Un problème de contrôle optimale avec une entrée libre

Aidene Mohamed, Louadj Kahina

Université Mouloud Mammeri
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Tizi Ouzou.ALGERIE

SMAI'2011

Plan de travail

La théorie du contrôle analyse les propriétés des systèmes commandés, c'est à dire des systèmes dynamiques sur lesquels on peut agir au moyen d'une commande. Le but est alors d'amener le systéme d'un état initial donné àun certain état final, en respectant éventuellement certains critéres.

les systèmes abordés sont multiples: systèmes différentiels, systèmes discrets, systèmes avec bruit, avec retard... leurs origines sont diverses: mécanique, éléctricité, électronique, biologie, chimie, économie.

Le but de notre travail est de résoudre un problème de contrôle optimale avec une entrée libre, c'est à dire l'état initial appartient à un ensemble X_0. On dit que l'ensemble X_0 est une distribution à priori de l'état initial du système contrôl.

La théorie du contrôle analyse les propriétés des systèmes commandés, c'est à dire des systèmes dynamiques sur lesquels on peut agir au moyen d'une commande. Le but est alors d'amener le systéme d'un état initial donné àun certain état final, en respectant éventuellement certains critéres.
les systèmes abordés sont multiples: systèmes différentiels, systèmes discrets, systèmes avec bruit, avec retard... leurs origines sont diverses: mécanique, éléctricité, électronique, biologie, chimie, économie.
Le but de notre travail est de résoudre un problème de contrôle optimale avec une entrée libre, c'est à dire l'état initial appartient à un ensemble X_0. On dit que l'ensemble X_0 est une distribution à priori de l'état initial du système contrôl.

La théorie du contrôle analyse les propriétés des systèmes commandés, c'est à dire des systèmes dynamiques sur lesquels on peut agir au moyen d'une commande. Le but est alors d'amener le systéme d'un état initial donné àun certain état final, en respectant éventuellement certains critéres.
les systèmes abordés sont multiples: systèmes différentiels, systèmes discrets, systèmes avec bruit, avec retard... leurs origines sont diverses: mécanique, éléctricité, électronique, biologie, chimie, économie.
Le but de notre travail est de résoudre un problème de contrôle optimale avec une entrée libre, c'est à dire l'état initial appartient à un ensemble X_0. On dit que l'ensemble X_0 est une distribution à priori de l'état initial du système contrôl.

Position du problème

$$c'x(t^*) \rightarrow max \tag{1}$$

$$\dot{x} = Ax + bu, \; x(0) = z \in X_0 = \{z \in \mathrm{R}^n, Gz = \gamma, d_* \leq z \leq d^*\}, \tag{2}$$

$$Hx(t^*) = g, \tag{3}$$

$$f_* \leq u(t) \leq f^*, t \in T = [0, t^*]. \tag{4}$$

$$\tilde{c}'z + \int_0^{t^*} c(t)u(t)dt \longrightarrow max, \tag{5}$$

$$D(I,J)z + \int_0^{t^*} \varphi(t)u(t)dt = g, \tag{6}$$

$$G(L,J)z = \gamma,\ d_* \leq z \leq d^*, \tag{7}$$

$$f_* \leq u(t) \leq f^*, t \in T, \tag{8}$$

où $\tilde{c}' = c'F(t^*),\ c(t) = c'F(t^*)F^{-1}(t)b,\ D(I,J) = HF(t^*),\ \varphi(t) = HF(t^*)F^{-1}(t)b.$

Définitions Essentielles

- La paire $v = (z, u(.))$ formée d'un $n-$vecteur z et la fonction continue par morceaux $u(.)$ est appelée la commande généralisée.
- La commande généralisée $v = (z, u(.))$ est dite commande admissible si elle satisfait les contraintes (2)-(4).
- La commande admissible $v^0 = (z^0, u^0(.))$ est dite commande optimal si $J(v^0) = \max_v J(v)$.
- Pour un $\varepsilon \geq 0$ donné, la commande admissible $v^\varepsilon = (z^\varepsilon, u^\varepsilon(.))$ est dite une commande $\varepsilon-$ optimal si: $J(v^0) - J(v^\varepsilon) \leq \varepsilon$.

Définitions Essentielles

- La paire $v = (z, u(.))$ formée d'un $n-$vecteur z et la fonction continue par morceaux $u(.)$ est appelée la commande généralisée.
- La commande généralisée $v = (z, u(.))$ est dite commande admissible si elle satisfait les contraintes (2)-(4).
- La commande admissible $v^0 = (z^0, u^0(.))$ est dite commande optimal si $J(v^0) = \max_v J(v)$.
- Pour un $\varepsilon \geq 0$ donné, la commande admissible $v^\varepsilon = (z^\varepsilon, u^\varepsilon(.))$ est dite une commande $\varepsilon-$ optimal si: $J(v^0) - J(v^\varepsilon) \leq \varepsilon$.

Définitions Essentielles

- La paire $v = (z, u(.))$ formée d'un $n-$vecteur z et la fonction continue par morceaux $u(.)$ est appelée la commande généralisée.
- La commande généralisée $v = (z, u(.))$ est dite commande admissible si elle satisfait les contraintes (2)-(4).
- La commande admissible $v^0 = (z^0, u^0(.))$ est dite commande optimal si $J(v^0) = \max_v J(v)$.
- Pour un $\varepsilon \geq 0$ donné, la commande admissible $v^\varepsilon = (z^\varepsilon, u^\varepsilon(.))$ est dite une commande $\varepsilon-$ optimal si: $J(v^0) - J(v^\varepsilon) \leq \varepsilon$.

Définitions Essentielles

- La paire $v = (z, u(.))$ formée d'un $n-$vecteur z et la fonction continue par morceaux $u(.)$ est appelée la commande généralisée.
- La commande généralisée $v = (z, u(.))$ est dite commande admissible si elle satisfait les contraintes (2)-(4).
- La commande admissible $v^0 = (z^0, u^0(.))$ est dite commande optimal si $J(v^0) = \max_v J(v)$.
- Pour un $\varepsilon \geq 0$ donné, la commande admissible $v^\varepsilon = (z^\varepsilon, u^\varepsilon(.))$ est dite une commande $\varepsilon-$ optimal si: $J(v^0) - J(v^\varepsilon) \leq \varepsilon$.

Support contrôle

$T_B \subset T$ de $k \leq m$ éléments et un sous ensemble $J_B \subset J$ de $m + l - k$ éléments. Formons la matrice du support

$$P_B = \begin{pmatrix} D(I, J_B) & \varphi(t), t \in T_B \\ G(L, J_B) & 0 \end{pmatrix} \qquad (9)$$

- L'ensemble $S_B = \{T_B, J_B\}$ est dit support du problème $(1) - (4)$ si $det P_B \neq 0$.
- La paire $\{v, S_B\}$ formée d'une commande admissible $v = (z, u(.))$ et un support S_B est dit support contrôle.
- Un support contrôle $\{v, S_B\}$ est dit non dégéneré si

$$d_{*j} < z_j < d_j^*, j \in J_B, f_* < u(t) < f^*, t \in T_B$$

Support contrôle

$T_B \subset T$ de $k \leq m$ éléments et un sous ensemble $J_B \subset J$ de $m + l - k$ éléments. Formons la matrice du support

$$P_B = \begin{pmatrix} D(I, J_B) & \varphi(t), t \in T_B \\ & \\ G(L, J_B) & 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

- L'ensemble $S_B = \{T_B, J_B\}$ est dit support du problème $(1) - (4)$ si $det P_B \neq 0$.
- La paire $\{v, S_B\}$ formée d'une commande admissible $v = (z, u(.))$ et un support S_B est dit support contrôle.
- Un support contrôle $\{v, S_B\}$ est dit non dégéneré si

$$d_{*j} < z_j < d^*_j, j \in J_B, f_* < u(t) < f^*, t \in T_B$$

Support contrôle

$T_B \subset T$ de $k \leq m$ éléments et un sous ensemble $J_B \subset J$ de $m + l - k$ éléments. Formons la matrice du support

$$P_B = \begin{pmatrix} D(I, J_B) & \varphi(t), t \in T_B \\ & \\ G(L, J_B) & 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

- L'ensemble $S_B = \{T_B, J_B\}$ est dit support du problème $(1) - (4)$ si $detP_B \neq 0$.
- La paire $\{v, S_B\}$ formée d'une commande admissible $v = (z, u(.))$ et un support S_B est dit support contrôle.
- Un support contrôle $\{v, S_B\}$ est dit non dégéneré si

$$d_{*j} < z_j < d_j^*, j \in J_B, f_* < u(t) < f^*, t \in T_B$$

$$\overline{v} = (\overline{z}, \overline{u}(.)) = v + \Delta v,$$

où

$$\overline{z} = z + \Delta z, \overline{u}(t) = u(t) + \Delta u(t), t \in T,$$

Alors l'accroissement de la fonctionnelle:

$$\Delta J(v) = (\tilde{c}' - \nu' \begin{pmatrix} D(I, J) \\ G(L, J) \end{pmatrix})\Delta z + \int_{t \in T} (\varphi(t) - \nu' c(t))\Delta u(t) \tag{10}$$

Où $\nu = \begin{pmatrix} \nu_u \\ \nu_z \end{pmatrix} \in R^{m+l}, \nu_u \in R^m, \nu_z \in R^l$

$$\overline{v} = (\overline{z}, \overline{u}(.)) = v + \Delta v,$$

où

$$\overline{z} = z + \Delta z, \overline{u}(t) = u(t) + \Delta u(t), t \in T,$$

Alors l'accroissement de la fonctionnelle:

$$\Delta J(v) = (\tilde{c}' - \nu^{'} \begin{pmatrix} D(I,J) \\ G(L,J) \end{pmatrix})\Delta z + \int_{t \in T} (\varphi(t) - \nu^{'} c(t))\Delta u(t) \tag{10}$$

Où $\nu = \begin{pmatrix} \nu_u \\ \nu_z \end{pmatrix} \in R^{m+l}, \nu_u \in R^m, \nu_z \in R^l$

où $\nu' = q'_B Q, Q = P_B^{-1}$ est le vecteur des potentiels solution de l'équation: $q_B = (\tilde{c}_j, j \in J_B, c(t), t \in T_B)$.

Introduisons le vecteur des estimations $\Delta' = \nu' \begin{pmatrix} D(I,J) \\ G(L,J) \end{pmatrix} - \tilde{c}'$, et la fonction cocontrol

$$\Delta(.) = (\Delta(t) = \nu'_u \varphi(t) - c(t), t \in T).$$

En utilisant ces vecteurs l'accroissement de la fonctionnelle:

$$\Delta J(v) = \Delta' \Delta z - \int_{t \in T} \Delta(t) \Delta u(t). \qquad (11)$$

où $\nu' = q'_B Q, Q = P_B^{-1}$ est le vecteur des potentiels solution de l'équation: $q_B = (\tilde{c}_j, j \in J_B, c(t), t \in T_B)$.

Introduisons le vecteur des estimations $\Delta^{'} = \nu^{'} \begin{pmatrix} D(I,J) \\ G(L,J) \end{pmatrix} - \tilde{c}'$,

et la fonction cocontrol

$$\Delta(.) = (\Delta(t) = \nu_u^{'} \varphi(t) - c(t), t \in T).$$

En utilisant ces vecteurs l'accroissement de la fonctionnelle:

$$\Delta J(v) = \Delta^{'} \Delta z - \int_{t \in T} \Delta(t) \Delta u(t). \quad (11)$$

où $\nu' = q'_B Q, Q = P_B^{-1}$ est le vecteur des potentiels solution de l'équation: $q_B = (\tilde{c}_j, j \in J_B, c(t), t \in T_B)$.

Introduisons le vecteur des estimations $\Delta^{'} = \nu^{'} \begin{pmatrix} D(I,J) \\ G(L,J) \end{pmatrix} - \tilde{c}',$

et la fonction cocontrol

$$\Delta(.) = (\Delta(t) = \nu^{'}_u \varphi(t) - c(t), t \in T).$$

En utilisant ces vecteurs l'accroissement de la fonctionnelle:

$$\Delta J(v) = \Delta^{'} \Delta z - \int_{t \in T} \Delta(t) \Delta u(t). \tag{11}$$

La valeur de suboptimalité

$$d_* - z \leq \Delta z \leq d^* - z; \; f_* - u(t) \leq \Delta u(t) \leq f^* - u(t), t \in T. \quad (12)$$

$$\begin{cases} \Delta z_j = d_{*j} - z_j & \text{si } \Delta_j > 0 \\ \Delta z_j = d_j^* - z_j & \text{si } \Delta_j < 0 \\ d_{*j} - z_j \leq \Delta z_j \leq d_j^* - z_j, & \text{si } \Delta_j = 0, \; j \in J. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta u(t) = f_* - u(t) & \text{si } \Delta(t) > 0 \\ \Delta u(t) = f^* - u(t) & \text{si } \Delta(t) < 0 \\ f_* \leq \Delta u(t) \leq f^*, & \text{si } \Delta(t) = 0, \; t \in T_h, \end{cases}$$

La valeur de suboptimalité

$$d_* - z \leq \Delta z \leq d^* - z; \; f_* - u(t) \leq \Delta u(t) \leq f^* - u(t), t \in T. \quad (12)$$

$$\begin{cases} \Delta z_j = d_{*j} - z_j & \text{si } \Delta_j > 0 \\ \Delta z_j = d_j^* - z_j & \text{si } \Delta_j < 0 \\ d_{*j} - z_j \leq \Delta z_j \leq d_j^* - z_j, & \text{si } \Delta_j = 0, \; j \in J. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta u(t) = f_* - u(t) & \text{si } \Delta(t) > 0 \\ \Delta u(t) = f^* - u(t) & \text{si } \Delta(t) < 0 \\ f_* \leq \Delta u(t) \leq f^*, & \text{si } \Delta(t) = 0, \; t \in T_h, \end{cases}$$

La valeur de suboptimalité

$$d_* - z \leq \Delta z \leq d^* - z;\ f_* - u(t) \leq \Delta u(t) \leq f^* - u(t), t \in T. \quad (12)$$

$$\begin{cases} \Delta z_j = d_{*j} - z_j & \text{si } \Delta_j > 0 \\ \Delta z_j = d_j^* - z_j & \text{si } \Delta_j < 0 \\ d_{*j} - z_j \leq \Delta z_j \leq d_j^* - z_j, & \text{si } \Delta_j = 0,\ j \in J. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta u(t) = f_* - u(t) & \text{si } \Delta(t) > 0 \\ \Delta u(t) = f^* - u(t) & \text{si } \Delta(t) < 0 \\ f_* \leq \Delta u(t) \leq f^*, & \text{si } \Delta(t) = 0,\ t \in T_h, \end{cases}$$

$$\beta = \beta(v, S_B) = \sum_{j \in J_H^+} \Delta_j (z_j - d_{*j}) + \sum_{j \in J_H^-} \Delta_j (z_j - d_j^*)$$

$$+ \int_{t \in T^+} \Delta(t)(u(t) - f_*) + \int_{t \in T^-} \Delta(t)(u(t) - f^*)$$

où

$$T^+ = \{t \in T_H, \Delta(t) > 0\}, T^- = \{t \in T_H, \Delta(t) < 0\},$$

$$J_H^+ = \{j \in J_H, \Delta_j > 0\}, J_H^- = \{j \in J_H, \Delta_j < 0\}.$$

Critére d'Optimalité et d' ε-optimalité

Les relations suivantes:

Théorème

$$\begin{cases} u(t) = f_*, & \text{si } \Delta(t) > 0 \\ u(t) = f^*, & \text{si } \Delta(t) < 0 \\ f_* \leq u(t) \leq f^*, & \text{si } \Delta(t) = 0, \ t \in T_h \\ z_j = d_{*j}, & \text{si } \Delta_j > 0 \\ z_j = d_j^*, & \text{si } \Delta_j < 0 \\ d_{*j} \leq z_j \leq d_j^*, & \text{si } \Delta_j = 0, \ j \in J. \end{cases}$$

sont suffisantes et dans le cas de la non dégénerescence , elles sont nécessaire de l'optimalité de la commande v.

Théorème

Pour tout $\varepsilon \geq 0$, la commande admissible v est $\varepsilon-$ optimale si et seulement s'il existe un support S_B tel que $\beta(v, S_B) \leq \varepsilon$.

Théorème

Pour tout $\varepsilon \geq 0$, la commande admissible v est $\varepsilon-$ optimale si et seulement s'il existe un support S_B tel que $\beta(v, S_B) \leq \varepsilon$.

L'algorithme de résolution du problème

Changement de commande

Soient $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, h > 0, \mu > 0$ les paramètres de la méthode, et construisons les ensembles suivants:

$$J_0 = \{j \in J : |\Delta_j| \leq \alpha_2\}, J_* = \{j \in J : |\Delta_j| > \alpha_2\},$$

$$T_0 = \{t \in T : |\Delta(t)| \leq \alpha_1\}, T_* = \{t \in T : |\Delta(t)| > \alpha_1\}, O\grave{u}|J_0| = K,$$

subdivisons T_0 en sous intervalles $[\tau_i, \tau^i[, i = \overline{1, N}; \tau_i < \tau^i, T_0 = \bigcup_{i=1}^{N} [\tau_i, \tau^i], \tau^i - \tau_i \leq h, T_B \subset \{\tau_i, i = \overline{1, N}\}, u(t) = u_i = const, t \in [\tau_i, \tau^i[, i = \overline{1, N}.$

Soit $\{v, S_B\}$ le support contrôle initial et $\overline{v} = (\overline{z}, \overline{u})$ la nouvelle commande admissible.

$$\begin{cases} \overline{z}_j = z_j + \kappa \Delta z_j, & j \in J \\ \overline{u}(t) = u(t) + \theta \Delta u(t), & t \in T. \end{cases} \tag{13}$$

Soit $\{v, S_B\}$ le support contrôle initial et $\overline{v} = (\overline{z}, \overline{u})$ la nouvelle commande admissible.

$$\begin{cases} \overline{z}_j = z_j + \kappa \Delta z_j, & j \in J \\ \overline{u}(t) = u(t) + \theta \Delta u(t), & t \in T, \end{cases} \tag{13}$$

Où

$$\Delta z_j = \begin{cases} d_j^* - z_j, & si \Delta_j < -\alpha_2 \\ d_{*j} - z_j, & si \Delta_j > \alpha_2, j \in J_* \\ 0, & si \Delta_j = 0, j \in J_0, \end{cases}$$

$$\Delta u(t) = \begin{cases} f^* - u(t), & si \Delta(t) < -\alpha_1 \\ f_* - u(t), & si \Delta(t) > \alpha_1, t \in T_* \\ u_i = const, & si t \in [\tau_i, \tau^i[, i = \overline{1, N}, t \in T_0. \end{cases}$$

$l_i = \theta u_i, i = \overline{1, N}, h_j = \kappa \Delta z_j, j \in J_0, h_{K+1} = \kappa$, dfinissons les quantités suivantes:
$g_i = -\int_{\tau_i}^{\tau^i} \Delta(t)dt, i = \overline{1, N}, g_{N+1} = -\int_{T_*} \Delta(t)\Delta u(t)dt,$
$\phi_i = -\int_{\tau_i}^{\tau^i} \varphi(t)dt, i = \overline{1, N}, \phi_{N+1} = -\int_{T_*} \varphi(t)\Delta u(t),$
$q_j = -\Delta_j, j \in J_0, q_{K+1} = \sum_{j \in J_*} -\Delta_j \Delta z_j, j \in J_*,$
$D_j = D(I, j), j \in J_0, D_{K+1} = \sum_{j \in J_*} D(I, j)\Delta z_j,$
$f_{*i} = f_* - u_i, f_i^* = f^* - u_i, i = \overline{1, N}, f_{*N+1} = 0, f_{N+1}^* = 1,$
$d_{*j} = d_* - z_j, d_j^* = d^* - z_j, j = \overline{1, K}, d_{*K+1} = 0, d_{K+1}^* = 1.$
Trouver la solution $(h_j, l_i), j = \overline{1, K+1}, i = \overline{1, N+1},$

$$\begin{cases} \Delta J(v) = \sum_{j \in J_0 \cup \{K+1\}} q_j h_j + \sum i = 1^{N+1} g_i l_i \rightarrow max_{h_j, l_i}, \\ \sum_{J_0 \cup \{K+1\}} D(I,j) h_j + \sum_{i=1}^{N+1} \phi_i l_i = 0, \\ \sum_{j \in J_0 \cup \{K+1\}} G(I,j) h_j = 0, \\ f_{*i} \leq l_i \leq f_i^*, & i = \overline{1, N+} \\ d_{*j} \geq h_j \geq d_j^*, & j = \overline{1, K+} \end{cases} \tag{14}$$

$$\overline{z}_j = \begin{cases} z_j + h_{K+1}\Delta z_j, & j \in J_* \\ z_j + h_j, & j \in J_0. \end{cases} \tag{15}$$

$$\overline{u}(t) = \begin{cases} u(t) + l_{N+1}\Delta u(t), & t \in T_* \\ u(t) + l_i, & t \in [\tau_i, \tau^i[, i = \overline{1, N}. \end{cases} \tag{16}$$

- Si $K+1 \notin \overline{J}_B$ et $t_{N+1} \notin \overline{T}_B$, on poset:

$$\tilde{S}_B = \{\tilde{J}_B = \overline{J}_B, \tilde{T}_B = \overline{T}_B\}.$$

- Sinon, on aura les cas suivants:

- Si $K+1 \notin \overline{J}_B$ et $t_{N+1} \notin \overline{T}_B$, on poset:

$$\tilde{S}_B = \{\tilde{J}_B = \overline{J}_B, \tilde{T}_B = \overline{T}_B\}.$$

- Sinon, on aura les cas suivants:

1. Si $K+1 \notin \overline{J}_B$ et $t_{N+1} \in \overline{T}_B$, on exclut l'indice $N+1$ du support de la manière suivante: soit:

$$\overline{\Delta}(t) = \Delta(t) + \sigma\delta(t),$$

Oú σ est le pas maximal du dual et $\delta(t)$ la direction .
Déterminons i_* tel que:

$$\sigma(t_{i*}) = min\sigma(t_i), t_i \in T_H,$$

avec

$$\sigma(t_i) = \begin{cases} -\Delta(t_i)/\delta(t_i), & \text{si } \Delta(t_i) \times \delta(t_i) \leq 0, \delta(t_i) \neq 0 \\ +\infty, & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & \text{sur } T_B/\{t_{N+1}\}; \\ 1, & \text{si } \overline{u}(t) = f_*; \\ -1, & \text{si } \overline{u}(t) = f^* \end{cases}$$

Alors le nouveau support:

$$\tilde{J}_B = \overline{J}_B; \tilde{T}_B = (\overline{T}_B/\{t_{N+1}\}) \cup \{t_{i*}\}.$$

2. Si $K+1 \in \overline{J}_B$ and $t_{N+1} \notin \overline{T}_B$, on exclut $K+1$ du support de la manière suivante: soit:

$$\overline{\Delta}_j = \Delta_j + \sigma_j \delta_j,$$

où σ_j est le pas maximal du dual et δ_j la direction.
Déterminons j_* tel que:

$$\sigma_{j*} = min \sigma_j, j \in J_H,$$

avec

$$\sigma_j = \begin{cases} -\Delta_j/\delta_j, & \text{si } \Delta_j \times \delta_j \leq 0, \delta_j \neq 0 \\ +\infty, & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\delta_j = \begin{cases} 0, & \text{sur } J_B/\{K+1\}; \\ 1, & \text{si } \bar{z}_j = d_*; \\ -1, & \text{si } \bar{z}_j = d^*. \end{cases}$$

$$\delta_j = \delta'_B P_B^{-1} \begin{pmatrix} D(I,J) \\ G(L,J) \end{pmatrix}, j \in J.$$

alors le nouveau support:

$$\tilde{J}_B = (\overline{J}_B/\{K+1\}) \cup \{j_*\};\ \tilde{T}_B = \overline{T}_B.$$

3. Si $K+1 \in \overline{J}_B, t_{N+1} \in \overline{T}_B$, le nouveau support est:

$$\tilde{J}_B = (\overline{J}_B/\{K+1\}) \cup \{j_*\};\ \tilde{T}_B = (\overline{T}_B/\{t_{N+1}\}) \cup \{t_{i*}\}.$$

On calcule la nouvelle valeur de suboptimalité $\beta(\tilde{v}, \tilde{S}_B)$.

- Si $\beta(\tilde{v}, \tilde{S}_B) = 0$, alors $\overline{v}$ est optimale.
- Si $\beta(\tilde{v}, \tilde{S}_B) \leq \varepsilon$, alors $\overline{v}$ est $\varepsilon-$ optimale.
- Sinon, on passe à une nouvelle itération de $\{\overline{v}, \tilde{S}_B\}, \overline{\alpha}_1 < \alpha_1, \overline{\alpha}_2 < \alpha_2, \overline{h} < h$ où on passe au changement du support.

On calcule la nouvelle valeur de suboptimalité $\beta(\tilde{v}, \tilde{S}_B)$.

- Si $\beta(\tilde{v}, \tilde{S}_B) = 0$, alors $\overline{v}$ est optimale.
- Si $\beta(\tilde{v}, \tilde{S}_B) \leq \varepsilon$, alors $\overline{v}$ est $\varepsilon-$ optimale.
- Sinon, on passe à une nouvelle itération de $\{\overline{v}, \tilde{S}_B\}, \overline{\alpha}_1 < \alpha_1, \overline{\alpha}_2 < \alpha_2, \overline{h} < h$ où on passe au changement du support.

On calcule la nouvelle valeur de suboptimalité $\beta(\tilde{v}, \tilde{S}_B)$.

- Si $\beta(\tilde{v}, \tilde{S}_B) = 0$, alors $\overline{v}$ est optimale.
- Si $\beta(\tilde{v}, \tilde{S}_B) \leq \varepsilon$, alors $\overline{v}$ est $\varepsilon-$ optimale.
- Sinon, on passe à une nouvelle itération de $\{\overline{v}, \tilde{S}_B\}, \overline{\alpha}_1 < \alpha_1, \overline{\alpha}_2 < \alpha_2, \overline{h} < h$ où on passe au changement du support.

Changement du support. Construisons la quasi-commande $\tilde{v} = (\tilde{z}, \tilde{u}(t), t \in T)$:

$$\tilde{z}_j = \begin{cases} d_{j*} & \text{si } \tilde{\Delta}_j > 0 \\ d_j^* & \text{si } \tilde{\Delta}_j < 0 \\ \in [d_{j*}, d_j^*] & \text{si } \tilde{\Delta}_j = 0, \ j \in J \end{cases}$$

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} f_*, & \text{si } \tilde{\Delta}(t) < 0 \\ f^*, & \text{si } \tilde{\Delta}(t) > 0, \\ \in [f_* f^*] & \text{si } \tilde{\Delta}(t) = 0, \ t \in T, \end{cases}$$

$$\tilde{\Delta}(t) = -\tilde{\psi}'(t)b, t \in T, \tilde{\Delta}' = (\tilde{\Delta}_j, j \in J)' = \nu' \begin{pmatrix} D(I,J) \\ G(L,J) \end{pmatrix} - \tilde{c}'.$$

Où, $\tilde{\psi}(t), t \in T$, la solution du système adjoint $\tilde{S}_B$.

Soit la quasi-trajectoire $\chi = (\chi(t), t \in T), \chi(0) = z \in X_0$ correspondante au système $\dot{\chi} = A\chi + b\tilde{u}, \chi(0) = z \in X_0$.
si

$$D(I, J)\tilde{z} + \int_0^{t^*} \varphi(t)\tilde{u}(t)dt = g,$$

$$G(L, J)\tilde{z} = \gamma,$$

alors $\overline{v}$ est une commande optimale, et si

$$D(I, J)\tilde{z} + \int_0^{t^*} \varphi(t)\tilde{u}(t)dt \neq g,$$

$$G(L, J)\tilde{z} \neq \gamma,$$

Contruisons le vecteur $\lambda(\tilde{J}_B, \tilde{T}_B)$ comme suit:

$$P(\tilde{S}_B) \cdot \lambda(\tilde{J}_B, \tilde{T}_B) = \begin{pmatrix} D(I, J)\tilde{z} + \int_0^{t^*} \tilde{u}(t)dt - g \\ G(L, J)\tilde{z} - \gamma \end{pmatrix}$$

$$\lambda(\tilde{J}_B, \tilde{T}_B) = P_B^{-1}(\tilde{S}_B) \begin{pmatrix} D(I, J)\tilde{z} + \int_0^{t^*} \tilde{u}(t)dt - g \\ G(L, J)\tilde{z} - \gamma \end{pmatrix}.$$

- Si $\| \lambda(\tilde{J}_B, \tilde{T}_B) \| = 0$, alors la quasi-commande $\tilde{v}$ est optimale du probléme $(1) - (4)$.
- Si $\| \lambda(\tilde{J}_B, \tilde{T}_B) \| > \mu$, alors on change le support $\tilde{S}_B$ to $\overline{S}_B$ par la méthode duale.
- Si $\| \lambda(\tilde{J}_B, \tilde{T}_B) \| < \mu$, sinon on passe à la procédure finale.

- Si $\| \lambda(\tilde{J}_B, \tilde{T}_B) \| = 0$, alors la quasi-commande $\tilde{v}$ est optimale du probléme $(1) - (4)$.
- Si $\| \lambda(\tilde{J}_B, \tilde{T}_B) \| > \mu$, alors on change le support $\tilde{S}_B$ to $\overline{S}_B$ par la méthode duale.
- Si $\| \lambda(\tilde{J}_B, \tilde{T}_B) \| < \mu$, sinon on passe à la procédure finale.

- Si $\| \lambda(\tilde{J}_B, \tilde{T}_B) \| = 0$, alors la quasi-commande $\tilde{v}$ est optimale du probléme $(1) - (4)$.
- Si $\| \lambda(\tilde{J}_B, \tilde{T}_B) \| > \mu$, alors on change le support $\tilde{S}_B$ to $\overline{S}_B$ par la méthode duale.
- Si $\| \lambda(\tilde{J}_B, \tilde{T}_B) \| < \mu$, sinon on passe à la procédure finale.

Soit

$$\lambda_0 = max_{\{j \in J_B, t \in T_B\}} |\lambda(t), \lambda_j|.$$

Considérons deux cas:

1. Si $\lambda_0 = max_{\{j \in J_B, t \in T_B\}} |\lambda(t), \lambda_j| = |\lambda_{j0}|, j_0 \in \tilde{J}_B$,

le pas du duale:

$$\sigma_j = \begin{cases} -\tilde{\Delta}_j/\delta_j, & \text{si } \tilde{\Delta}_j \delta_j < 0, \delta_j \neq 0 \\ 0, & \text{si } \tilde{\Delta}_j = 0, \delta_j > 0, \bar{z} \neq d_* o\grave{u} \tilde{\Delta}_j = 0, \delta_j < 0, \bar{z} \neq d^*, \\ +\infty, & \text{sinon}, j \in J. \end{cases}$$

Construisons l'ensemble suivant:

$$J(\sigma) = \{j \in J : \sigma_j < \sigma\},$$

la vitesse de décroissance de la fonctionnnelle duale:

$$\alpha(\sigma) = -|\lambda_{j0}| + 2\sum_{J(\sigma)} |\delta_j|.$$

Par construction:

$$\alpha(0) = -|\lambda_{j0}| < 0 et \alpha(\sigma) < \alpha(\overline{\sigma}) si \sigma < \overline{\sigma}, si \alpha(\sigma) < 0 pour \sigma > 0,$$

alors le problème $(1) - (4)$ ne possède pas de commande admissible.

Sinon, on cherche $\sigma_0 \geq 0$ tel que:

$$\alpha(\sigma_0 - y) < 0, \alpha(\sigma_0 + 0) \geq 0, \forall 0 \leq y \leq \sigma_0.$$

Soit $j_* \in J/\tilde{J}_B$ tel que:

$$\tilde{\Delta}(j_*) + \sigma^0 \delta_{j*} = 0, \delta_{j*} \neq 0,$$

Alors le nouveau support est $\hat{S}_B$ tel que:

$$\hat{S}_B = \{\hat{J}_B = (\tilde{J}_B/\{j_0\}) \cup \{j_*\}, \hat{T}_B = \tilde{T}_B\}.$$

2. Si $\lambda_0 = max_{\{j \in J_B, t \in T_B\}} |\lambda(t), \lambda_j| = |\lambda(t_0)|, t_0 \in \tilde{T}_B$, et calculons les qunatitès suivantes:

$$\begin{cases} \Delta\nu(I) = -P_B^{-1}(t_0, I) sign \lambda(t_0) = \delta_{T_B} \cdot P^{-1}(T_B), & \\ \delta(t) = \Delta\psi' b, & t \in T \\ \Delta\dot{\psi} = -A'\Delta\psi, & \\ \Delta\psi(t_1) = -H'\Delta\nu, & \end{cases}$$

avec $P_B^{-1}(t_0, I)$: la $t_0^{i'\grave{e}me}$ ligne de la matrice $[P(I, T_B)]^{-1}$.

le pas du duale:

$$\sigma(t) = \begin{cases} -\tilde{\Delta}(t)/\delta(t), & \text{si } \tilde{\Delta}\delta(t) < 0, \quad \delta(t) \neq 0 \\ 0, & \text{si } \tilde{\Delta}(t) = 0, \delta(t) > 0, \overline{u}(t) \neq f_* o\grave{u} \tilde{\Delta}(t) = 0, \delta(t) < 0, \overline{u} \\ +\infty, & \text{sinon, } t \in T. \end{cases}$$

Construisons l'ensemble suivant:

$$T(\sigma) = \{t \in T : \sigma(t) < \sigma\},$$

la vitesse de décroissance de la fonctionnnelle duale:

$$\alpha(\sigma) = -|\lambda(t_0)| + 2\int_{T(\sigma)} |\delta(t)|dt.$$

Par construction:

$$\alpha(0) = -|\lambda(t_0)| < 0 et \alpha(\sigma) < \alpha(\overline{\sigma}) si \quad \sigma < \overline{\sigma}, si \alpha(\sigma) < 0 pour \sigma > 0,$$

alors le problème $(1) - (4)$ ne possède pas de commande admissible.

Sinon, on cherche $\sigma_0 \geq 0$ tel que:

$$\alpha(\sigma_0 - y) < 0, \alpha(\sigma_0 + 0) \geq 0, \forall 0 \leq y \leq \sigma_0.$$

Soit $t_* \in T/\tilde{T}_B$ tel que:

$$\tilde{\Delta}(t_*) + \sigma^0 \delta(t_*) = 0, \delta(t_*) \neq 0,$$

alors le nouveau support est $\hat{S}_B$ tel que:

$$\hat{S}_B = \{\hat{J}_B = \tilde{J}_B, \hat{T}_B = (\tilde{T}_B/\{t_0\}) \cup \{t_*\}\}.$$

Calculons la nouvelle valeur de suboptimalité $\beta(\overline{v}, \hat{S}_B)$:

- si $\beta(\overline{v}, \hat{S}_B) = 0$, alors la commande $\overline{v}$ est optimale pour le problème (1)-(4) .
- Si $\beta(\overline{v}, \hat{S}_B) < \varepsilon$, alors la commande $\overline{v}$ est ε-optimale pour le problème (1)-(4) .
- Si $\beta(\overline{v}, \hat{S}_B) > \varepsilon$, on refait l'itèration avec le nouveau support $\{\overline{v}, \hat{S}_B\}$.

Calculons la nouvelle valeur de suboptimalité $\beta(\overline{v}, \hat{S}_B)$:

- si $\beta(\overline{v}, \hat{S}_B) = 0$, alors la commande $\overline{v}$ est optimale pour le problème (1)-(4) .
- Si $\beta(\overline{v}, \hat{S}_B) < \varepsilon$, alors la commande $\overline{v}$ est ε-optimale pour le problème (1)-(4) .
- Si $\beta(\overline{v}, \hat{S}_B) > \varepsilon$, on refait l'itèration avec le nouveau support $\{\overline{v}, \hat{S}_B\}$.

Calculons la nouvelle valeur de suboptimalité $\beta(\overline{v}, \hat{S}_B)$:

- si $\beta(\overline{v}, \hat{S}_B) = 0$, alors la commande $\overline{v}$ est optimale pour le problème (1)-(4) .
- Si $\beta(\overline{v}, \hat{S}_B) < \varepsilon$, alors la commande $\overline{v}$ est ε-optimale pour le problème (1)-(4) .
- Si $\beta(\overline{v}, \hat{S}_B) > \varepsilon$, on refait l'itèration avec le nouveau support $\{\overline{v}, \hat{S}_B\}$.

La procédure finale. En utilisant le support $\hat{S}_B$,on construit la quasi-commande $\widehat{v} = (\widehat{z}, \widehat{u}(t), t \in T)$:

$$\widehat{z}_j = \begin{cases} d_{j*} & \text{si } \Delta_j > 0 \\ d_j^* & \text{si } \Delta_j < 0 \\ \in [d_{j*}, d_j^*] & \text{si } \Delta_j = 0, \ j \in J \end{cases}$$

$$\widehat{u}(t) = \begin{cases} f_*, & \text{si } \Delta(t) < 0 \\ f^*, & \text{si } \Delta(t) > 0, \\ \in [f_*, f^*] & \text{si } \Delta(t) = 0, \ t \in T. \end{cases}$$

Si

$$D(I,J)\widehat{z}+\int_0^{t^*}\varphi(t)\widehat{u}(t)dt=g,$$
$$G(L,J)\widehat{z}=\gamma,$$

alors $\widehat{v}$ est une commande optimale,et si

$$D(I,J)\widehat{z}+\int_0^{t^*}\varphi(t)\widehat{u}(t)dt\neq g,\quad G(L,J)\widehat{z}\neq\gamma, \tag{17}$$

$T^0=\{t_i,\ i=\overline{1,s}\},\ s=|T_B|$ l'ensemble des points isolés
$\Delta(t)=0, t\in T;\ t_0=0,\ t_{s+1}=t^*$, tel que

$$\dot{\Delta}(t_i)\neq 0,\ i=\overline{1,s}.$$

Si

$$D(I,J)\widehat{z}+\int_0^{t^*}\varphi(t)\widehat{u}(t)dt=g,$$
$$G(L,J)\widehat{z}=\gamma,$$

alors $\widehat{v}$ est une commande optimale,et si

$$D(I,J)\widehat{z}+\int_0^{t^*}\varphi(t)\widehat{u}(t)dt\neq g,\quad G(L,J)\widehat{z}\neq\gamma, \tag{17}$$

$T^0=\{t_i,\ i=\overline{1,s}\},\ s=|T_B|$ l'ensemble des points isolés $\Delta(t)=0, t\in T;\ t_0=0,\ t_{s+1}=t^*$, tel que

$$\dot{\Delta}(t_i)\neq 0,\ i=\overline{1,s}.$$

Pour le système (17) Construisons la fonction $f(\Theta)$:

$$\left(\begin{array}{c} D(I,J_B)z(J_B)+D(I,J_H)z(J_H)+\sum_{i=0}^{s}\left(\frac{f^*+f_*}{2}-\frac{f^*-f_*}{2}sign\dot{\Delta}(t_i)\right)\int_{t_i}^{t_{i+1}}\varphi(\\ G(L,J_B)z(J_B)+G(L,J_H)z(J_H)-\gamma \end{array} \right. \tag{18}$$

où

$$z_j=\frac{d_j^*+d_j*}{2}-\frac{d_j^*-d_j*}{2}sign\Delta_j,\ j\in J_H.$$

$$\Theta=(t_i,\ i=\overline{1,s};z_j,j\in J_B).$$

Pour le système (17) Construisons la fonction $f(\Theta)$:

$$\left(\begin{array}{c} D(I, J_B)z(J_B) + D(I, J_H)z(J_H) + \sum_{i=0}^{s}(\frac{f^*+f_*}{2} - \frac{f^*-f_*}{2}sign\dot{\Delta}(t_i)) \int_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi(\\ G(L, J_B)z(J_B) + G(L, J_H)z(J_H) - \gamma \end{array} \right. \quad (18)$$

où

$$z_j = \frac{d_j^* + d_j*}{2} - \frac{d_j^* - d_j*}{2} sign\Delta_j, \ j \in J_H.$$

$$\Theta = (t_i, \ i = \overline{1, s}; z_j, j \in J_B).$$

La procédure finale consiste à trouver la solution

$$\Theta^0 = (t_i^0, i = \overline{1, s}; z_j^0, j \in J_B)$$

un système de $m + l-$ équations non-linéaires

$$f(\Theta) = 0. \tag{19}$$

On résout ce système en utilisant la méthode de Newton.

La procédure finale consiste à trouver la solution

$$\Theta^0 = (t_i^0, i = \overline{1, s}; z_j^0, j \in J_B)$$

un système de $m + l-$ équations non-linéaires

$$f(\Theta) = 0. \tag{19}$$

On résout ce système en utilisant la méthode de Newton.

La solution du problème (1)-(4) est calculé comme suit:

$$z_j^0 = \begin{cases} z_j^0, & j \in J_B \\ \widehat{z}_j, & j \in J_H; \end{cases}$$

$$u^0(t) = \frac{f^* + f_*}{2} - \frac{f^* - f_*}{2} sign\dot{\Delta}(t_i^0), \ \ t \in [t_i^0, t_{i+1}^0[, \ \ i = \overline{1, s}.$$

La solution du problème (1)-(4) est calculé comme suit:

$$z_j^0 = \begin{cases} z_j^0, & j \in J_B \\ \widehat{z}_j, & j \in J_H; \end{cases}$$

$$u^0(t) = \frac{f^* + f_*}{2} - \frac{f^* - f_*}{2} sign\dot{\Delta}(t_i^0), \;\; t \in [t_i^0, t_{i+1}^0[, \;\; i = \overline{1, s}.$$

Conclusion

L'objectif de notre travail est de résoudre un problème de contrôle optimal avec une condition initial libre.

on s'est intéressé à la résolution d'un problème terminal d'un système dynamique linéaire en utilisant la méthode de point intérieur de trois procédures, Changement de commande, Changement de support, on passe à la procédure finale.

Conclusion

L'objectif de notre travail est de résoudre un problème de contrôle optimal avec une condition initial libre.
on s'est intéressé à la résolution d'un problème terminal d'un système dynamique linéaire en utilisant la méthode de point intérieur de trois procédures, Changement de commande, Changement de support, on passe à la procédure finale.

MERCI DE VOTRE ATTENTION