Grandes déviations pour les processus de branchement en environnement aléatoire.

Vincent Bansaye & Christian Boeinghoff

CMAP, Ecole Polytechnique.

24 mai, journées SMAI, Guidel.

Les processus Bienaymé Galton Watson modélisent une population où les individus se reproduisent de manière indepéndante et identiquement distribuée, toujours selon la même loi.

Les processus de branchement en environnement aléatoire (PBEA) [Smith, Wilkinson 69] sont une généralisation telle que :

à chaque génération, un environnement est tiré au hasard (de manière i.i.d.) et il détermine la loi de reproduction de tous les individus de cette génération.

Les processus Bienaymé Galton Watson modélisent une population où les individus se reproduisent de manière indepéndante et identiquement distribuée, toujours selon la même loi.

Les processus de branchement en environnement aléatoire (PBEA) [Smith, Wilkinson 69] sont une généralisation telle que :

à chaque génération, un environnement est tiré au hasard (de manière i.i.d.) et il détermine la loi de reproduction de tous les individus de cette génération.

Motivations

- Division d'une cellule infectée (Kimmel's branching model) : comportement asymptotique du nombre de cellules anormalement infectées.
- Quel est l'effet de la variabilité de l'environnement sur la croissance d'une population ? (expériences sur les vers de terre au laboratoire d'écologie de l'ENS)

Description des PBEA $(Z_n)_{n\geq 0}$

A chaque génération, on tire au hasard de manière i.i.d. un environnement :

$$\mathcal{E}_i = \text{environnement entre la génération } i \text{ et } i+1.$$

La loi de reproduction dans l'environnement e est donnée par la variable aléatoire

$$N(e), \qquad m(e) := \mathbb{E}(N(e)).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, conditionellement à $\mathcal{E}_n = e$,

$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} N_i,$$

où $(N_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont des v.a. i.i.d. distribuées comme $N(e)$.

Un PBEA s'éteint p.s. ssi $\mathbb{E}[\log(m(\mathcal{E}))] \leq 0$. [Athreya, Karlin 71].

Description des PBEA $(Z_n)_{n\geq 0}$

A chaque génération, on tire au hasard de manière i.i.d. un environnement :

$$\mathcal{E}_i = \text{environnement entre la génération } i \text{ et } i+1.$$

La loi de reproduction dans l'environnement e est donnée par la variable aléatoire

$$N(e), \qquad m(e) := \mathbb{E}(N(e)).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, conditionellement à $\mathcal{E}_n = e$,

$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} N_i,$$

où $(N_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont des v.a. i.i.d. distribuées comme $N(e)$.

Un PBEA s'éteint p.s. ssi $\mathbb{E}[\log(m(\mathcal{E}))] \leq 0$. [Athreya, Karlin 71].

Description des PBEA $(Z_n)_{n\geq 0}$

A chaque génération, on tire au hasard de manière i.i.d. un environnement :

$$\mathcal{E}_i = \text{environnement entre la génération } i \text{ et } i+1.$$

La loi de reproduction dans l'environnement e est donnée par la variable aléatoire

$$N(e), \qquad m(e) := \mathbb{E}(N(e)).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, conditionellement à $\mathcal{E}_n = e$,

$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} N_i,$$

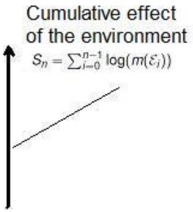
où $(N_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont des v.a. i.i.d. distribuées comme $N(e)$.

Un PBEA s'éteint p.s. ssi $\mathbb{E}[\log(m(\mathcal{E}))] \leq 0$. [Athreya, Karlin 71].

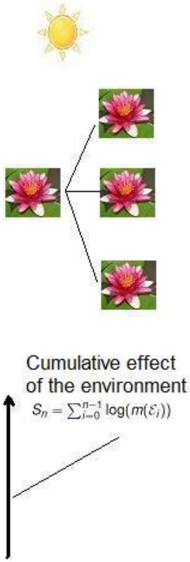
Exemple de PBEA

Cumulative effect
of the environment
$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \log(m(\mathcal{E}_i))$

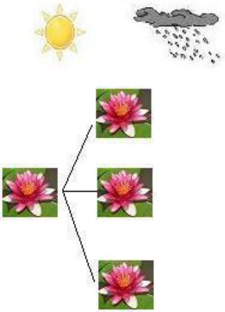
Exemple de PBEA

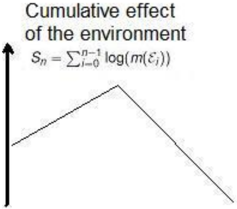


Exemple de PBEA

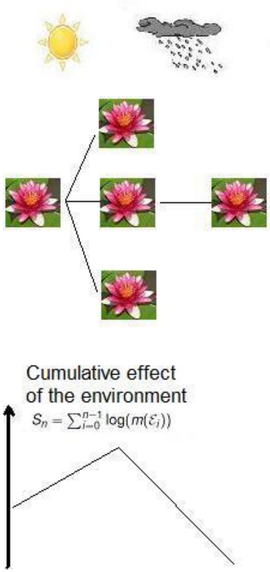


Exemple de PBEA

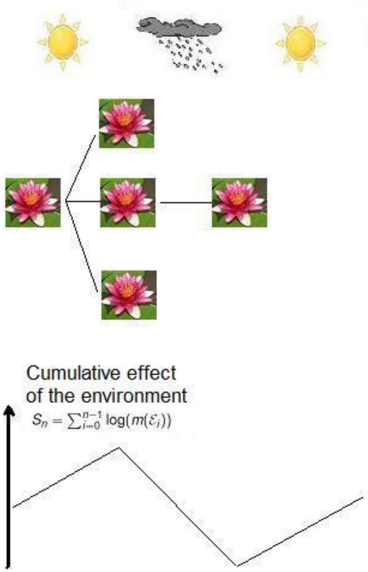




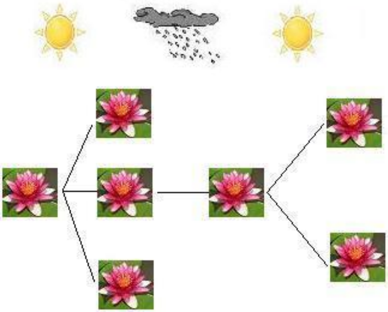
Exemple de PBEA

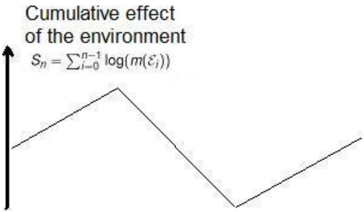


Exemple de PBEA

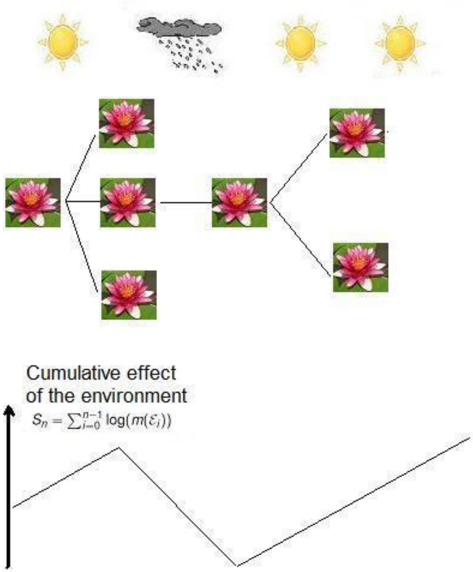


Exemple de PBEA

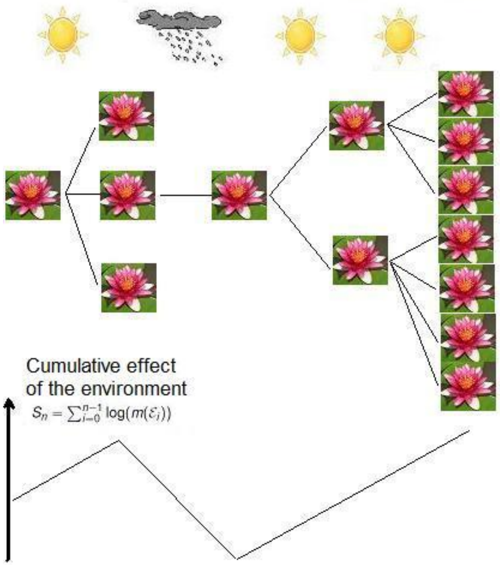




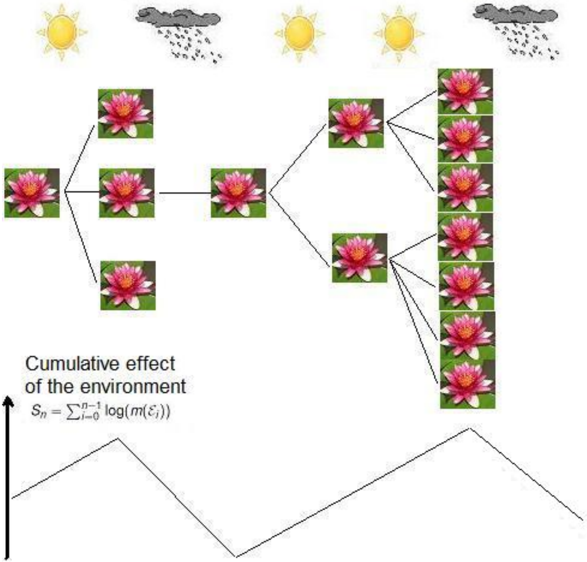
Exemple de PBEA



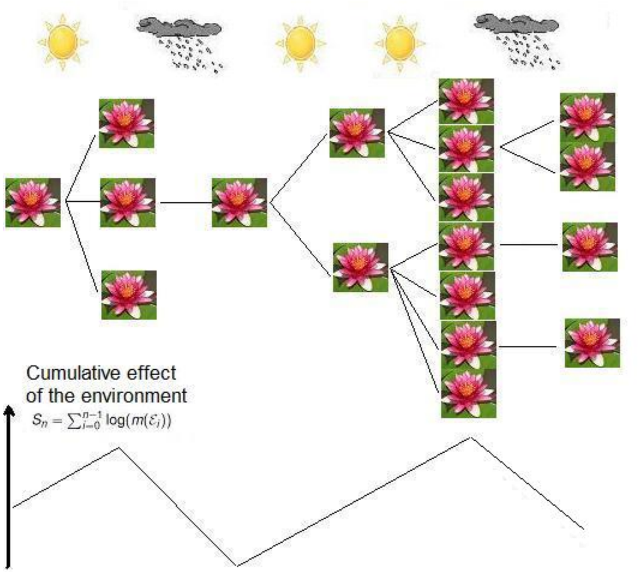
Exemple de PBEA



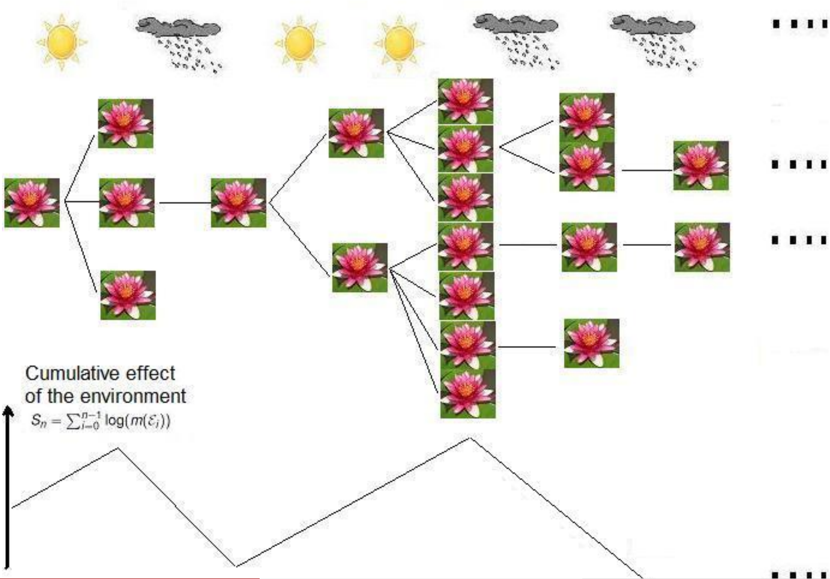
Exemple de PBEA



Exemple de PBEA



Exemple de PBEA



Vitesse d'extinction

Quand la population s'éteint p.s., la vitesse d'extinction est

$$-\frac{\log \mathbb{P}(Z_n > 0)}{n} \xrightarrow{n\to\infty} \gamma, \quad \mathbb{P}(Z_n > 0) \asymp \exp(-n\gamma).$$

Elle dépend de la variabilité de l'environnement [Dekking 88 ; Liu 96 ; D'Souza, Hambly 97 ; Guivarc'h, Liu 01 ; Geiger, Kersting, Vatutin 03] :

- Cas fortement ou moyennement sous-critique ($\mathbb{E}(m(\mathcal{E})\log(m(\mathcal{E}))) \leq 0$) :

$$\gamma = -\log \mathbb{E}(m(\mathcal{E})).$$

- Cas faiblement sous-critique ($\mathbb{E}(m(\mathcal{E})\log(m(\mathcal{E}))) > 0$) :

$$\gamma = -\log \inf_{s\in[0,1]} \mathbb{E}(m(\mathcal{E})^s) = \Lambda(0) > -\log \mathbb{E}(m(\mathcal{E}))$$

où Λ est la fonction de taux de la marche aléatoire $(S_n : n \geq 0)$.

Vitesse d'extinction

Quand la population s'éteint p.s., la vitesse d'extinction est

$$-\frac{\log \mathbb{P}(Z_n > 0)}{n} \xrightarrow{n\to\infty} \gamma, \quad \mathbb{P}(Z_n > 0) \asymp \exp(-n\gamma).$$

Elle dépend de la variabilité de l'environnement [Dekking 88 ; Liu 96 ; D'Souza, Hambly 97 ; Guivarc'h, Liu 01 ; Geiger, Kersting, Vatutin 03] :

- Cas fortement ou moyennement sous-critique ($\mathbb{E}(m(\mathcal{E}) \log(m(\mathcal{E}))) \leq 0$) :

$$\gamma = -\log \mathbb{E}(m(\mathcal{E})).$$

- Cas faiblement sous-critique ($\mathbb{E}(m(\mathcal{E}) \log(m(\mathcal{E}))) > 0$) :

$$\gamma = -\log \inf_{s\in[0,1]} \mathbb{E}(m(\mathcal{E})^s) = \Lambda(0) > -\log \mathbb{E}(m(\mathcal{E}))$$

où Λ est la fonction de taux de la marche aléatoire $(S_n : n \geq 0)$.

Question :

Si après un temps long ($n >> 1$), quelques nénuphars survivent. Est ce du

- à des reproductions exceptionnelles (dans des environnements normaux), c-a-d à la stochasticité démographique ?
- à des environnements exceptionnels, c-a-d à la stochasticité environnementale ?

Question :

Si après un temps long ($n >> 1$), quelques nénuphars survivent. Est ce du

- à des reproductions exceptionnelles (dans des environnements normaux), c-a-d à la stochasticité démographique ?
- à des environnements exceptionnels, c-a-d à la stochasticité environnementale ?

Grandes déviations

Dans le cas surcritique, si $\mathbb{E}(Z_1 \log^+(Z_1)/m(\mathcal{E}_1)) < \infty$, on a p.s. [Athreya Karlin 71, Guivarc'h Liu 01] :

$$Z_n \sim W\Pi_{i=0}^{n-1} m(\mathcal{E}_i) = W \exp(S_n) \quad (n \to \infty)$$

avec $S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \log(m(\mathcal{E}_i))$. Alors, en posant $L = \mathbb{E}(\log(m(\mathcal{E}))) > 0$

$$Z_n \asymp \exp(Ln) \quad (n \to \infty) \quad \text{p.s.}$$

Quelle est la probabilité d'observer une croissance exceptionnelle :

$$Z_n \asymp \exp(\theta n) \quad \text{p.s.,} \quad \theta > L$$

pour $n >> 1$ et comment peut elle se produire ?

Références : Kozlov (06), B. & Berestycki (08), Boeinghoff & Kersting (09), Liu & al (10)

Grandes déviations

Dans le cas surcritique, si $\mathbb{E}(Z_1 \log^+(Z_1)/m(\mathcal{E}_1)) < \infty$, on a p.s. [Athreya Karlin 71, Guivarc'h Liu 01] :

$$Z_n \sim W\Pi_{i=0}^{n-1} m(\mathcal{E}_i) = W \exp(S_n) \quad (n \to \infty)$$

avec $S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \log(m(\mathcal{E}_i))$. Alors, en posant $L = \mathbb{E}(\log(m(\mathcal{E}))) > 0$

$$Z_n \asymp \exp(Ln) \quad (n \to \infty) \quad \text{p.s.}$$

Quelle est la probabilité d'observer une croissance exceptionnelle :

$$Z_n \asymp \exp(\theta n) \quad \text{p.s.,} \quad \theta > L$$

pour $n >> 1$ et comment peut elle se produire ?

Références : Kozlov (06), B. & Berestycki (08), Boeinghoff & Kersting (09), Liu & al (10)

Grandes déviations

Dans le cas surcritique, si $\mathbb{E}(Z_1 \log^+(Z_1)/m(\mathcal{E}_1)) < \infty$, on a p.s. [Athreya Karlin 71, Guivarc'h Liu 01] :

$$Z_n \sim W\Pi_{i=0}^{n-1} m(\mathcal{E}_i) = W \exp(S_n) \quad (n \to \infty)$$

avec $S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \log(m(\mathcal{E}_i))$. Alors, en posant $L = \mathbb{E}(\log(m(\mathcal{E}))) > 0$

$$Z_n \asymp \exp(Ln) \quad (n \to \infty) \quad \text{p.s.}$$

Quelle est la probabilité d'observer une croissance exceptionnelle :

$$Z_n \asymp \exp(\theta n) \quad \text{p.s.}, \quad \theta > L$$

pour $n >> 1$ et comment peut elle se produire ?

Références : Kozlov (06), B. & Berestycki (08), Boeinghoff & Kersting (09), Liu & al (10)

Les bons chemins pour atteindre $\exp(\theta n)$

Les valeurs exceptionnelles de Z peuvent être atteintes grâce à :

- des environnements exceptionnels : grande déviation de la marche aléatoire $(S_n : n \in \mathbb{N})$, données par sa fonction de taux Λ.
- des reproductions exceptionnelles :
  - tous les individus ont plus d'enfants plus que le nombre moyen $m(\mathcal{E})$ génération après génération ? NON ! ! !
  - un individu donne naissance à un nombre exponentiel d'individus :

$$\mathbb{P}(Z_1 \geq k) \asymp k^{-\beta} \quad (n \to \infty).$$

  - les individus se reproduisent suffisamment pour survivre quelques temps

$$\gamma := -\lim_{n\to\infty} \log(\mathbb{P}(Z_n > 0)/n.$$

Judicieux seulement dans le cas FORTEMENT sous-critique (voir Boeinghoff et Kersting (09)) et alors $\gamma = -\log(\mathbb{E}(m(\mathcal{E})))$.

Les bons chemins pour atteindre $\exp(\theta n)$

Les valeurs exceptionnelles de Z peuvent être atteintes grâce à :

- des environnements exceptionnels : grande déviation de la marche aléatoire $(S_n : n \in \mathbb{N})$, données par sa fonction de taux Λ.
- des reproductions exceptionnelles :
  - tous les individus ont plus d'enfants plus que le nombre moyen $m(\mathcal{E})$ génération après génération ? NON ! ! !
  - un individu donne naissance à un nombre exponentiel d'individus :

$$\mathbb{P}(Z_1 \geq k) \asymp k^{-\beta} \quad (n \to \infty).$$

  - les individus se reproduisent suffisamment pour survivre quelques temps

$$\gamma := -\lim_{n\to\infty} \log(\mathbb{P}(Z_n > 0)/n.$$

Judicieux seulement dans le cas FORTEMENT sous-critique (voir Boeinghoff et Kersting (09)) et alors $\gamma = -\log(\mathbb{E}(m(\mathcal{E})))$.

Les bons chemins pour atteindre $\exp(\theta n)$

Les valeurs exceptionnelles de Z peuvent être atteintes grâce à :

- des environnements exceptionnels : grande déviation de la marche aléatoire $(S_n : n \in \mathbb{N})$, données par sa fonction de taux Λ.
- des reproductions exceptionnelles :
  - tous les individus ont plus d'enfants plus que le nombre moyen $m(\mathcal{E})$ génération après génération ? NON ! ! !
  - un individu donne naissance à un nombre exponentiel d'individus :

$$\mathbb{P}(Z_1 \geq k) \asymp k^{-\beta} \quad (n \to \infty).$$

  - les individus se reproduisent suffisamment pour survivre quelques temps

$$\gamma := -\lim_{n\to\infty} \log(\mathbb{P}(Z_n > 0)/n.$$

Judicieux seulement dans le cas FORTEMENT sous-critique (voir Boeinghoff et Kersting (09)) et alors $\gamma = -\log(\mathbb{E}(m(\mathcal{E})))$.

Les bons chemins pour atteindre $\exp(\theta n)$

Les valeurs exceptionnelles de Z peuvent être atteintes grâce à :

- des environnements exceptionnels : grande déviation de la marche aléatoire $(S_n : n \in \mathbb{N})$, données par sa fonction de taux Λ.
- des reproductions exceptionnelles :
  - tous les individus ont plus d'enfants plus que le nombre moyen $m(\mathcal{E})$ génération après génération ? NON ! ! !
  - un individu donne naissance à un nombre exponentiel d'individus :

$$\mathbb{P}(Z_1 \geq k) \asymp k^{-\beta} \quad (n \to \infty).$$

  - les individus se reproduisent suffisamment pour survivre quelques temps

$$\gamma := -\lim_{n\to\infty} \log(\mathbb{P}(Z_n > 0)/n.$$

Judicieux seulement dans le cas FORTEMENT sous-critique (voir Boeinghoff et Kersting (09)) et alors $\gamma = -\log(\mathbb{E}(m(\mathcal{E})))$.

Les bons chemins pour atteindre $\exp(\theta n)$

Les valeurs exceptionnelles de Z peuvent être atteintes grâce à :

- des environnements exceptionnels : grande déviation de la marche aléatoire $(S_n : n \in \mathbb{N})$, données par sa fonction de taux Λ.
- des reproductions exceptionnelles :
  - tous les individus ont plus d'enfants plus que le nombre moyen $m(\mathcal{E})$ génération après génération ? NON ! ! !
  - un individu donne naissance à un nombre exponentiel d'individus :

$$\mathbb{P}(Z_1 \geq k) \asymp k^{-\beta} \quad (n \to \infty).$$

  - les individus se reproduisent suffisamment pour survivre quelques temps

$$\gamma := -\lim_{n\to\infty} \log(\mathbb{P}(Z_n > 0)/n.$$

Judicieux seulement dans le cas FORTEMENT sous-critique (voir Boeinghoff et Kersting (09)) et alors $\gamma = -\log(\mathbb{E}(m(\mathcal{E})))$.

Les bons chemins pour atteindre $\exp(\theta n)$

Les valeurs exceptionnelles de Z peuvent être atteintes grâce à :

- des environnements exceptionnels : grande déviation de la marche aléatoire $(S_n : n \in \mathbb{N})$, données par sa fonction de taux Λ.
- des reproductions exceptionnelles :
  - tous les individus ont plus d'enfants plus que le nombre moyen $m(\mathcal{E})$ génération après génération ? NON ! ! !
  - un individu donne naissance à un nombre exponentiel d'individus :

$$\mathbb{P}(Z_1 \geq k) \asymp k^{-\beta} \quad (n \to \infty).$$

  - les individus se reproduisent suffisamment pour survivre quelques temps

$$\gamma := - \lim_{n\to\infty} \log(\mathbb{P}(Z_n > 0)/n.$$

Judicieux seulement dans le cas FORTEMENT sous-critique (voir Boeinghoff et Kersting (09)) et alors $\gamma = -\log(\mathbb{E}(m(\mathcal{E})))$.

Les bons chemins pour atteindre $\exp(\theta n)$

Les valeurs exceptionnelles de Z peuvent être atteintes grâce à :

- des environnements exceptionnels : grande déviation de la marche aléatoire $(S_n : n \in \mathbb{N})$, données par sa fonction de taux Λ.
- des reproductions exceptionnelles :
  - tous les individus ont plus d'enfants plus que le nombre moyen $m(\mathcal{E})$ génération après génération ? NON ! ! !
  - un individu donne naissance à un nombre exponentiel d'individus :

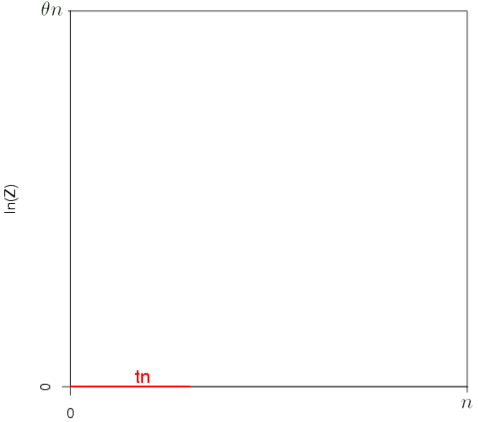
$$\mathbb{P}(Z_1 \geq k) \asymp k^{-\beta} \quad (n \to \infty).$$

  - les individus se reproduisent suffisamment pour survivre quelques temps

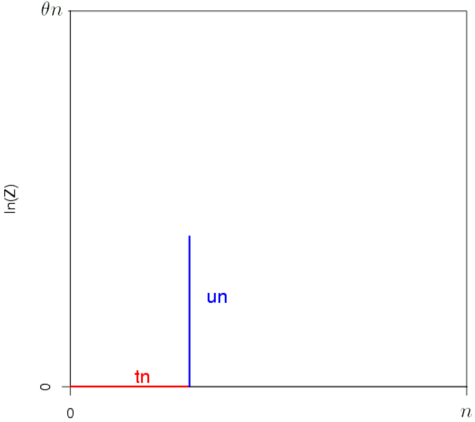
$$\gamma := -\lim_{n\to\infty} \log(\mathbb{P}(Z_n > 0)/n.$$

Judicieux seulement dans le cas FORTEMENT sous-critique (voir Boeinghoff et Kersting (09)) et alors $\gamma = -\log(\mathbb{E}(m(\mathcal{E})))$.

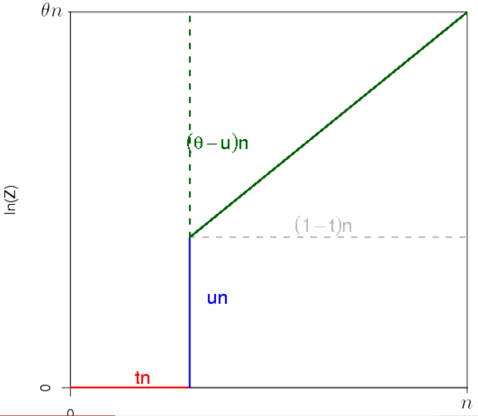
$\exp(-\gamma\lfloor tn \rfloor)$	
Probabilité que la population survive jusqu'à la génération $\lfloor tn \rfloor$	



$\exp(-\gamma\lfloor tn \rfloor)$	$\exp(-\beta un)$
Probabilité que la population survive jusqu' à la génération $\lfloor tn \rfloor$	Probabilité qu'un individu ait $\exp(un)$ enfants



$\exp(-\gamma\lfloor tn \rfloor)$	$\exp(-\beta un)$	$\exp\Big(-\Lambda(\frac{\theta-u}{1-t})\lfloor(1-t)n\rfloor\Big)$
Probabilité que la population survive jusqu' à la génération $\lfloor tn \rfloor$	Probabilité qu'un individu ait $\exp(un)$ enfants	Probabilité que la marche aléatoire dépasse $(\theta-u)n$ au temps $\lfloor(1-t)n\rfloor$.



Résultat principal

La borne inférieure vient naturellement

$$\mathbb{P}(Z_n \geq e^{\theta n})$$

$$\geq \sup_{t\in[0,1],u\in[0,\theta]} \left\{ \exp(-\gamma\lfloor tn \rfloor)\exp(-\beta un)\exp\left(-\Lambda(\frac{\theta-u}{1-t})\lfloor(1-t)n\rfloor\right)\right\}$$

$$\psi(\theta) = \inf_{t\in[0,1],u\in[0,\theta]} \left\{ t\gamma + \beta u + (1-t)\Lambda((\theta-u)/(1-t))\right\}$$

Théorème

Supposons que $\log(\mathbb{P}(Z_1 > z))/\log(z) \xrightarrow{z\to\infty} -\beta$ *avec* $\beta \in (1,\infty)$ *(+ Hypothèse technique). Alors pour tout* $\theta \geq 0$*,*

$$-\frac{1}{n}\log(\mathbb{P}(Z_n \geq e^{\theta n})) \xrightarrow{n\to\infty} \psi(\theta).$$

Résultat principal

La borne inférieure vient naturellement

$$\mathbb{P}(Z_n \geq e^{\theta n})$$
$$\geq \sup_{t\in[0,1],u\in[0,\theta]} \left\{ \exp(-\gamma\lfloor tn\rfloor)\exp(-\beta un)\exp\Big(-\Lambda(\frac{\theta-u}{1-t})\lfloor(1-t)n\rfloor\Big)\right\}$$

$$\psi(\theta) = \inf_{t\in[0,1],u\in[0,\theta]} \left\{ t\gamma+\beta u+(1-t)\Lambda((\theta-u)/(1-t))\right\}$$

Théorème

Supposons que $\log(\mathbb{P}(Z_1>z))/\log(z) \stackrel{z\to\infty}{\longrightarrow} -\beta$ *avec* $\beta\in(1,\infty)$ *(+ Hypothèse technique). Alors pour tout* $\theta\geq 0$,

$$-\frac{1}{n}\log(\mathbb{P}(Z_n\geq e^{\theta n})) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \psi(\theta).$$

Résultat principal

La borne inférieure vient naturellement

$$\mathbb{P}(Z_n \geq e^{\theta n})$$

$$\geq \sup_{t\in[0,1],u\in[0,\theta]} \left\{ \exp(-\gamma\lfloor tn \rfloor)\exp(-\beta un)\exp\left(-\Lambda(\frac{\theta-u}{1-t})\lfloor(1-t)n\rfloor\right)\right\}$$

$$\psi(\theta) = \inf_{t\in[0,1],u\in[0,\theta]} \left\{ t\gamma + \beta u + (1-t)\Lambda((\theta-u)/(1-t))\right\}$$

Théorème

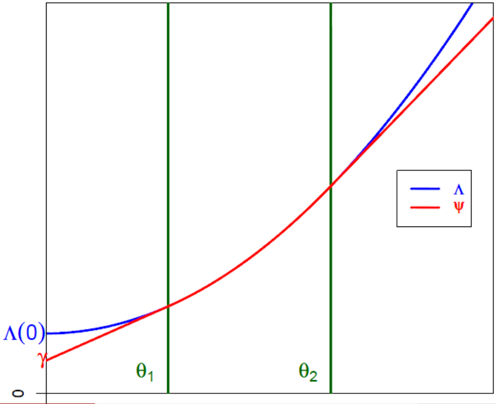
Supposons que $\log(\mathbb{P}(Z_1 > z))/\log(z) \stackrel{z\to\infty}{\longrightarrow} -\beta$ *avec* $\beta \in (1,\infty)$ *(+ Hypothèse technique). Alors pour tout* $\theta \geq 0$*,*

$$-\frac{1}{n}\log(\mathbb{P}(Z_n \geq e^{\theta n})) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \psi(\theta).$$

Nouvelle representation de ψ

Nous pouvons caractériser ψ comme la plus grande fonction convexe telle que

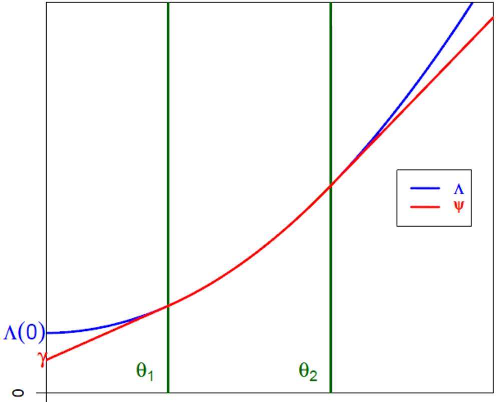
$$\psi(0) = \gamma, \quad \psi(\theta) \leq \Lambda(\theta), \quad \psi(\theta + x) \leq \psi(\theta) + \beta x.$$



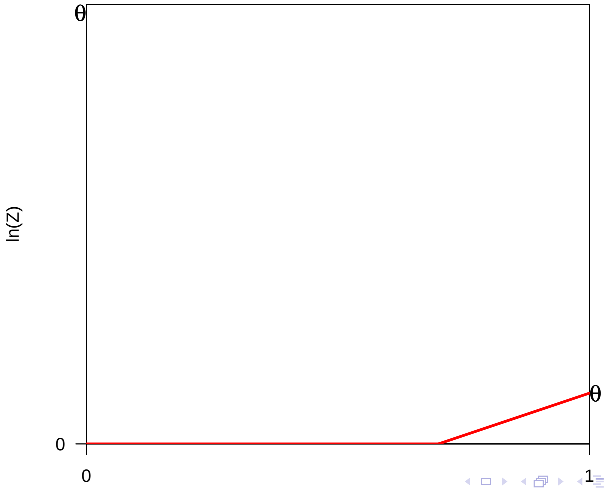
Nouvelle representation de ψ

Nous pouvons caractériser ψ comme la plus grande fonction convexe telle que

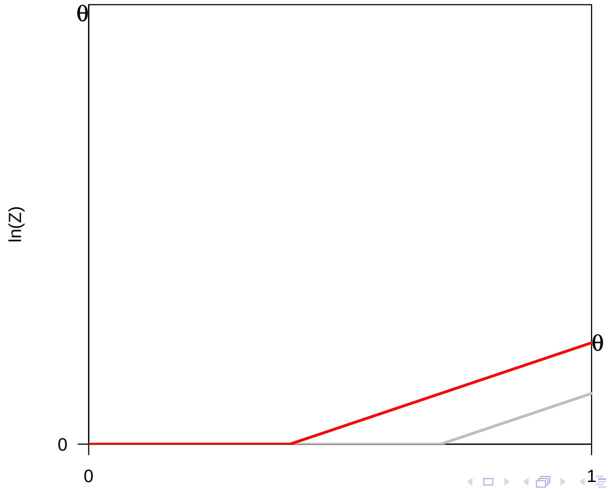
$$\psi(0) = \gamma, \quad \psi(\theta) \leq \Lambda(\theta), \quad \psi(\theta + x) \leq \psi(\theta) + \beta x.$$



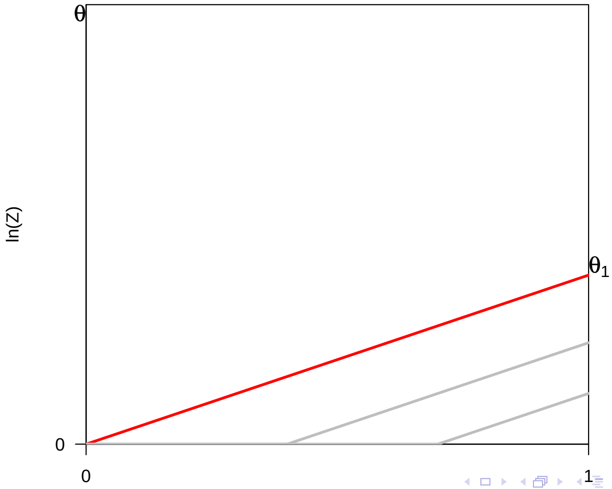
Trajectoire la plus probable pour $\theta < \theta_1$



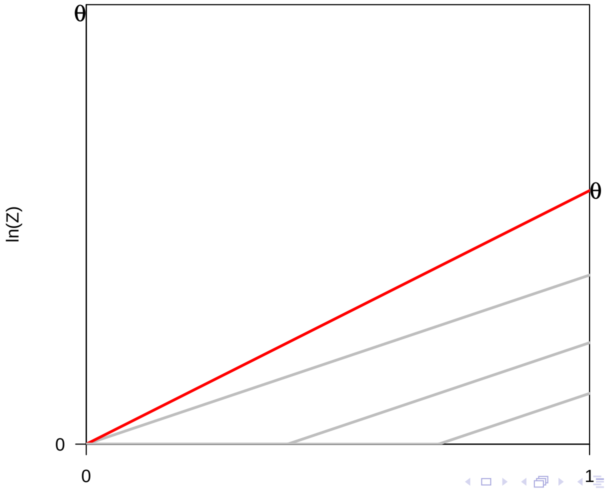
Trajectoire la plus probable pour $\theta < \theta_1$



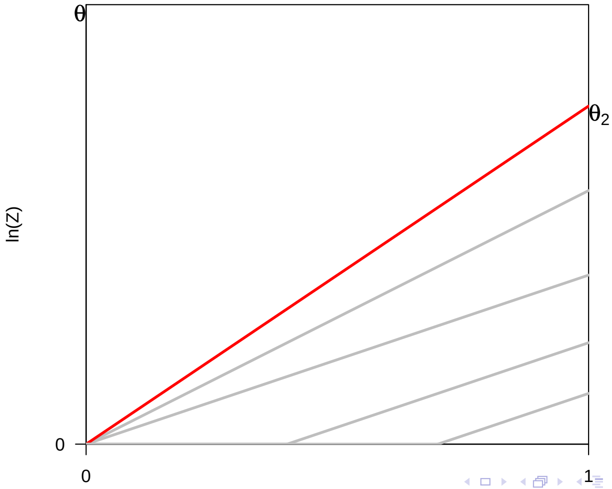
Trajectoire la plus probable pour $\theta = \theta_1$



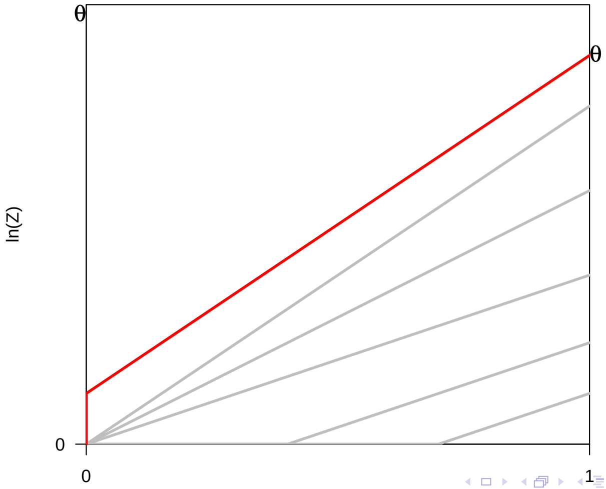
Trajectoire la plus probable pour $\theta_1 < \theta < \theta_2$



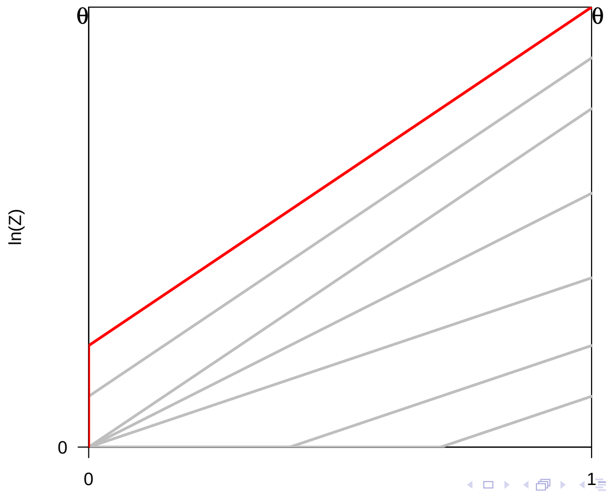
Trajectoire la plus probable pour $\theta = \theta_2$



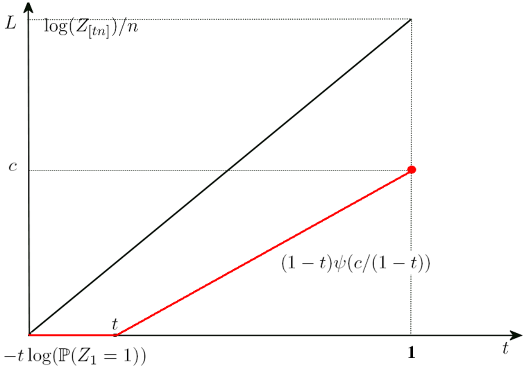
Trajectoire la plus probable pour $\theta > \theta_2$



Trajectoire la plus probable pour $\theta > \theta_2$



A propos de $Z_n \leq \exp(nc)$, avec $c \leq L$



If $\mathbb{P}(Z_1 \geq 1) = 1$ (+ technical assumptions), then

$$-\log(\mathbb{P}(Z_n \leq e^{cn}))/n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \inf_{t\in[0,1]}\{-t\log(\mathbb{P}_1(Z_1=1))+(1-t)\psi(c/(1-t))\}.$$

Probabilité de garder la population vivante et bornée

Quelle est la valeur de

$$\varrho := \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} \log \mathbb{P}(0 < Z_n \leq K).$$

Si $\mathbb{P}(Z_1 \geq 1) = 1$, alors $\varrho = -\log \mathbb{P}(Z_1 = 1)$.
Si $(Z_n : n \geq 0)$ est un processus de Galton Watson, alors

$$\varrho = -\log(f'(p_{ext}))$$

où $p_{ext} = \inf\{s \in [0,1] : f(s) = s\}$ ($= 0$ if $\mathbb{P}(Z_1 \geq 1) = 1$).

Pronostique : $\varrho = -\log(\mathbb{E}(f'_{\mathcal{E}}(p_{ext}(\mathcal{E}))))$

avec $p_{ext}(\mathcal{E}) = \inf\{s \in [0,1] : f_{\mathcal{E}}(s) = s\}$.

Probleme. Stochasticite environnementale : $\varrho \leq \Lambda(0)$

Calculs possibles dans le cas linéaire fractionnaire. Liens avec l'arbre réduit.

Probabilité de garder la population vivante et bornée

Quelle est la valeur de

$$\varrho := \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} \log \mathbb{P}(0 < Z_n \leq K).$$

Si $\mathbb{P}(Z_1 \geq 1) = 1$, alors $\varrho = -\log \mathbb{P}(Z_1 = 1)$.

Si $(Z_n : n \geq 0)$ est un processus de Galton Watson, alors

$$\varrho = -\log(f'(p_{ext}))$$

où $p_{ext} = \inf\{s \in [0,1] : f(s) = s\}$ ($= 0$ if $\mathbb{P}(Z_1 \geq 1) = 1$).

Pronostique : $\varrho = -\log(\mathbb{E}(f'_{\mathcal{E}}(p_{ext}(\mathcal{E})))$

avec $p_{ext}(\mathcal{E}) = \inf\{s \in [0,1] : f_{\mathcal{E}}(s) = s\}$.

Probleme. Stochasticite environnementale : $\varrho \leq \Lambda(0)$

Calculs possibles dans le cas linéaire fractionnaire. Liens avec l'arbre réduit.

Probabilité de garder la population vivante et bornée

Quelle est la valeur de

$$\varrho := \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} \log \mathbb{P}(0 < Z_n \leq K).$$

Si $\mathbb{P}(Z_1 \geq 1) = 1$, alors $\varrho = -\log \mathbb{P}(Z_1 = 1)$.
Si $(Z_n : n \geq 0)$ est un processus de Galton Watson, alors

$$\varrho = -\log(f'(p_{ext}))$$

où $p_{ext} = \inf\{s \in [0,1] : f(s) = s\}$ ($= 0$ if $\mathbb{P}(Z_1 \geq 1) = 1$).

Pronostique : $\varrho = -\log(\mathbb{E}(f'_{\mathcal{E}}(p_{ext}(\mathcal{E})))$

avec $p_{ext}(\mathcal{E}) = \inf\{s \in [0,1] : f_{\mathcal{E}}(s) = s\}$.

Probleme. Stochasticite environnementale : $\varrho \leq \Lambda(0)$

Calculs possibles dans le cas linéaire fractionnaire. Liens avec l'arbre réduit.

Probabilité de garder la population vivante et bornée

Quelle est la valeur de

$$\varrho := \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} \log \mathbb{P}(0 < Z_n \leq K).$$

Si $\mathbb{P}(Z_1 \geq 1) = 1$, alors $\varrho = -\log \mathbb{P}(Z_1 = 1)$.
Si $(Z_n : n \geq 0)$ est un processus de Galton Watson, alors

$$\varrho = -\log(f'(p_{ext}))$$

où $p_{ext} = \inf\{s \in [0,1] : f(s) = s\}$ ($= 0$ if $\mathbb{P}(Z_1 \geq 1) = 1$).

Pronostique : $\varrho = -\log(\mathbb{E}(f'_{\mathcal{E}}(p_{ext}(\mathcal{E})))$

avec $p_{ext}(\mathcal{E}) = \inf\{s \in [0,1] : f_{\mathcal{E}}(s) = s\}$.

Probleme. Stochasticite environnementale : $\varrho \leq \Lambda(0)$

Calculs possibles dans le cas linéaire fractionnaire. Liens avec l'arbre réduit.

Probabilité de garder la population vivante et bornée

Quelle est la valeur de

$$\varrho := \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} \log \mathbb{P}(0 < Z_n \leq K).$$

Si $\mathbb{P}(Z_1 \geq 1) = 1$, alors $\varrho = -\log \mathbb{P}(Z_1 = 1)$.
Si $(Z_n : n \geq 0)$ est un processus de Galton Watson, alors

$$\varrho = -\log(f'(p_{ext}))$$

où $p_{ext} = \inf\{s \in [0,1] : f(s) = s\}$ $(= 0$ if $\mathbb{P}(Z_1 \geq 1) = 1)$.

Pronostique : $\varrho = -\log(\mathbb{E}(f'_{\mathcal{E}}(p_{ext}(\mathcal{E})))$

avec $p_{ext}(\mathcal{E}) = \inf\{s \in [0,1] : f_{\mathcal{E}}(s) = s\}$.

Probleme. Stochasticite environnementale : $\varrho \leq \Lambda(0)$

Calculs possibles dans le cas linéaire fractionnaire. Liens avec l'arbre réduit.