t}} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{r=0}^n \alpha_r f(t + rh)$$

les **dérivées fractionnaires** à gauche et à droite de f d'ordre α au sens de Grünwald-Letnikov (où $\alpha_r = (-1)^r C_\alpha^r$).

Notion de Grünwald-Letnikov (1867-1868)

Formule de la n -ième semi-dérivée de f :

$$(\pm d_{\mp})^n f(t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^n (-1)^r C_n^r f(t \mp rh).$$

Définition 3 (Grünwald-Letnikov)

Pour $\alpha > 0$ et $f \in C^{-[\alpha]}([a, b], \mathbb{R}^d)$, on définit :

$$\forall a < t \leq b, \quad D_-^\alpha f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh = t - a}} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{r=0}^n \alpha_r f(t - rh)$$

$$\forall a \leq t < b, \quad D_+^\alpha f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh = b - t}} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{r=0}^n \alpha_r f(t + rh)$$

les **dérivées fractionnaires** à gauche et à droite de f d'ordre α au sens de Grünwald-Letnikov (où $\alpha_r = (-1)^r C_n^r$).

Généralisation de la notion classique de dérivée :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad D_-^n f = f^{(n)} \quad \text{et} \quad D_+^n f = (-1)^n f^{(n)}$$

Table des matières

- 1 Dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov
- 2 Systèmes Lagrangiens fractionnaires
- 3 Discrétisation des systèmes Lagrangiens fractionnaires

Équation d'Euler-Lagrange fractionnaire ($0 < \alpha \leq 1$)

Soient \mathcal{L}^α la **fonctionnelle Lagrangienne fractionnaire** associée au **Lagrangien** L de classe \mathcal{C}^2 suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^\alpha : \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R}^d) &\longrightarrow \mathbb{R} & L : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ q &\longmapsto \int_a^b L(q, D_-^\alpha q, t) dt & (x, v, t) &\longmapsto L(x, v, t). \end{aligned}$$



Équation d'Euler-Lagrange fractionnaire ($0 < \alpha \leq 1$)

Soient \mathcal{L}^α la **fonctionnelle Lagrangienne fractionnaire** associée au **Lagrangien** L de classe \mathcal{C}^2 suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^\alpha : \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R}^d) &\longrightarrow \mathbb{R} & L : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ q &\longmapsto \int_a^b L(q, D_-^\alpha q, t) dt & (x, v, t) &\longmapsto L(x, v, t). \end{aligned}$$

Théorème 2 (Équation d'Euler-Lagrange fractionnaire)

q est point critique de \mathcal{L}^α si et seulement si :

$$\frac{\partial L}{\partial x}(q, D_-^\alpha q, t) + D_+^\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial v}(q, D_-^\alpha q, t) \right) = 0. \quad (EL^\alpha)$$



O.P. Agrawal *Formulation of Euler-Lagrange equations for fractional variational problems*. JMAA, 2002.

Équation d'Euler-Lagrange fractionnaire ($0 < \alpha \leq 1$)

Soient \mathcal{L}^α la **fonctionnelle Lagrangienne fractionnaire** associée au **Lagrangien** L de classe \mathcal{C}^2 suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^\alpha : \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R}^d) &\longrightarrow \mathbb{R} & L : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ q &\longmapsto \int_a^b L(q, D_-^\alpha q, t) dt & (x, v, t) &\longmapsto L(x, v, t). \end{aligned}$$

Théorème 3 (Équation d'Euler-Lagrange fractionnaire)

q est point critique de \mathcal{L}^α si et seulement si :

$$\frac{\partial L}{\partial x}(q, D_-^\alpha q, t) + D_+^\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial v}(q, D_-^\alpha q, t) \right) = 0. \quad (EL^\alpha)$$



O.P. Agrawal *Formulation of Euler-Lagrange equations for fractional variational problems*. JMAA, 2002.

Cas classique ($\alpha = 1$), on retrouve l'équation d'Euler-Lagrange classique (1750) :

$$\frac{\partial L}{\partial x}(q, \dot{q}, t) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v}(q, \dot{q}, t) \right) = 0. \quad (EL^1)$$

Symétrie et intégrale première d'un système Lagrangien fractionnaire

Définition 4 (Symétrie d'un SLF)

Soit $\Phi = (\varphi(s, 0))_{s \in \mathbb{R}}$ un groupe à un paramètre de difféomorphismes. On dit que L est D_-^α -**invariant** sous l'action de Φ si pour toute solution q de (EL^α) et tout $(s, t) \in \mathbb{R} \times [a, b]$:

$$L(\varphi(s, q), D_-^\alpha(\varphi(s, q)), t) = L(q, D_-^\alpha q, t).$$

On dit alors que le système (EL^α) possède une **symétrie** ou encore qu'il est inchangé sous l'action de Φ dans le sens que pour toute solution q de (EL^α) et tout $s \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{L}^\alpha(\varphi(s, q)) = \mathcal{L}^\alpha(q).$$

Symétrie et intégrale première d'un système Lagrangien fractionnaire

Définition 6 (Symétrie d'un SLF)

Soit $\Phi = (\varphi(s, 0))_{s \in \mathbb{R}}$ un groupe à un paramètre de difféomorphismes. On dit que L est D_-^α -**invariant** sous l'action de Φ si pour toute solution q de (EL^α) et tout $(s, t) \in \mathbb{R} \times [a, b]$:

$$L(\varphi(s, q), D_-^\alpha(\varphi(s, q)), t) = L(q, D_-^\alpha q, t).$$

On dit alors que le système (EL^α) possède une **symétrie** ou encore qu'il est inchangé sous l'action de Φ dans le sens que pour toute solution q de (EL^α) et tout $s \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{L}^\alpha(\varphi(s, q)) = \mathcal{L}^\alpha(q).$$

Définition 7 (Intégrale première d'un SLF)

On dit que $I : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une **intégrale première** de (EL^α) si :

$$\forall q \text{ solution de } (EL^\alpha), \quad \frac{d}{dt}(I(q, D_-^\alpha q, t)) = 0$$

Symétrie et intégrale première d'un système Lagrangien fractionnaire

Définition 8 (Symétrie d'un SLF)

Soit $\Phi = (\varphi(s, 0))_{s \in \mathbb{R}}$ un groupe à un paramètre de difféomorphismes. On dit que L est D_-^α -**invariant** sous l'action de Φ si pour toute solution q de (EL^α) et tout $(s, t) \in \mathbb{R} \times [a, b]$:

$$L(\varphi(s, q), D_-^\alpha(\varphi(s, q)), t) = L(q, D_-^\alpha q, t).$$

On dit alors que le système (EL^α) possède une **symétrie** ou encore qu'il est inchangé sous l'action de Φ dans le sens que pour toute solution q de (EL^α) et tout $s \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{L}^\alpha(\varphi(s, q)) = \mathcal{L}^\alpha(q).$$

Définition 9 (Intégrale première d'un SLF)

On dit que $I : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une **intégrale première** de (EL^α) si :

$$\forall q \text{ solution de } (EL^\alpha), \quad \frac{d}{dt}(I(q, D_-^\alpha q, t)) = 0$$

Question : peut-on relier ces deux notions ?

Théorème de Noether fractionnaire ?

Avec une preuve analogue à celle du théorème de Noether classique :

Théorème 4

Si L est D_-^α -invariant sous l'action de Φ . Alors, pour toute solution q de (EL^α) :

$$f D_-^\alpha g - g D_+^\alpha f = 0$$

où

$$f = \frac{\partial L}{\partial v}(q, D_-^\alpha q, t) \quad \text{et} \quad g = \frac{\partial \varphi}{\partial s}(0, q).$$



G.S.F. Frederico, D.F.M. Torres *A formulation of Noether's theorem for fractional problems of the calculus of variations*. JMAA, 2007.

Théorème de Noether fractionnaire ?

Avec une preuve analogue à celle du théorème de Noether classique :

Théorème 5

Si L est D_-^α -invariant sous l'action de Φ . Alors, pour toute solution q de (EL^α) :

$$f D_-^\alpha g - g D_+^\alpha f = 0$$

où

$$f = \frac{\partial L}{\partial v}(q, D_-^\alpha q, t) \quad \text{et} \quad g = \frac{\partial \varphi}{\partial s}(0, q).$$



G.S.F. Frederico, D.F.M. Torres *A formulation of Noether's theorem for fractional problems of the calculus of variations*. JMAA, 2007.

Question : Peut-on extraire une intégrale première de ce résultat ?

Théorème de Noether classique (1918)

Pour $\alpha = 1$, par la formule de Leibniz :

$$f D_-^\alpha g - g D_+^\alpha f = f \dot{g} + \dot{f} g = 0 = \frac{d}{dt}(fg).$$



Théorème de Noether classique (1918)

Pour $\alpha = 1$, par la formule de Leibniz :

$$f D_-^\alpha g - g D_+^\alpha f = f \dot{g} + \dot{f} g = 0 = \frac{d}{dt}(fg).$$

Théorème 7 (de Noether)

Si L est d/dt -invariant sous l'action de Φ alors

$$\begin{aligned} I : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, v, t) &\longmapsto \frac{\partial L}{\partial v}(x, v, t) \frac{\partial \varphi}{\partial s}(0, x) \end{aligned}$$

est une intégrale première de (EL^1) .

 [E. Noether Invariant variation problems. 1918.](#)

Théorème de Noether fractionnaire ?

Théorème 8

Si L est D_-^α -invariant sous l'action de Φ . Alors, pour toute solution q de (EL^α) :

$$f D_-^\alpha g - g D_+^\alpha f = 0$$

où

$$f = \frac{\partial L}{\partial v}(q, D_-^\alpha q, t) \quad \text{et} \quad g = \frac{\partial \varphi}{\partial s}(0, q).$$

Question : Peut-on extraire une intégrale première de ce résultat ?



Théorème de Noether fractionnaire ?

Théorème 9

Si L est D_-^α -invariant sous l'action de Φ . Alors, pour toute solution q de (EL^α) :

$$f D_-^\alpha g - g D_+^\alpha f = 0$$

où

$$f = \frac{\partial L}{\partial v}(q, D_-^\alpha q, t) \quad \text{et} \quad g = \frac{\partial \varphi}{\partial s}(0, q).$$

Question : Peut-on extraire une intégrale première de ce résultat ?

Formules de Leibniz fractionnaires **inutilisables** ici.



Théorème de Noether fractionnaire ?

Théorème 10

Si L est D_-^α -invariant sous l'action de Φ . Alors, pour toute solution q de (EL^α) :

$$f D_-^\alpha g - g D_+^\alpha f = 0$$

où

$$f = \frac{\partial L}{\partial v}(q, D_-^\alpha q, t) \quad \text{et} \quad g = \frac{\partial \varphi}{\partial s}(0, q).$$

Question : Peut-on extraire une intégrale première de ce résultat ?

Formules de Leibniz fractionnaires **inutilisables** ici.



T.M. Atanacković, S. Konjik, S. Pilipović et S. Simić *Variational problems with fractional derivatives: invariance conditions and Noether's theorem*. *Nonlinear Anal.*, 2009.

Absence de constantes de mouvement **explicites** : formulations insatisfaisantes.

Problème ouvert !

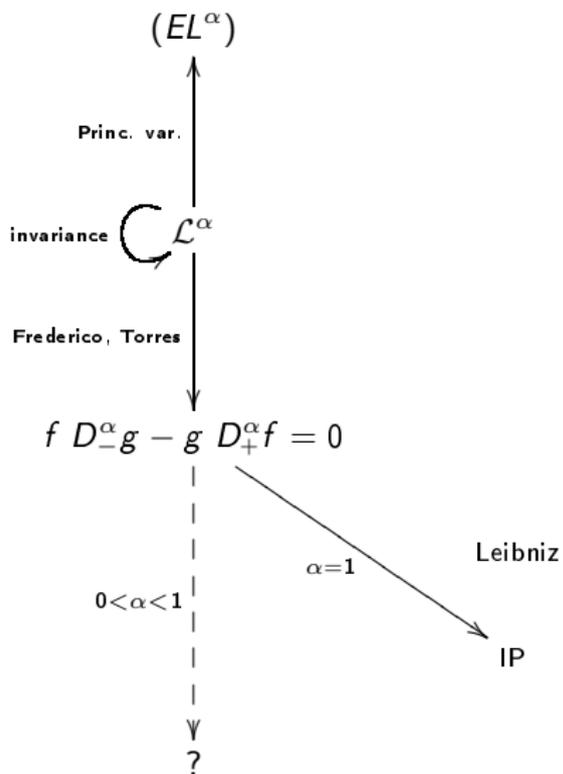


Table des matières

- 1 Dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov
- 2 Systèmes Lagrangiens fractionnaires
- 3 Discrétisation des systèmes Lagrangiens fractionnaires

Discrétisation directe de (EL^α)

Rappel : $\frac{\partial L}{\partial x}(q, D_-^\alpha q, t) + D_+^\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial v}(q, D_-^\alpha q, t) \right) = 0 \quad (EL^\alpha)$

Besoin des analogues discrets de l'inconnue q et des opérateurs fractionnaires D_\pm^α .

Discrétisation directe de (EL^α)

Rappel : $\frac{\partial L}{\partial x}(q, D_-^\alpha q, t) + D_+^\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial v}(q, D_-^\alpha q, t) \right) = 0 \quad (EL^\alpha)$

Besoin des analogues discrets de l'inconnue q et des opérateurs fractionnaires D_\pm^α .

$N \in \mathbb{N}^*$, $h = (b - a)/N$ et $\tau = (t_k)_{k=0, \dots, N} = (a + kh)_{k=0, \dots, N}$.

Discrétisation directe de (EL^α)

Rappel : $\frac{\partial L}{\partial x}(q, D_-^\alpha q, t) + D_+^\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial v}(q, D_-^\alpha q, t) \right) = 0 \quad (EL^\alpha)$

Besoin des analogues discrets de l'inconnue q et des opérateurs fractionnaires D_\pm^α .

$N \in \mathbb{N}^*$, $h = (b - a)/N$ et $\tau = (t_k)_{k=0, \dots, N} = (a + kh)_{k=0, \dots, N}$.

- Les versions discrètes des courbes q sont donc les éléments $Q = (Q_k)_{k=0, \dots, N}$ de $(\mathbb{R}^d)^{N+1}$.

Discrétisation directe de (EL^α)

Rappel :
$$\frac{\partial L}{\partial x}(q, D_-^\alpha q, t) + D_+^\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial v}(q, D_-^\alpha q, t) \right) = 0 \quad (EL^\alpha)$$

Besoin des analogues discrets de l'inconnue q et des opérateurs fractionnaires D_\pm^α .

$N \in \mathbb{N}^*$, $h = (b - a)/N$ et $\tau = (t_k)_{k=0, \dots, N} = (a + kh)_{k=0, \dots, N}$.

- Les versions discrètes des courbes q sont donc les éléments $Q = (Q_k)_{k=0, \dots, N}$ de $(\mathbb{R}^d)^{N+1}$. Ils sont reliés par l'application $\iota(q) = (q(t_k))_{k=0, \dots, N}$.

Discrétisation directe de (EL^α)

Rappel : $\frac{\partial L}{\partial x}(q, D_-^\alpha q, t) + D_+^\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial v}(q, D_-^\alpha q, t) \right) = 0 \quad (EL^\alpha)$

Besoin des analogues discrets de l'inconnue q et des opérateurs fractionnaires D_\pm^α .

$N \in \mathbb{N}^*$, $h = (b - a)/N$ et $\tau = (t_k)_{k=0, \dots, N} = (a + kh)_{k=0, \dots, N}$.

- Les versions discrètes des courbes q sont donc les éléments $Q = (Q_k)_{k=0, \dots, N}$ de $(\mathbb{R}^d)^{N+1}$. Ils sont reliés par l'application $\iota(q) = (q(t_k))_{k=0, \dots, N}$.
- Les versions discrètes des opérateurs fractionnaires sont :

$$\Delta_-^\alpha : (\mathbb{R}^d)^{N+1} \longrightarrow (\mathbb{R}^d)^{N+1}$$

$$Q \longmapsto \left(\frac{1}{h^\alpha} \sum_{r=0}^k \alpha_r Q_{k-r} \right)_{k=0, \dots, N},$$

$$\Delta_+^\alpha : (\mathbb{R}^d)^{N+1} \longrightarrow (\mathbb{R}^d)^{N+1}$$

$$Q \longmapsto \left(\frac{1}{h^\alpha} \sum_{r=0}^{N-k} \alpha_r Q_{k+r} \right)_{k=0, \dots, N}.$$

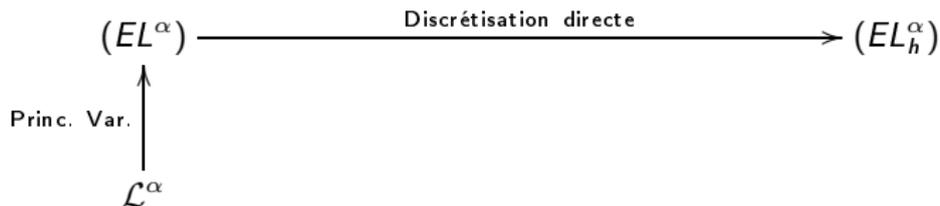
Discrétisation directe de (EL^α)

$$\frac{\partial L}{\partial x}(Q, \Delta_-^\alpha Q, \tau) + \Delta_+^\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial v}(Q, \Delta_-^\alpha Q, \tau) \right) = 0. \quad (EL_h^\alpha)$$



Discrétisation directe de (EL^α)

$$\frac{\partial L}{\partial X}(Q, \Delta_-^\alpha Q, \tau) + \Delta_+^\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial V}(Q, \Delta_-^\alpha Q, \tau) \right) = 0. \quad (EL_h^\alpha)$$



Discretisation directe de (EL^α)

$$\frac{\partial L}{\partial X}(Q, \Delta_-^\alpha Q, \tau) + \Delta_+^\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial V}(Q, \Delta_-^\alpha Q, \tau) \right) = 0. \quad (EL_h^\alpha)$$

**Théorème 13**

Q est solution de (EL_h^α) si et seulement si Q est point critique de \mathcal{L}_h^α où :

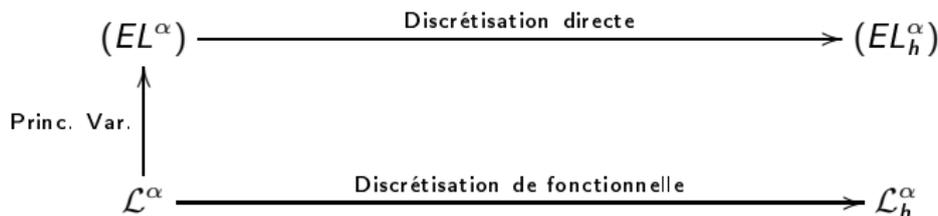
$$\begin{aligned} \mathcal{L}_h^\alpha : (\mathbb{R}^d)^{N+1} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ Q &\longmapsto h \sum_{k=1}^N L(Q_k, (\Delta_-^\alpha Q)_k, t_k). \end{aligned}$$



L. Bourdin, J. Cresson, I. Greff et P. Inizan *Variational integrators on fractional Lagrangian systems in the framework of discrete embeddings*, Soumis.

Discretisation directe de (EL^α)

$$\frac{\partial L}{\partial X}(Q, \Delta_-^\alpha Q, \tau) + \Delta_+^\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial V}(Q, \Delta_-^\alpha Q, \tau) \right) = 0. \quad (EL_h^\alpha)$$

**Théorème 14**

Q est solution de (EL_h^α) si et seulement si Q est point critique de \mathcal{L}_h^α où :

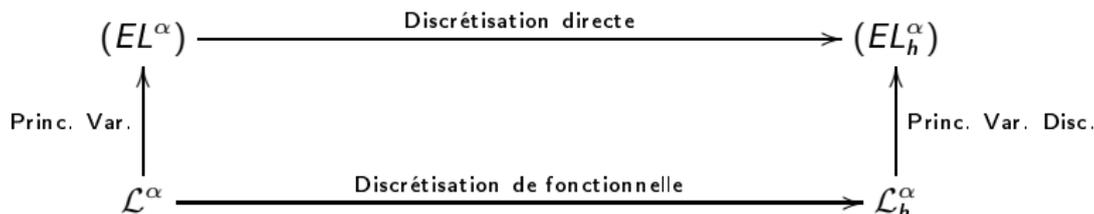
$$\begin{aligned} \mathcal{L}_h^\alpha : (\mathbb{R}^d)^{N+1} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ Q &\longmapsto h \sum_{k=1}^N L(Q_k, (\Delta_-^\alpha Q)_k, t_k). \end{aligned}$$



L. Bourdin, J. Cresson, I. Greff et P. Inizan *Variational integrators on fractional Lagrangian systems in the framework of discrete embeddings*, Soumis.

Discrétisation directe de (EL^α)

$$\frac{\partial L}{\partial X}(Q, \Delta_-^\alpha Q, \tau) + \Delta_+^\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial V}(Q, \Delta_-^\alpha Q, \tau) \right) = 0. \quad (EL_h^\alpha)$$

**Théorème 15**

Q est solution de (EL_h^α) si et seulement si Q est point critique de \mathcal{L}_h^α où :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_h^\alpha : (\mathbb{R}^d)^{N+1} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ Q &\longmapsto h \sum_{k=1}^N L(Q_k, (\Delta_-^\alpha Q)_k, t_k). \end{aligned}$$

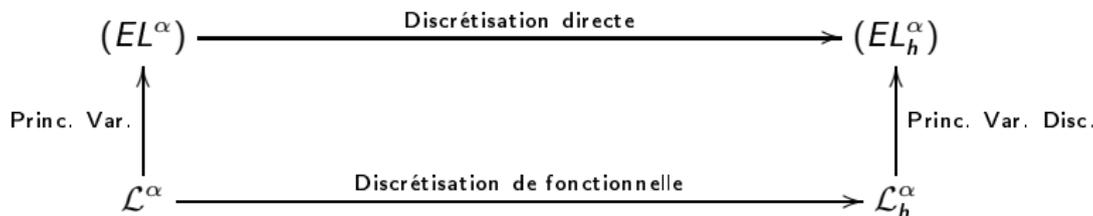


L. Bourdin, J. Cresson, I. Greff et P. Inizan *Variational integrators on fractional Lagrangian systems in the framework of discrete embeddings*, Soumis.

Discrétisation directe de (EL^α)

Équation d'Euler-Lagrange fractionnaire discrète :

$$\frac{\partial L}{\partial x}(Q, \Delta_-^\alpha Q, \tau) + \Delta_+^\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial v}(Q, \Delta_-^\alpha Q, \tau) \right) = 0. \quad (EL_h^\alpha)$$

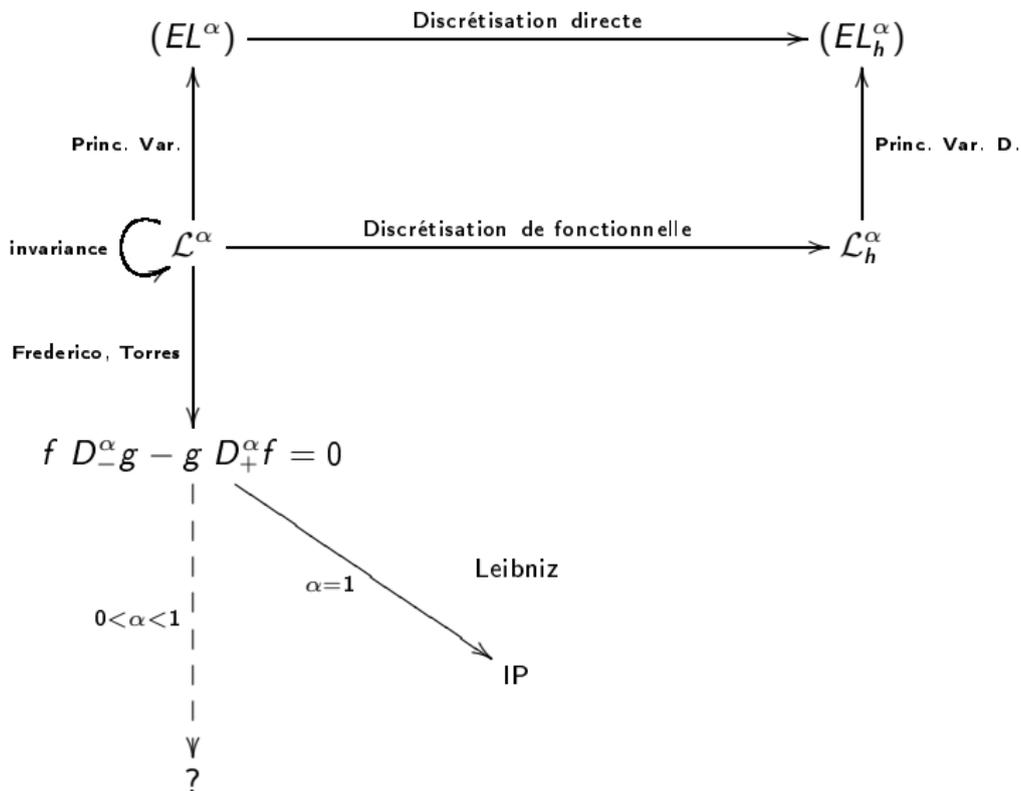
**Théorème 16**

Q est solution de (EL_h^α) si et seulement si Q est point critique de \mathcal{L}_h^α où :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_h^\alpha : (\mathbb{R}^d)^{N+1} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ Q &\longmapsto h \sum_{k=1}^N L(Q_k, (\Delta_-^\alpha Q)_k, t_k). \end{aligned}$$



L. Bourdin, J. Cresson, I. Greff et P. Inizan *Variational integrators on fractional Lagrangian systems in the framework of discrete embeddings*. Soumis.



Question : On a conservation de la structure variationnelle au niveau discret. **A-t-on aussi conservation du formalisme de Noether ?**

2 notions (symétrie et intégrale première) à relier dans l'espace continu
(ok pour $\alpha = 1$, problème ouvert pour $0 < \alpha < 1$).

2 notions (symétrie et intégrale première) à relier dans l'espace continu
(ok pour $\alpha = 1$, problème ouvert pour $0 < \alpha < 1$).

Peut-on définir les analogues discrets de ces deux notions ?
Si oui, peut-on les relier dans l'espace discret ?

Symétrie et intégrale première d'un système Lagrangien fractionnaire **discret****Définition 10 (Symétrie discrète d'un SLFD)**

Soit $\Phi = (\varphi(s, 0))_{s \in \mathbb{R}}$ un groupe à un paramètre de difféomorphismes. On dit que L est Δ_-^α -**invariant** sous l'action de Φ si pour toute solution Q de (EL_h^α) et tout $s \in \mathbb{R}$:

$$L(\varphi(s, Q), \Delta_-^\alpha(\varphi(s, Q)), \tau) = L(Q, \Delta_-^\alpha Q, \tau).$$

On dit alors que le système (EL_h^α) possède une **symétrie** ou encore qu'il est inchangé sous l'action de Φ dans le sens que pour toute solution Q de (EL_h^α) et tout $s \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{L}_h^\alpha(\varphi(s, Q)) = \mathcal{L}_h^\alpha(Q).$$

Symétrie et intégrale première d'un système Lagrangien fractionnaire **discret****Définition 12 (Symétrie discrète d'un SLFD)**

Soit $\Phi = (\varphi(s, 0))_{s \in \mathbb{R}}$ un groupe à un paramètre de difféomorphismes. On dit que L est Δ_-^α -**invariant** sous l'action de Φ si pour toute solution Q de (EL_h^α) et tout $s \in \mathbb{R}$:

$$L(\varphi(s, Q), \Delta_-^\alpha(\varphi(s, Q)), \tau) = L(Q, \Delta_-^\alpha Q, \tau).$$

On dit alors que le système (EL_h^α) possède une **symétrie** ou encore qu'il est inchangé sous l'action de Φ dans le sens que pour toute solution Q de (EL_h^α) et tout $s \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{L}_h^\alpha(\varphi(s, Q)) = \mathcal{L}_h^\alpha(Q).$$

Définition 13 (Intégrale première discrète d'un SLFD)

On dit que $I_h : (\mathbb{R}^d)^{N+1} \times (\mathbb{R}^d)^{N+1} \times [a, b]^{N+1} \rightarrow \mathbb{R}^{N+1}$ est une **intégrale première discrète** de (EL_h^α) si :

$$\forall Q \text{ solution de } (EL_h^\alpha), \quad \Delta_-^1(I_h(Q, \Delta_-^\alpha Q, \tau)) = 0$$

Symétrie et intégrale première d'un système Lagrangien fractionnaire **discret****Définition 14 (Symétrie discrète d'un SLFD)**

Soit $\Phi = (\varphi(s, 0))_{s \in \mathbb{R}}$ un groupe à un paramètre de difféomorphismes. On dit que L est Δ_-^α -**invariant** sous l'action de Φ si pour toute solution Q de (EL_h^α) et tout $s \in \mathbb{R}$:

$$L(\varphi(s, Q), \Delta_-^\alpha(\varphi(s, Q)), \tau) = L(Q, \Delta_-^\alpha Q, \tau).$$

On dit alors que le système (EL_h^α) possède une **symétrie** ou encore qu'il est inchangé sous l'action de Φ dans le sens que pour toute solution Q de (EL_h^α) et tout $s \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{L}_h^\alpha(\varphi(s, Q)) = \mathcal{L}_h^\alpha(Q).$$

Définition 15 (Intégrale première discrète d'un SLFD)

On dit que $I_h : (\mathbb{R}^d)^{N+1} \times (\mathbb{R}^d)^{N+1} \times [a, b]^{N+1} \rightarrow \mathbb{R}^{N+1}$ est une **intégrale première discrète** de (EL_h^α) si :

$$\forall Q \text{ solution de } (EL_h^\alpha), \quad \Delta_-^1(I_h(Q, \Delta_-^\alpha Q, \tau)) = 0$$

Question : peut-on relier ces deux notions **discrètes** ?

Théorème de Noether **discret** fractionnaire ?

Avec une preuve analogue à celle du théorème de Noether classique :

Théorème 17

Si L est Δ_-^α -invariant sous l'action de Φ . Alors, pour toute solution Q de (EL_h^α) :

$$F \Delta_-^\alpha G - G \Delta_+^\alpha F = 0$$

où

$$F = \frac{\partial L}{\partial v}(Q, \Delta_-^\alpha Q, \tau) \quad \text{et} \quad G = \frac{\partial \varphi}{\partial s}(0, Q).$$



L. Bourdin *Discrete fractional Noether's theorem in the framework of discrete embeddings*. Soumis.

Théorème de Noether **discret** fractionnaire ?

Avec une preuve analogue à celle du théorème de Noether classique :

Théorème 18

Si L est Δ_-^α -invariant sous l'action de Φ . Alors, pour toute solution Q de (EL_h^α) :

$$F \Delta_-^\alpha G - G \Delta_+^\alpha F = 0$$

où

$$F = \frac{\partial L}{\partial v}(Q, \Delta_-^\alpha Q, \tau) \quad \text{et} \quad G = \frac{\partial \varphi}{\partial s}(0, Q).$$



L. Bourdin *Discrete fractional Noether's theorem in the framework of discrete embeddings*. Soumis.

Question : Peut-on extraire une intégrale première **discrète** de ce résultat ?

Théorème de Noether **discret** classique

Pour $\alpha = 1$, par la formule **discrète** de Leibniz :

$$F\Delta_-^1 G - G\Delta_+^1 F = 0 = \Delta_-^1 (\sigma(F)G) \quad \text{où} \quad \sigma(F)_k = F_{k+1}$$



Théorème de Noether **discret** classique

Pour $\alpha = 1$, par la formule **discrète** de Leibniz :

$$F \Delta_-^1 G - G \Delta_+^1 F = 0 = \Delta_-^1 (\sigma(F)G) \quad \text{où} \quad \sigma(F)_k = F_{k+1}$$

Théorème 20 (de Noether discret)

Si L est Δ_-^1 -invariant sous l'action de Φ alors

$$I_h : (\mathbb{R}^d)^{N+1} \times (\mathbb{R}^d)^{N+1} \times [a, b]^{N+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{N+1}$$

$$(X, V, \tau) \longmapsto \sigma \left(\frac{\partial L}{\partial V}(X, V, \tau) \right) \frac{\partial \varphi}{\partial S}(0, X)$$

est une intégrale première **discrète** de (EL_h^1) .



E. Hairer, C. Lubich et G. Wanner *Geometric numerical integration*. 2006.

Théorème de Noether **discret** fractionnaire**Théorème 21**

Si L est Δ_-^α -invariant sous l'action de Φ . Alors, pour toute solution Q de (EL_h^α) :

$$F\Delta_-^\alpha G - G\Delta_+^\alpha F = 0$$

où $F = (\partial L / \partial v)(Q, \Delta_-^\alpha Q, \tau)$ et $G = (\partial \varphi / \partial s)(0, Q)$.



Théorème de Noether **discret** fractionnaire**Théorème 23**

Si L est Δ_-^α -invariant sous l'action de Φ . Alors, pour toute solution Q de (EL_h^α) :

$$F\Delta_-^\alpha G - G\Delta_+^\alpha F = 0$$

où $F = (\partial L / \partial v)(Q, \Delta_-^\alpha Q, \tau)$ et $G = (\partial \varphi / \partial s)(0, Q)$.

Système d'équations discrètes facilement **manipulables** contrairement au cas continu.



Théorème de Noether **discret** fractionnaire**Théorème 25**

Si L est Δ_-^α -invariant sous l'action de Φ . Alors, pour toute solution Q de (EL_h^α) :

$$F\Delta_-^\alpha G - G\Delta_+^\alpha F = 0$$

où $F = (\partial L / \partial v)(Q, \Delta_-^\alpha Q, \tau)$ et $G = (\partial \varphi / \partial s)(0, Q)$.

Système d'équations discrètes facilement **manipulables** contrairement au cas continu.

Théorème 26 (de Noether discret fractionnaire)

Si L est Δ_-^α -invariant sous l'action de Φ alors

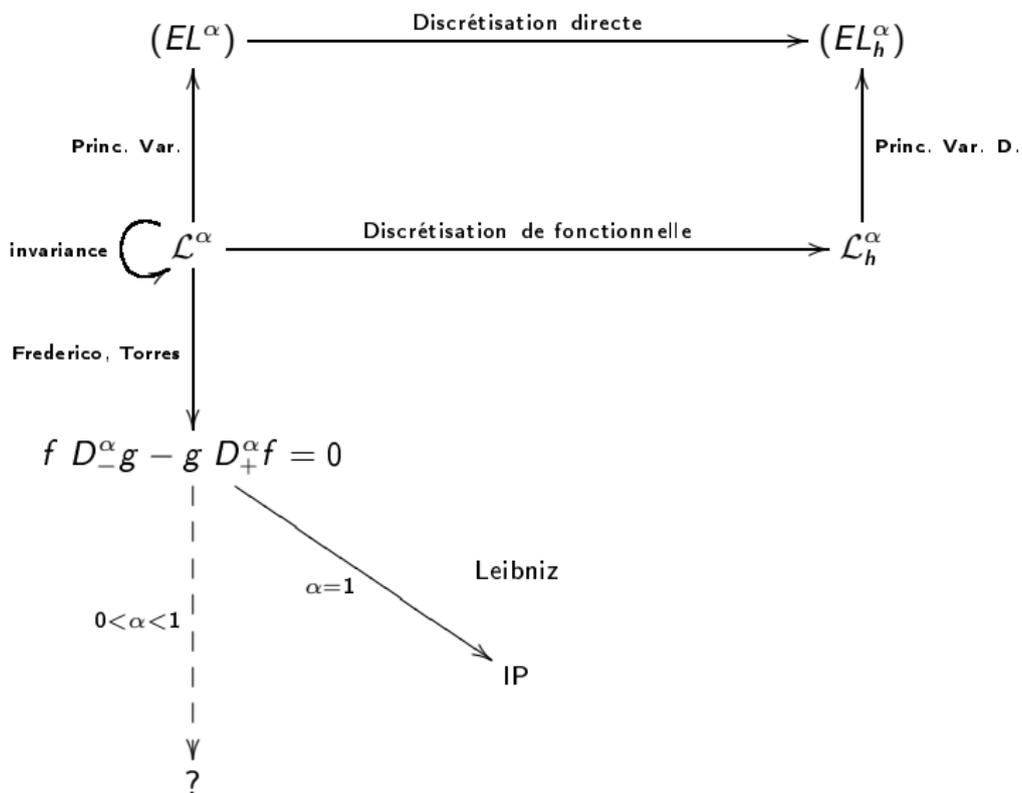
$$I_h : (\mathbb{R}^d)^{N+1} \times (\mathbb{R}^d)^{N+1} \times [a, b]^{N+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{N+1}$$

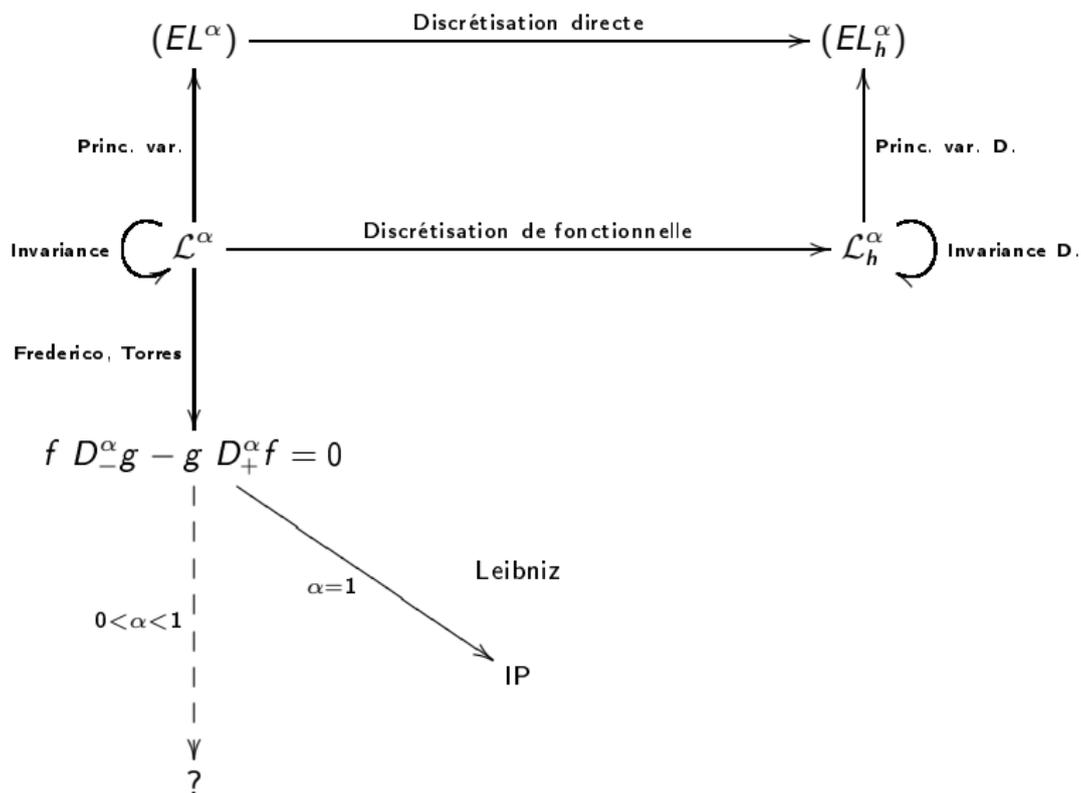
$$(X, V, \tau) \longmapsto \sum_{p=1}^{N-1} \alpha_p A_p \left[\sigma^p \left(\frac{\partial L}{\partial v}(X, V, \tau) \right) \frac{\partial \phi}{\partial s}(0, X) \right]$$

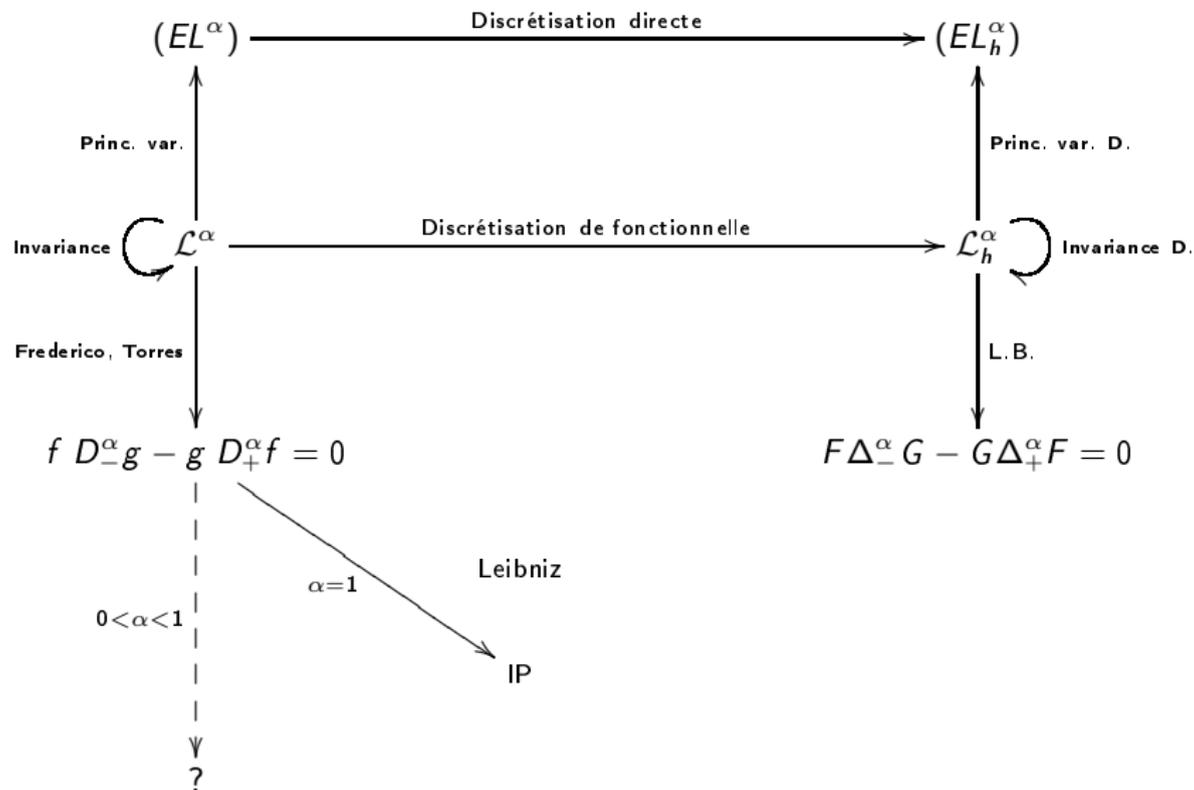
est une intégrale première **discrète** de (EL_h^α) .

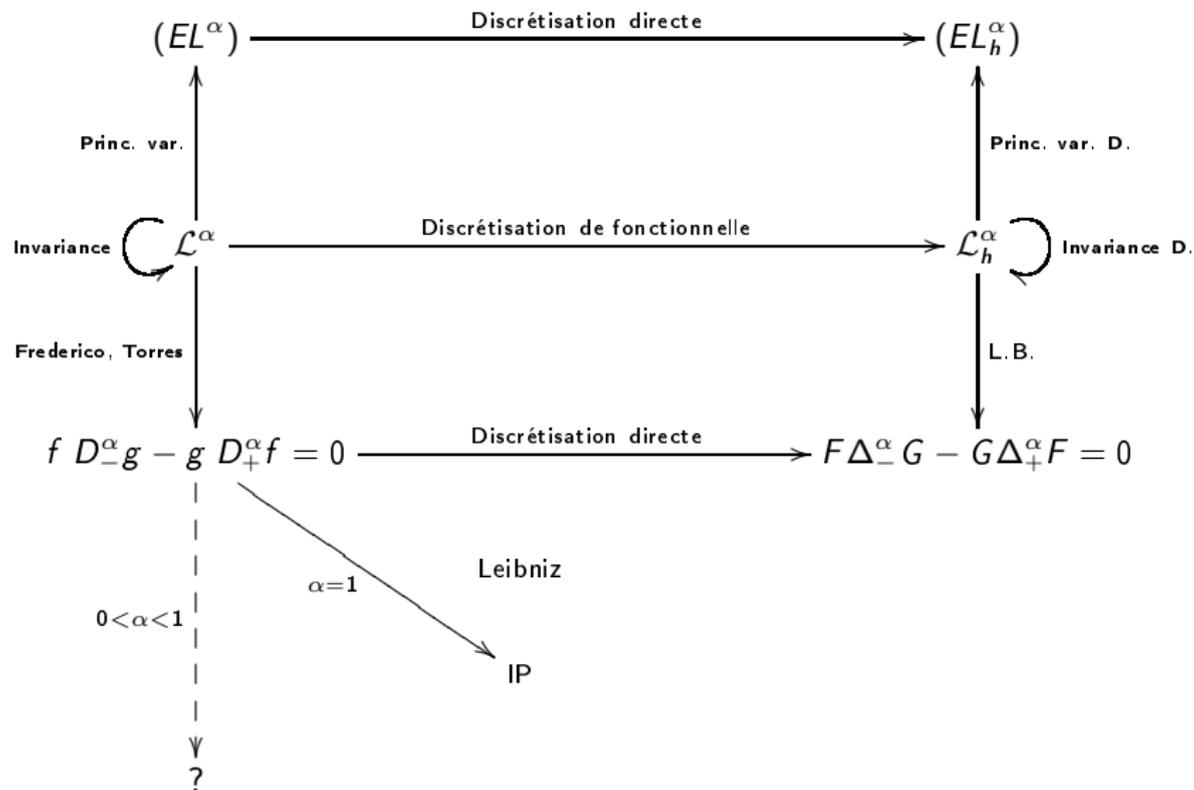


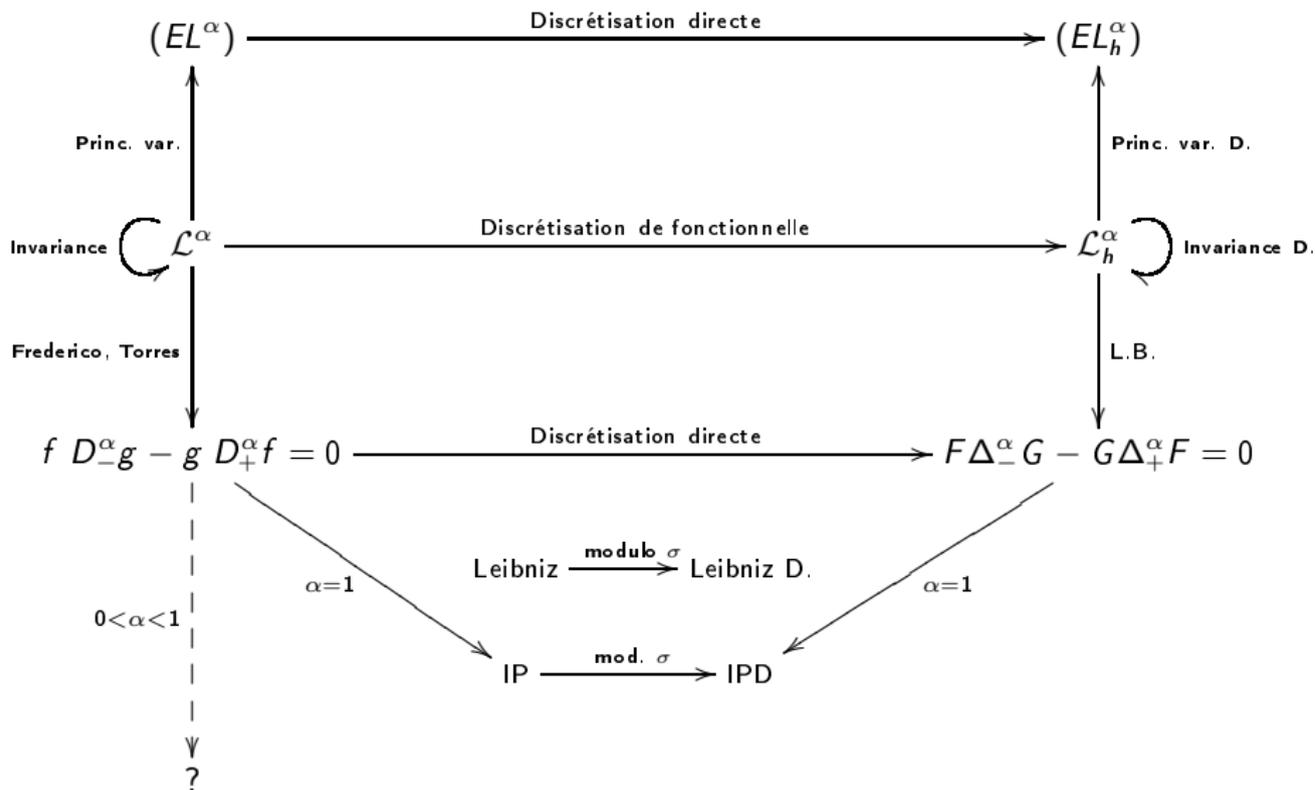
L. Bourdin *Discrete fractional Noether's theorem in the framework of discrete embeddings*. Soumis.

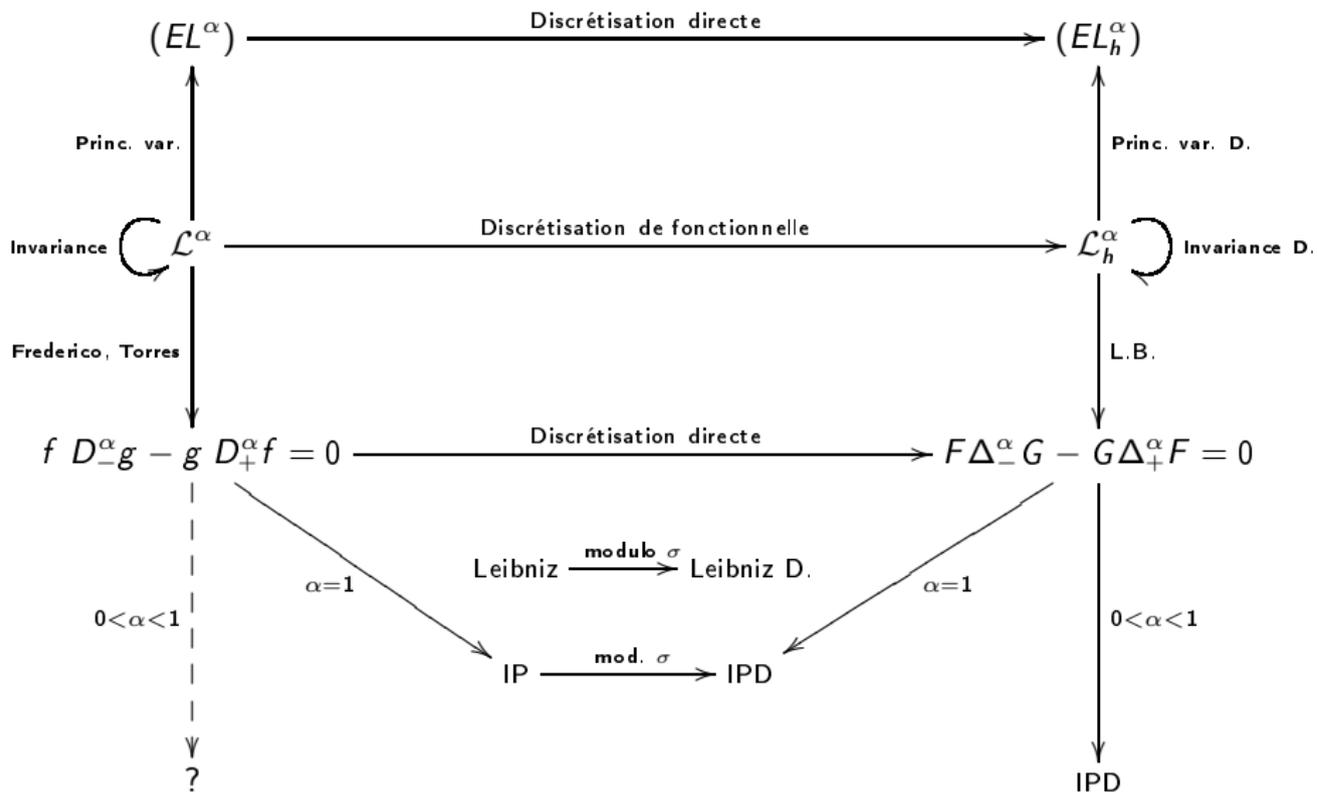


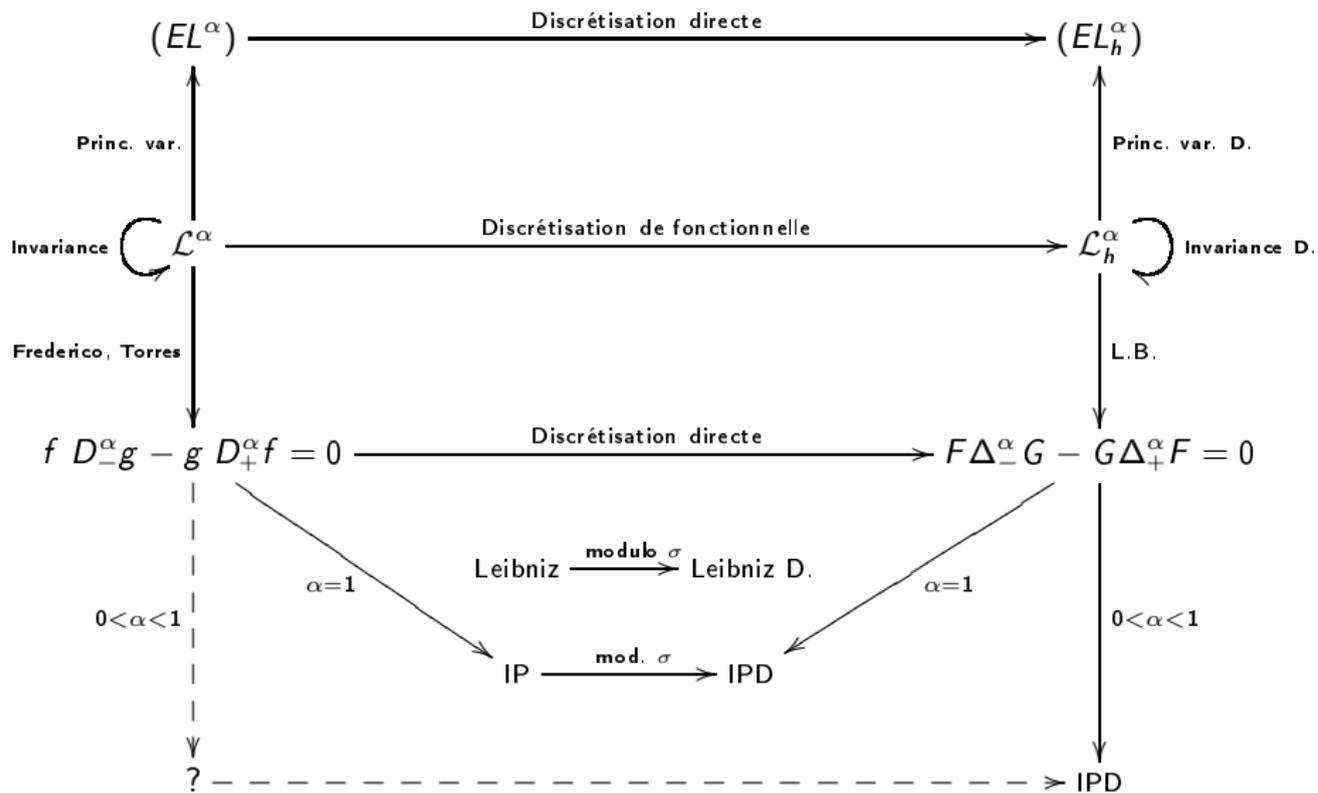












Merci pour votre attention.

