

Un schéma numérique fluide pour les gaz sans pression

Laurent Boudin

UPMC & INRIA

Congrès SMAI 2011

Collaboration avec Julien Mathiaud (CEA-DAM & ENS Cachan)

Aperçu de l'exposé

- 1 Modèle des gaz sans pression
 - Sans viscosité
 - Avec viscosité
- 2 Discrétisation
 - Schéma décentré amont
 - Schéma avec viscosité artificielle
- 3 Exemples numériques
 - Exemple de référence
 - Comparaison diffusif/décentré amont

Aperçu de l'exposé

- 1 Modèle des gaz sans pression
 - Sans viscosité
 - Avec viscosité
- 2 Discrétisation
 - Schéma décentré amont
 - Schéma avec viscosité artificielle
- 3 Exemples numériques
 - Exemple de référence
 - Comparaison diffusif/décentré amont

Contexte mathématique (1)

Modèle adapté pour les plasmas froids, la dynamique des galaxies

Système hyperbolique dégénéré de lois de conservation

densité $\varrho(t, x) \geq 0$, quantité de mouvement $q(t, x) \in \mathbb{R}$ solutions de

$$\begin{cases} \partial_t \varrho + \partial_x(\varrho u) & = & 0 \\ \partial_t q + \partial_x(qu) & = & 0 \end{cases} \quad \text{dans }]0, T[\times \mathbb{R},$$

avec conditions initiales $\varrho(0, \cdot) = \varrho^{\text{in}}$, $q(0, \cdot) = \varrho^{\text{in}} u^{\text{in}}$

Existence de solutions (Bouchut, James, 1999)

- Définir u comme quotient de q par ϱ
 \implies solutions en dualité
- Importance de la condition **OSL** (*one-sided Lipschitz*)

$$\partial_x u \leq \frac{1}{t}$$

Contexte mathématique (2)

Ajout d'un terme de viscosité ($\varepsilon > 0$)

densité $\varrho(t, x) > 0$, quantité de mouvement $q(t, x) \in \mathbb{R}$ solutions de

$$\begin{cases} \partial_t \varrho + \partial_x(\varrho u) & = 0 \\ \partial_t u + \partial_x\left(\frac{u^2}{2}\right) & = \frac{\varepsilon}{\varrho} \partial_{xx}^2 u \end{cases} \quad \text{dans }]0, T[\times \mathbb{R},$$

avec conditions initiales $\varrho(0, \cdot) = \varrho^{\text{in}}$, $u(0, \cdot) = u^{\text{in}}$

Existence de solutions, convergence (LB, 2000)

- Condition **OSL renforcée** vérifiée

$$\partial_x u \leq \frac{A}{At + 1}, \quad A = \max(\text{ess sup}(u^{\text{in}})', 0)$$

- Sous conditions sur les données initiales par rapport à ε** , convergence des solutions visqueuses vers les solutions en dualité

Aperçu de l'exposé

- 1 Modèle des gaz sans pression
 - Sans viscosité
 - Avec viscosité
- 2 Discretisation
 - Schéma décentré amont
 - Schéma avec viscosité artificielle
- 3 Exemples numériques
 - Exemple de référence
 - Comparaison diffusif/décentré amont

Le schéma décentré amont...

Notations

- Cadre périodique en x
- $\Delta t, \Delta x > 0$; $N = T/\Delta t$, $I = 1/\Delta x \in \mathbb{N}^*$; $\lambda = \Delta t/\Delta x$
- $\varrho_i^n \simeq \varrho(n\Delta t, (i + 1/2)\Delta x)$, u_i^n , q_i^n ,
- Condition OSL : $w_i^n := n\lambda(u_{i+1}^n - u_i^n) \leq 1$
- $Z_i^{n+1} = Z_i'$

Schéma décentré amont

$$\varrho_i' = (1 - \lambda u_i) \varrho_i + \lambda u_{i-1} \varrho_{i-1}$$

$$q_i' = (1 - \lambda u_i) q_i + \lambda u_{i-1} q_{i-1}$$

$$u_i' = \frac{q_i'}{\varrho_i'} \quad \text{si } \varrho_i' \neq 0$$

... ne marche pas : exemple de référence

Données initiales : $\varrho^{\text{in}} = 1$; $u^{\text{in}} = 0$ sauf $u^{\text{in}}(0) = U$

Hypothèses : $0 < \lambda < 1$, $0 < \lambda U < 1$, $l > 2 + 1/\lambda$

Alors : $\max_i w_i^{l-2} > U$

On prouve par récurrence sur j , $0 \leq j < l - 1$, que

- $\varrho_i^j > 0$ pour $0 \leq i \leq l - 1$,
- $u_0^j = U$, $u_{j+1}^j > 0$, $u_i^j = 0$ pour $j + 2 \leq i \leq l - 1$.

On en déduit que

$$w_{l-1}^{l-2} = (l - 2)\lambda(u_0^{l-2} - u_{l-1}^{l-2}) = (l - 2)\lambda U > U.$$

Stratégie numérique (1)

1. Données initiales 1-périodiques
2. Paramètre $\varepsilon > 0$
3. Régularisation des données initiales
4. Pas de temps et d'espace Δx and Δt
5. Schéma diffusif

Étape 3 – Conditions *ad hoc* sur les données initiales

- Fonctions $C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}_+^*)$
- Notations complémentaires :

$$U(\varepsilon) = \max_{[0,1]} u^{\text{in}} > 0,$$

$$V(\varepsilon) = \min_{[0,1]} u^{\text{in}} > 0,$$

$$A(\varepsilon) = \max(0, \max_{[0,1]} (u^{\text{in}})') \geq 0,$$

$$R(\varepsilon) = \min_{[0,1]} \varrho^{\text{in}} > 0.$$

- $R \geq C\varepsilon^{1/4}$, $V \leq U \leq C$, $A \leq C\varepsilon^{-1/2}$

Stratégie numérique (2)

Étape 4 – Choix des pas de temps et d'espace

$$0 < \Delta x \leq \frac{2V}{1+A}$$

$$0 < \Delta t \leq \min \left(\frac{1}{4A+1}, \frac{1}{4U} \Delta x, \frac{R}{4\varepsilon(1+AT)} \Delta x^2 \right)$$

$\Rightarrow \Delta x \sim \varepsilon^{1/2}$ et $\Delta t \sim \varepsilon^{3/4}$ au pire

On pose $\sigma = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$.

Étape 5 – Schéma

$$u'_i = u_i - \lambda \left(\frac{u_i^2}{2} - \frac{u_{i-1}^2}{2} \right) + \frac{\varepsilon \sigma}{\varrho_i} (u_{i-1} + u_{i+1} - 2u_i)$$

$$\varrho'_i = (1 - \lambda u'_i) \varrho_i + \lambda u'_{i-1} \varrho_{i-1}$$

Propriétés du schéma

Théorème

- Principe du maximum sur u : $V \leq u_i^n \leq U$
- Condition OSL renforcée : $u_i^n - u_{i-1}^n \leq \frac{A\Delta x}{1 + An\Delta t}$
- Principe du maximum sur $1/\varrho$: $\varrho_i^n \geq \frac{R}{1 + An\Delta t} \geq \frac{R}{1 + AT} > 0$
- Conservation de la masse totale : $\sum_i \varrho_i^n \Delta x = \sum_i \varrho_i^0 \Delta x$
- Stabilité, consistance, monotonie

Preuve par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

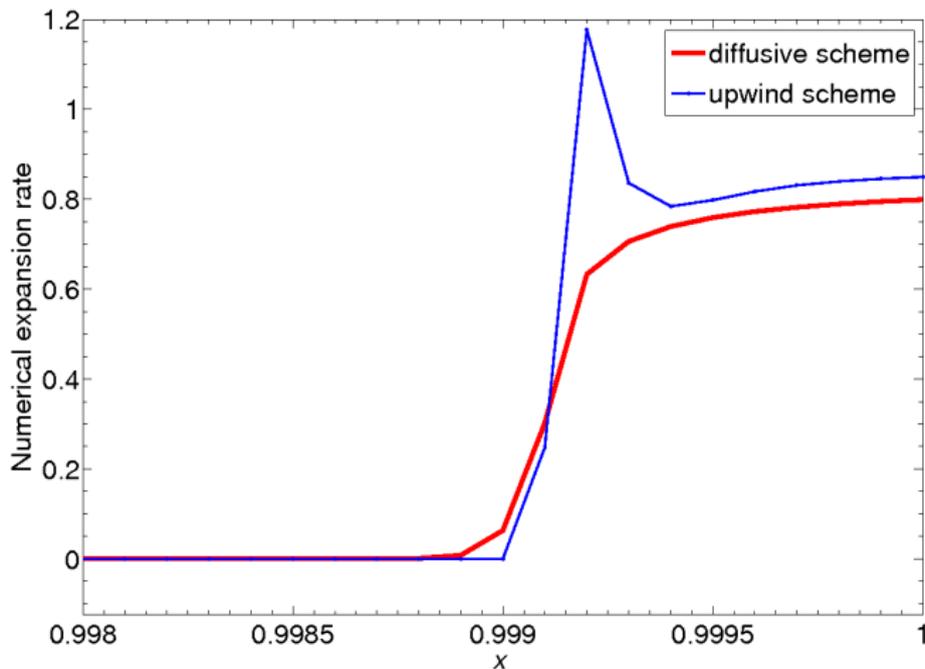
- $n = 0$ OK grâce aux hypothèses sur U , V et R
- u_i^n combinaison convexe de u_{i-1}^{n-1} , u_i^{n-1} et $u_{i+1}^{n-1} \implies$ principe du max. OK
- même type d'argument pour la condition OSL renforcée
- principe du max. sur $1/\varrho$ OK par condition OSL et hypothèse de récurrence

Aperçu de l'exposé

- 1 Modèle des gaz sans pression
 - Sans viscosité
 - Avec viscosité
- 2 Discrétisation
 - Schéma décentré amont
 - Schéma avec viscosité artificielle
- 3 Exemples numériques
 - Exemple de référence
 - Comparaison diffusif/décentré amont

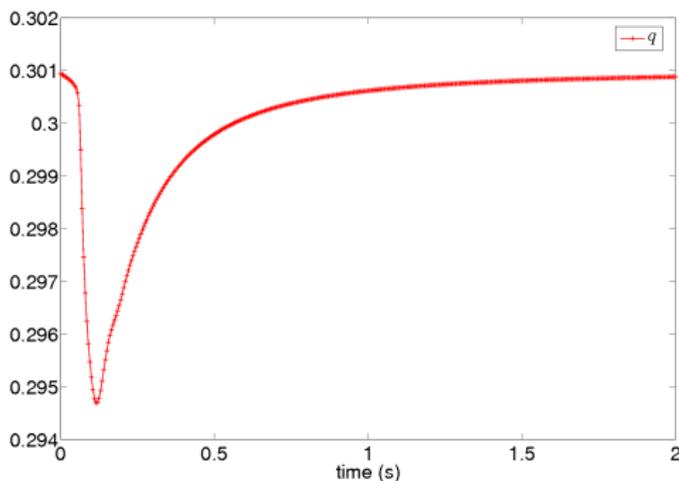
Exemple de référence [$\rho^{\text{in}} = 1$, $u^{\text{in}} = 0$ sauf $u^{\text{in}}(0) = 1$]

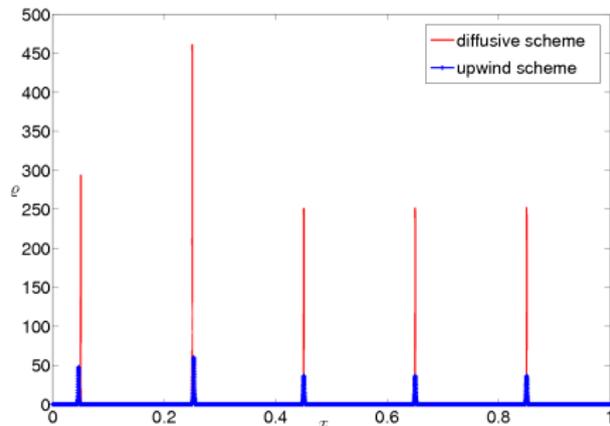
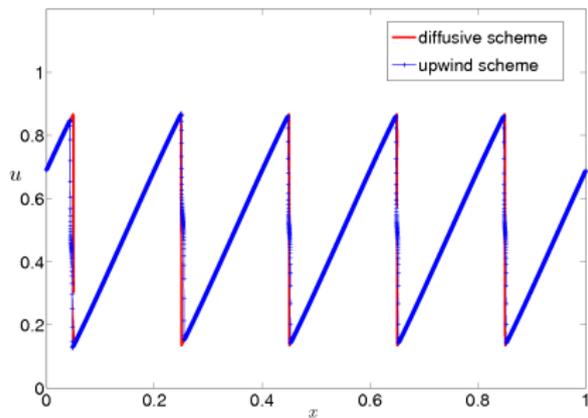
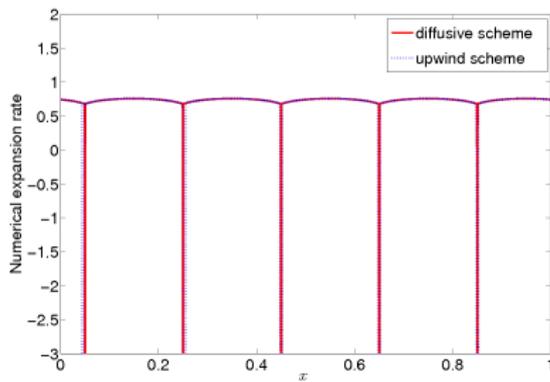
- $\varepsilon = 10^{-6}$
- Régularisation des données initiales $\implies U = 1$, $V = \varepsilon$, $R = 1$ et $A = \frac{\pi}{2\sqrt{\varepsilon}}$
- $\Delta t = 2,5 \cdot 10^{-5}$, $\Delta x = 10^{-4}$



Vitesse C^1 périodique, densité constante par morceaux

- $\varrho^{\text{in}} = 1$ sur $[0, 1/5[$, $\varrho^{\text{in}} = 0,5$ sur $[1/5, 1[$
- $u^{\text{in}}(x) = [1 - \cos(10\pi x)]/2$
- $\varepsilon = 10^{-12}$
- Régularisation de ϱ^{in} indépendante de ε , $R = 0,5$
- Pas de régularisation de u^{in} , mais choix de $V = 0,032$
- $\Delta x = 0,002 \leq \frac{2V}{A}$ et $\lambda = 0,1$ conviennent alors.



Comparaisons numériques ($t = 0,2$)

Comparaisons numériques ($t = 1$)