Résolution d'un problème inverse de Cauchy en théorie des plaques minces

Azariel Paul EYIMI MINTO'O
LMA–Université de Poitiers

Congrès SMAI 2011–Club Belambra, Guidel
5e Biennale Française des Mathématiques Appliquées

avec A. CIMETIERE (Poitiers) et A. MIRANVILLE (Poitiers)
24 Mai 2011

Plan

Introduction

De manière générale, les problèmes inverses de type Cauchy consistent à reconstruire l'information sur toute la frontière d'un domaine à partir de l'information dont on dispose sur une partie de cette frontière. Jacques Hadamard (1953) fut le premier à illustrer le caractère mal posé de ces problèmes, au sens où l'une au moins des trois conditions suivantes n'est pas vérifiée :

- Existence de la solution
- Unicité de la solution
- Continuité de la solution par rapport aux données

$\bullet$Méthode de régularisation évanescente

A.Cimetière–F.Delvare–M.Jaoua et F.Pons (2000-2001).

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^2$, de frontière $\Gamma = \Gamma_d \cup \Gamma_i$ régulière.

Soient φ_d et ψ_d deux fonctions données sur Γ_d (pas d'information sur Γ_i).

Le problème de Cauchy est le suivant :

$$\begin{cases} \Delta u = & 0 & \text{dans} & \Omega \\ u = & \varphi_d & \text{sur} & \Gamma_d \\ \frac{\partial u}{\partial n} = & \psi_d & \text{sur} & \Gamma_d \end{cases}$$

La paire (φ_d, ψ_d) est supposée compatible.

•Méthode de régularisation évanescente

A.Cimetière–F.Delvare–M.Jaoua et F.Pons (2000-2001).

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^2$, de frontière $\Gamma = \Gamma_d \cup \Gamma_i$ régulière.

Soient φ_d et ψ_d deux fonctions données sur Γ_d (pas d'information sur Γ_i).

Le problème de Cauchy est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rclcl} \Delta u & = & 0 & \text{dans} & \Omega \\ u & = & \varphi_d & \text{sur} & \Gamma_d \\ \frac{\partial u}{\partial n} & = & \psi_d & \text{sur} & \Gamma_d \end{array} \right.$$

La paire (φ_d, ψ_d) est supposée compatible.

- Problème mal posé au sens d'Hadamard.

•Méthode de régularisation évanescente

A.Cimetière–F.Delvare–M.Jaoua et F.Pons (2000-2001).

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^2$, de frontière $\Gamma = \Gamma_d \cup \Gamma_i$ régulière.

Soient φ_d et ψ_d deux fonctions données sur Γ_d (pas d'information sur Γ_i).

Le problème de Cauchy est le suivant :

$$\begin{cases} \Delta u = & 0 & \text{dans} & \Omega \\ u = & \varphi_d & \text{sur} & \Gamma_d \\ \frac{\partial u}{\partial n} = & \psi_d & \text{sur} & \Gamma_d \end{cases}$$

La paire (φ_d, ψ_d) est supposée compatible.

- Problème mal posé au sens d'Hadamard.
- Résolution par la méthode de régularisation évanescente.

•**Méthode de régularisation évanescente**

A.Cimetière–F.Delvare–M.Jaoua et F.Pons (2000-2001).

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^2$, de frontière $\Gamma = \Gamma_d \cup \Gamma_i$ régulière.

Soient φ_d et ψ_d deux fonctions données sur Γ_d (pas d'information sur Γ_i).

Le problème de Cauchy est le suivant :

$$\begin{cases} \Delta u = & 0 & \text{dans} & \Omega \\ u = & \varphi_d & \text{sur} & \Gamma_d \\ \frac{\partial u}{\partial n} = & \psi_d & \text{sur} & \Gamma_d \end{cases}$$

La paire (φ_d, ψ_d) est supposée compatible.

- Problème mal posé au sens d'Hadamard.
- Résolution par la méthode de régularisation évanescente.

A chaque étape, on résoud le problème d'optimisation suivant :

Soient $\mathbf{u}_0 \in \mathrm{H}(\Gamma)$ et $c > 0$ donnés

$$\begin{cases} \text{Trouver } \ \mathbf{u}_{k+1} = \text{Argmin } \mathrm{J}_c^k(\mathbf{v}) \ \ \mathbf{v} \in \mathrm{H}(\Gamma) \\ \text{avec } \ \mathrm{J}_c^k(\mathbf{v}) = \|\mathbf{v} - \mathbf{z}_d\|_{\Gamma_d}^2 + c\|\mathbf{v} - \mathbf{u}_k\|_{\Gamma}^2 \end{cases}$$

$\mathbf{z}_d = (\varphi_d, \psi_d)$ et $\mathrm{H}(\Gamma)$ est l'espace des paires de traces compatibles.

Le problème inverse de Cauchy pour les plaques minces

Soit Ω un ouvert borné, connexe et régulier de $\mathbb{R}^2$. Sa frontière $\Gamma = \Gamma_d \cup \Gamma_i$ est supposée régulière et analytique. En partant de la formulation des plaques minces élastiques (cf. par exemple G.Duvaut et J.L.Lions (1972)), on se propose de résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rclcll} D\Delta^2\zeta & = & f & & & \text{dans } \Omega \\ \zeta & = & \kappa_{0d}, \quad \dfrac{\partial \zeta}{\partial n} & = & \kappa_{1d} & \text{sur } \Gamma_d \\ \dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial n^2} & = & \mu_d, \quad \dfrac{\partial^3 \zeta}{\partial n^3} & = & \phi_d & \text{sur } \Gamma_d \end{array} \right. \tag{1}$$

où aucune mesure n'est disponible sur Γ_i, et

$$\begin{aligned} D &= Eh^3/(12(1-\nu^2)) \\ \mu_d &= D'\mathbf{m}_d - \nu\left(\frac{\partial^2 \kappa_{0d}}{\partial \tau^2} + \frac{\kappa_{1d}}{R}\right), \quad D' = 1/D \\ \phi_d &= -D'\left(\mathbf{f}_d + \frac{\mathbf{m}_d}{R}\right) - (2-\nu)\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial \kappa_{1d}}{\partial \tau} - \frac{1}{R}\frac{\partial \kappa_{0d}}{\partial \tau}\right) + \frac{(\nu+1)}{R}\left(\frac{\partial^2 \kappa_{0d}}{\partial \tau^2} + \frac{\kappa_{1d}}{R}\right) \end{aligned}$$

On fait le changement de fonction inconnue

$$u = \zeta - \overline{\zeta}$$

(1) se réécrit comme le problème inverse de Cauchy pour le bilaplacien :

$$\left\{\begin{array}{rclcll} \Delta^2 u & = & 0 & & & \text{dans } \Omega \\ u & = & \kappa_{0d}, \quad \frac{\partial u}{\partial n} & = & \kappa_{1d} & \text{sur } \Gamma_d \\ \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} & = & \kappa_{2d}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial n^3} & = & \kappa_{3d} & \text{sur } \Gamma_d \end{array}\right. \tag{2}$$

où les données κ_{0d}, κ_{1d}, κ_{2d} et κ_{3d} fixées sur la partie Γ_d sont supposées compatibles et analytiques, et où

$$\begin{array}{rcll} \kappa_{2d} & = & \mu_d - D'\overline{\mathbf{m}_d} & \text{sur } \Gamma_d \\ \kappa_{3d} & = & \phi_d + D'(\overline{\mathbf{f}_d} + \frac{\overline{\mathbf{m}_d}}{R}) & \text{sur } \Gamma_d \end{array}$$

On fait le changement de fonction inconnue

$$u = \zeta - \overline{\zeta}$$

(1) se réécrit comme le problème inverse de Cauchy pour le bilaplacien :

$$\left\{ \begin{array}{rclcll} \Delta^2 u & = & 0 & & & \text{dans } \Omega \\ u & = & \kappa_{0d}, \quad \frac{\partial u}{\partial n} & = & \kappa_{1d} & \text{sur } \Gamma_d \\ \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} & = & \kappa_{2d}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial n^3} & = & \kappa_{3d} & \text{sur } \Gamma_d \end{array} \right. \qquad (2)$$

où les données κ_{0d}, κ_{1d}, κ_{2d} et κ_{3d} fixées sur la partie Γ_d sont supposées compatibles et analytiques, et où

$$\begin{array}{rcll} \kappa_{2d} & = & \mu_d - D'\overline{\mathbf{m}_d} & \text{sur } \Gamma_d \\ \kappa_{3d} & = & \phi_d + D'(\overline{\mathbf{f}_d} + \frac{\overline{\mathbf{m}_d}}{R}) & \text{sur } \Gamma_d \end{array}$$

•**Objectif** : Rechercher le quadruplet $(u, \frac{\partial u}{\partial n}, \frac{\partial^2 u}{\partial n^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial n^3})$ des traces de u qui se rapproche au mieux du quadruplet $(\kappa_{0d}, \kappa_{1d}, \kappa_{2d}, \kappa_{3d})$ de données sur Γ_d.

Résolution par régularisation évanescente

La solution est considérée dans l'espace des fonctions biharmoniques

$$\mathscr{H}^2_{\Delta^2}(\Omega) = \left\{u \in \mathrm{H}^2(\Omega) \ / \ \Delta^2 u = 0\right\}$$

On introduit les espaces suivants :

• **L'espace** $\mathrm{H}(\Gamma)$ **des quadruplets de traces compatibles**

$$\mathrm{H}(\Gamma) = \Big\{ \mathbf{k} = (\kappa_0, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) \in \mathrm{H}^{3/2}(\Gamma) \times \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma) \times \mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma) \times \mathrm{H}^{-3/2}(\Gamma)$$
$$\text{tel qu'il existe } u \in \mathscr{H}^2_{\Delta^2}(\Omega) \text{ et } \Big(u, \frac{\partial u}{\partial n}, \frac{\partial^2 u}{\partial n^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial n^3}\Big)_{\Gamma} = (\kappa_0, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) \Big\}$$

$\mathrm{H}(\Gamma)$ est fermé dans $\mathrm{H}^{3/2}(\Gamma) \times \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma) \times \mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma) \times \mathrm{H}^{-3/2}(\Gamma)$, c'est donc un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$\langle \mathbf{k}, \mathbf{Y} \rangle_{\Gamma} = \langle \kappa_0, \gamma_0 \rangle_{3/2,\Gamma} + \langle \kappa_1, \gamma_1 \rangle_{1/2,\Gamma} + \langle \kappa_2, \gamma_2 \rangle_{-1/2,\Gamma} + \langle \kappa_3, \gamma_3 \rangle_{-3/2,\Gamma} \, .$$

- **L'espace $\mathrm{H}(\Gamma_d)$ des quadruplets de données compatibles**

$$\mathrm{H}(\Gamma_d) = \Big\{ \mathbf{k}_d = (\kappa_{0d}, \kappa_{1d}, \kappa_{2d}, \kappa_{3d}) \in \mathrm{H}^{3/2}(\Gamma_d) \times \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma_d) \times \mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma_d) \times \mathrm{H}^{-3/2}(\Gamma_d)$$
$$\text{tel qu'il existe } u \in \mathscr{H}^2_{\Delta^2}(\Omega) \text{ et } \Big(u, \frac{\partial u}{\partial n}, \frac{\partial^2 u}{\partial n^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial n^3}\Big)_{\Gamma_d} = (\kappa_{0d}, \kappa_{1d}, \kappa_{2d}, \kappa_{3d}) \Big\}$$

- **Formulation équivalente**

Soit $\mathbf{k}_d = (\kappa_{0d}, \kappa_{1d}, \kappa_{2d}, \kappa_{3d})$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Trouver } \mathbf{u} = \Big(u, \dfrac{\partial u}{\partial n}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial n^2}, \dfrac{\partial^3 u}{\partial n^3}\Big)_{\Gamma} & \text{dans } \mathrm{H}(\Gamma) \\ \text{tel que } \mathbf{u} = \mathbf{k}_d & \text{dans } \mathrm{H}(\Gamma_d) \end{array} \right. \tag{3}$$

- **Formulation comme un problème d'optimisation**

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \mathrm{J}(\mathbf{v}) \text{ dans } \mathrm{H}(\Gamma) \\ \text{avec } \mathrm{J}(\mathbf{v}) = \|\mathbf{v} - \mathbf{k}_d\|^2_{\Gamma_d} \end{array} \right.$$

Ce problème, équivalent au problème de Cauchy, est mal posé au sens d'Hadamard.

• **Principe de régularisation évanescente**

Nous introduisons la suite itérative suivante :

Soient $\mathbf{u}_0 \in \mathrm{H}(\Gamma)$ et $c > 0$ donnés

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \ \mathbf{u}_{k+1} = \text{Argmin } \mathrm{J}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{k}}(\mathbf{v}) \ \mathbf{v} \in \mathrm{H}(\Gamma) \\ \text{avec } \ \mathrm{J}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{k}}(\mathbf{v}) = \|\mathbf{v} - \mathbf{k}_d\|_{\Gamma_d}^2 + c\|\mathbf{v} - \mathbf{u}_k\|_{\Gamma}^2 \end{array} \right. \tag{4}$$

A chaque itération, le problème à résoudre est bien posé.

La solution optimale $\mathbf{u}_{k+1}$ est caractérisée par l'équation :

$$\langle \mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{k}_d, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma_d} + c \, \langle \mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma} \ = 0 \quad \forall \, \mathbf{v} \in \mathrm{H}(\Gamma) \tag{5}$$

• Principe de régularisation évanescente

Nous introduisons la suite itérative suivante :

Soient $\mathbf{u}_0 \in \mathrm{H}(\Gamma)$ et $c > 0$ donnés

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \ \mathbf{u}_{k+1} = \text{Argmin } \mathrm{J}_c^k(\mathbf{v}) \ \mathbf{v} \in \mathrm{H}(\Gamma) \\ \text{avec } \ \mathrm{J}_c^k(\mathbf{v}) = \|\mathbf{v} - \mathbf{k}_d\|_{\Gamma_d}^2 + c\|\mathbf{v} - \mathbf{u}_k\|_{\Gamma}^2 \end{array} \right. \tag{4}$$

A chaque itération, le problème à résoudre est bien posé.

La solution optimale $\mathbf{u}_{k+1}$ est caractérisée par l'équation :

$$\langle \mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{k}_d, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma_d} + c \, \langle \mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma} \ = 0 \quad \forall \, \mathbf{v} \in \mathrm{H}(\Gamma) \tag{5}$$

Théorème

Si $\mathbf{k}_d = (\kappa_{0d}, \kappa_{1d}, \kappa_{2d}, \kappa_{3d})$ *est un quadruplet de données compatibles, c'est à dire un élément de* $\mathrm{H}(\Gamma_d)$ *associé à la solution compatible* $\mathbf{u}$ *de* (3)*, alors la suite* $(\mathbf{u}_k)$ *définie par* (4) *est telle que :*

$$\begin{array}{llll} \mathbf{u}_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \mathbf{u} & \textit{dans} & \mathrm{H}(\Gamma_d) & \textit{au sens fort} \\ \boldsymbol{u}_k \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} \mathbf{u} & \textit{dans} & \mathrm{H}(\Gamma) & \textit{au sens faible}. \end{array}$$

Théorème

Si $\mathbf{k}_d = (\kappa_{0d}, \kappa_{1d}, \kappa_{2d}, \kappa_{3d})$ *est un quadruplet de données compatibles, c'est à dire un élément de* $\mathrm{H}(\Gamma_d)$ *associé à la solution compatible* $\mathbf{u}$ *de* (3), *alors la suite* $(\mathbf{u}_k)$ *définie par* (4) *est telle que :*

$$\mathbf{u}_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \mathbf{u} \quad \textit{dans} \quad \mathrm{H}(\Gamma_d) \quad \textit{au sens fort}$$
$$\mathbf{u}_k \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} \mathbf{u} \quad \textit{dans} \quad \mathrm{H}(\Gamma) \quad \textit{au sens faible}.$$

Remarque

Soient $\mathbf{u}$ *la solution de* (3) *et* $(u, \frac{\partial u}{\partial n})$ *le couple constitué des deux premières composantes de* $\mathbf{u}$. *Soient par ailleurs* $\mathbf{u}_k$ *la solution obtenue à la* $k^{ième}$ *itération de* (4) *et* $(u_k, \frac{\partial u_k}{\partial n})$ *le couple formé des deux premières composantes de* $\mathbf{u}_k$. *Dans le cas 2D, pour* $0 < \alpha < 1$ *et* $1 < q < \infty$, *on a*

$$(u_k, \frac{\partial u_k}{\partial n}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} (u, \frac{\partial u}{\partial n}) \ \ \textit{dans} \ \ \mathscr{C}^{0,\alpha}(\Gamma) \times L^q(\Gamma) \ \ \textit{au sens fort.}$$

Factorisation du problème pour le bilaplacien

Dans (2), on fait le changement de fonction inconnue :

$$-\Delta u \quad = \quad \omega$$

On obtient le problème factorisé suivant :

$$\left\| \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta\omega & = & 0 & \text{dans } \Omega \\ \omega & = & \beta_{0d} & \text{sur } \Gamma_d \\ \frac{\partial\omega}{\partial n} & = & \beta_{1d} & \text{sur } \Gamma_d \end{array} \right. \\ \text{et} \\ \left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u & = & \omega & \text{dans } \Omega \\ u & = & \kappa_{0d} & \text{sur } \Gamma_d \\ \frac{\partial u}{\partial n} & = & \kappa_{1d} & \text{sur } \Gamma_d \end{array} \right. \end{array} \right. \qquad (6)$$

où les données β_{0d} et β_{1d} sont supposées compatibles et analytiques sur Γ_d.

•Du problème factorisé au problème pour le bilaplacien

•Du problème factorisé au problème pour le bilaplacien

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial n^2} &= -\beta_{0d} - \left(\frac{\partial^2 \kappa_{0d}}{\partial \tau^2} + \frac{\kappa_{1d}}{R}\right) && \text{sur } \Gamma_d \quad (7)\\
\frac{\partial^3 u}{\partial n^3} &= -\frac{\partial \beta_{0d}}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial \kappa_{1d}}{\partial \tau} - \frac{1}{R}\frac{\partial \kappa_{0d}}{\partial \tau}\right) + \frac{1}{R}\left(\beta_{0d} + 2\left(\frac{\partial^2 \kappa_{0d}}{\partial \tau^2} + \frac{\kappa_{1d}}{R}\right)\right) && \text{sur } \Gamma_d \quad (8)
\end{aligned}
$$

•Du problème factorisé au problème pour le bilaplacien

$$\frac{\partial^2 u}{\partial n^2} = -\beta_{0d} - (\frac{\partial^2 \kappa_{0d}}{\partial \tau^2} + \frac{\kappa_{1d}}{R}) \quad \text{sur } \Gamma_d \quad (7)$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial n^3} = -\frac{\partial \beta_{0d}}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial \tau}(\frac{\partial \kappa_{1d}}{\partial \tau} - \frac{1}{R}\frac{\partial \kappa_{0d}}{\partial \tau}) + \frac{1}{R}(\beta_{0d} + 2(\frac{\partial^2 \kappa_{0d}}{\partial \tau^2} + \frac{\kappa_{1d}}{R})) \text{ sur } \Gamma_d \quad (8)$$

Corollaire

Si $(\beta_{0d}, \beta_{1d}) \in \mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma_d) \times \mathrm{H}^{-3/2}(\Gamma_d)$ *alors la résolution du problème factorisé se ramène à la résolution du problème pour le bilaplacien.*

Convergence quand $h \longrightarrow 0$

Dans (6), considérons le problème inverse pour le laplacien :

$$-\Delta\omega = 0 \ \text{ dans } \ \Omega, \ \ \omega = \beta_{0d} \ \text{ et } \ \frac{\partial\omega}{\partial n} = \beta_{1d} \ \text{ sur } \Gamma_d \, . \tag{9}$$

La solution est recherchée dans l'espace des fonctions harmoniques

$$\mathscr{H}_0^1(\Delta, \Omega) = \{ \ u \in \mathrm{H}^1(\Omega) \ / \ \Delta u = 0 \ \}$$

Dans (6), considérons le problème inverse pour le laplacien :

$$-\Delta\omega = 0 \ \text{ dans } \ \Omega, \quad \omega = \beta_{0d} \ \text{ et } \ \frac{\partial \omega}{\partial n} = \beta_{1d} \quad \text{sur } \Gamma_d \,. \tag{9}$$

La solution est recherchée dans l'espace des fonctions harmoniques

$$\mathscr{H}_0^1(\Delta, \Omega) = \{ \ u \in \mathrm{H}^1(\Omega) \ / \ \Delta u = 0 \ \}$$

• Une formulation équivalente

Soit $\beta_d = (\beta_{0d}, \beta_{1d})$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{w} = \left(\omega|_\Gamma \,, \frac{\partial \omega}{\partial n}\big|_\Gamma \right) \in \mathcal{L}(\Gamma) \text{ tel que} \\ \qquad\qquad \mathbf{w} = \beta_d \quad \text{sur} \quad \mathcal{L}(\Gamma_d) \end{array} \right. \tag{10}$$

où

$$\mathcal{L}(\Gamma) = \Big\{ \beta = (\beta_0, \beta_1) \in \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma) \times \mathrm{L}^2(\Gamma) \ \text{ tel que} \\ \exists\, \omega \ \in \mathscr{H}_0^1(\Delta, \Omega) \quad \omega|_\Gamma = \beta_0 \ \text{ et } \ \frac{\partial \omega}{\partial n}\Big|_\Gamma = \beta_1 \ \Big\} \tag{11}$$

$\mathcal{L}(\Gamma)$ est muni du produit scalaire de $\mathrm{H}^{1/2}(\Gamma) \times \mathrm{L}^2(\Gamma)$ suivant :

$$\langle \beta, \beta' \rangle_\Gamma = \langle \beta_0, \beta_0' \rangle_{\mathrm{H}^{1/2}(\Gamma)} + \langle \beta_1, \beta_1' \rangle_{\mathrm{L}^2(\Gamma)}$$

Après discrétisation par éléments finis de Γ, supposé régulier, on définit l'espace d'approximation de $\mathcal{L}(\Gamma)$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_h(\Gamma) \ = \ \Big\{ \ \beta_h = (\beta_{0h}\ ,\ \beta_{1h}) \in \mathscr{H}_h^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \times \mathscr{H}_h^{0}(\Gamma) \ \text{ tel que} \\ \exists\ \omega_h \in \mathcal{V}_h(\Omega) \ \text{ avec } \ \omega_{h_{|\Gamma}} = \beta_{0h} \ \text{ et} \\ \int_\Omega \nabla\omega_h \nabla v_h \ dx = \int_\Gamma \beta_{1h} v_h \ d\sigma \ \ \forall\ v_h \in \mathcal{V}_h(\Omega) \ \Big\}\end{aligned} \tag{12}$$

On munit $\mathcal{L}_h(\Gamma)$ du produit scalaire de $\mathrm{H}^{1/2}(\Gamma) \times \mathrm{L}^2(\Gamma)$ suivant :

$$\left\langle \beta_h, \beta'_h \right\rangle_\Gamma = \left\langle \beta_{0h}, \beta'_{0h} \right\rangle_{\mathrm{H}^{1/2}(\Gamma)} + \left\langle \beta_{1h}, \beta'_{1h} \right\rangle_{\mathrm{L}^2(\Gamma)}$$

Après discrétisation par éléments finis de Γ, supposé régulier, on définit l'espace d'approximation de $\mathcal{L}(\Gamma)$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_h(\Gamma) \;=\; \Big\{ \; \beta_h = (\beta_{0h}\;,\;\beta_{1h}) \in \mathscr{H}_h^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \times \mathscr{H}_h^{0}(\Gamma) \;\; \text{tel que} \\ \exists\, \omega_h \in \mathcal{V}_h(\Omega) \;\; \text{avec} \quad \omega_{h|_\Gamma} = \beta_{0h} \;\; \text{et} \\ \int_\Omega \nabla\omega_h \nabla v_h \, dx = \int_\Gamma \beta_{1h} v_h \, d\sigma \;\; \forall\, v_h \in \mathcal{V}_h(\Omega) \; \Big\} \end{aligned} \tag{12}$$

On munit $\mathcal{L}_h(\Gamma)$ du produit scalaire de $\mathrm{H}^{1/2}(\Gamma) \times \mathrm{L}^2(\Gamma)$ suivant :

$$\left\langle \beta_h, \beta'_h \right\rangle_\Gamma = \left\langle \beta_{0h}, \beta'_{0h} \right\rangle_{\mathrm{H}^{1/2}(\Gamma)} + \left\langle \beta_{1h}, \beta'_{1h} \right\rangle_{\mathrm{L}^2(\Gamma)}$$

- **Le problème de Cauchy discret s'écrit** :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{w}_h \in \mathscr{W}_h^{\perp}(\Gamma) \;\; \text{tel que} \\ \left\langle \mathbf{w}_h - \beta_{d\,h}\;, \mathbf{v}_h \right\rangle_{\Gamma_d} = 0 \quad \forall\, \mathbf{v}_h \in \mathscr{W}_h^{\perp}(\Gamma) \end{array} \right. \tag{13}$$

où

$$\begin{aligned} \mathscr{W}_h(\Gamma) \;&=\; \left\{ \; \mathbf{v}_h = (v_h, v'_h) \in \mathcal{L}_h(\Gamma) \quad \text{tel que} \quad \mathbf{v}_h|_{\Gamma_d} = 0 \; \right\} \\ \mathscr{W}_h^{\perp}(\Gamma) \;&=\; \left\{ \; \mathbf{v}_h = (v_h, v'_h) \in \mathcal{L}_h(\Gamma) \;/\; \left\langle \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h \right\rangle_\Gamma = 0 \;\; \forall\, \mathbf{w}_h \in \mathscr{W}_h(\Gamma) \; \right\} \end{aligned}$$

- **Hypothèses**

1. Le couple inconnu $\mathbf{w} = (\beta_0, \beta_1) \in \mathcal{L}(\Gamma)$. Soit ω la fonction harmonique solution du problème (9). On suppose que $\omega \in \mathrm{H}^1(\Omega)$.

- **Hypothèses**

1. Le couple inconnu $\mathbf{w} = (\beta_0, \beta_1) \in \mathcal{L}(\Gamma)$. Soit ω la fonction harmonique solution du problème (9). On suppose que $\omega \in \mathrm{H}^1(\Omega)$.
2. Pour $h > 0$ fixé, on suppose donnée une famille $(\mathcal{D}_h)$

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{D}_h : \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma) \times \mathrm{L}^2(\Gamma) & \longrightarrow & \mathcal{H}_h^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \times \mathcal{H}_h^{0}(\Gamma) \\ (\, v, v' \,) & \longmapsto & (\, v_h, v_h' \,) \end{array}$$

d'opérateurs d'approximation sur la frontière au sens suivant :

$$\|(v, v') - \mathcal{D}_h(v, v')\|_\Gamma \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

On introduit

$$\pi_h : \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma) \times \mathrm{L}^2(\Gamma) \longrightarrow \mathcal{L}_h(\Gamma)\ .$$

- **Hypothèses**

1. Le couple inconnu $\mathbf{w} = (\beta_0, \beta_1) \in \mathcal{L}(\Gamma)$. Soit ω la fonction harmonique solution du problème (9). On suppose que $\omega \in \mathrm{H}^1(\Omega)$.
2. Pour $h > 0$ fixé, on suppose donnée une famille $(\mathcal{D}_h)$

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{D}_h : \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma) \times \mathrm{L}^2(\Gamma) & \longrightarrow & \mathcal{H}_h^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \times \mathcal{H}_h^{0}(\Gamma) \\ (\, v, v' \,) & \longmapsto & (\, v_h, v_h' \,) \end{array}$$

d'opérateurs d'approximation sur la frontière au sens suivant :

$$\|(v, v') - \mathcal{D}_h(v, v')\|_\Gamma \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$$

On introduit

$$\pi_h : \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma) \times \mathrm{L}^2(\Gamma) \longrightarrow \mathcal{L}_h(\Gamma)\ .$$

3. On suppose que la restriction de $\pi_h \mathbf{w} - \mathcal{D}_h \mathbf{w}$ à Γ_d vérifie :

$$\langle \pi_h \mathbf{w} - \mathcal{D}_h \mathbf{w}\ , \mathbf{v}_h \rangle_{\Gamma_d} = 0 \quad \forall\ \mathbf{v}_h \in \mathcal{L}_h(\Gamma)\ .$$

Théorème

Soit $\mathbf{w} = (\beta_0, \beta_1)$ *la paire de traces compatibles associée à la fonction harmonique* ω *supposée telle que* $(\beta_0, \beta_1) \in \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma) \times \mathrm{L}^2(\Gamma)$*. Soit* $\mathbf{w}_h = (\beta_{0h}, \beta_{1h})$ *la solution du problème de Cauchy* (13)*. Alors*

$$\begin{cases} \beta_{0h} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} \beta_0 \quad \textit{dans} \quad \mathrm{H}^{1/2}(\Gamma) \quad \textit{au sens fort} \\ \beta_{1h} \underset{h \to 0}{\rightharpoonup} \beta_1 \quad \textit{dans} \quad \mathrm{L}^2(\Gamma) \quad \textit{au sens faible} \end{cases} \tag{14}$$

Ou encore $\mathbf{w}_h \underset{h \to 0}{\longrightarrow} \mathbf{w}$ *dans* $\mathrm{H}^{1/2}(\Gamma) \times \mathrm{L}^2(\Gamma)$ *au sens de* (14) .

Soit N le nombre de noeuds sur Γ.

•**Le problème inverse de cauchy pour l'équation de Laplace**

Par une méthode de condensation sur la frontière, on obtient le système linéaire de N équations à $2N$ inconnues :

$$\mathbb{H}\,\mathcal{W} + \mathbb{B}\,\mathcal{W}' = 0 \tag{15}$$

où $\mathcal{W}$ (respectivement $\mathcal{W}'$) représente les valeurs discrètes de la trace (respectivement de la dérivée normale) de ω.

Tests numériques

Soit N le nombre de noeuds sur Γ.

•**Le problème inverse de cauchy pour l'équation de Laplace**

Par une méthode de condensation sur la frontière, on obtient le système linéaire de N équations à $2N$ inconnues :

$$\mathbb{H}\,\mathcal{W} + \mathbb{B}\,\mathcal{W}' = 0 \tag{15}$$

où $\mathcal{W}$ (respectivement $\mathcal{W}'$) représente les valeurs discrètes de la trace (respectivement de la dérivée normale) de ω.

•**Le processus itératif à la** $(k+1)^e$ **itération**

soient $(\mathcal{W}_0, \mathcal{W}'_0) = (0,0) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathcal{W}_{k+1}, \mathcal{W}'_{k+1}) \in \mathbb{R}^{2N} \text{ tels que} \\ \mathrm{J}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{k}}(\mathcal{W}_{k+1}, \mathcal{W}'_{k+1}) \leq \mathrm{J}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{k}}(\mathcal{V}, \mathcal{V}')\ \forall\, (\mathcal{V}, \mathcal{V}') \in \mathbb{R}^{2N} \\ \text{sous les } N \text{ contraintes } \mathbb{H}\,\mathcal{W}_{k+1} + \mathbb{B}\,\mathcal{W}'_{k+1} = 0 \end{array}\right. \tag{16}$$

On introduit N multiplicateurs de lagrange pour gérer les contrainres égalités. On obtient un système linéaire de $3N$ équations à $3N$ inconnues.

•Le problème inverse de cauchy pour l'équation de Poisson

En utilisant à nouveau une méthode de condensation sur la frontière, on obtient le système linéaire de N équations à $2N$ inconnues :

$$\mathbb{H}\mathcal{U} + \mathbb{B}\mathcal{U}' = \mathbb{D}\mathcal{W} \tag{17}$$

où $\mathcal{U}$ (respectivement $\mathcal{U}'$) représente les valeurs discrètes de la trace (respectivement de la dérivée normale) de u.

•Le problème inverse de cauchy pour l'équation de Poisson

En utilisant à nouveau une méthode de condensation sur la frontière, on obtient le système linéaire de N équations à $2N$ inconnues :

$$\mathbb{H}\mathcal{U} + \mathbb{B}\mathcal{U}' = \mathbb{D}\mathcal{W} \tag{17}$$

où $\mathcal{U}$ (respectivement $\mathcal{U}'$) représente les valeurs discrètes de la trace (respectivement de la dérivée normale) de u.

•Le processus itératif à la $(k+1)^e$ itération

soient $(\mathcal{U}_0, \mathcal{U}'_0) = (0,0) \in \mathbb{R}^{2N}$

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\mathcal{U}_{k+1}, \mathcal{U}'_{k+1}) \in \mathbb{R}^{2N} \text{ tels que} \\ \mathrm{J}_c^k(\mathcal{U}_{k+1}, \mathcal{U}'_{k+1}) \leq \mathrm{J}_c^k(\mathcal{V}, \mathcal{V}') \,\forall (\mathcal{V}, \mathcal{V}') \in \mathbb{R}^{2N} \\ \text{sous les } N \text{ contraintes } \mathbb{H}\mathcal{U}_{k+1} + \mathbb{B}\mathcal{U}'_{k+1} = \mathbb{D}\mathcal{W}_{k+1} \end{cases} \tag{18}$$

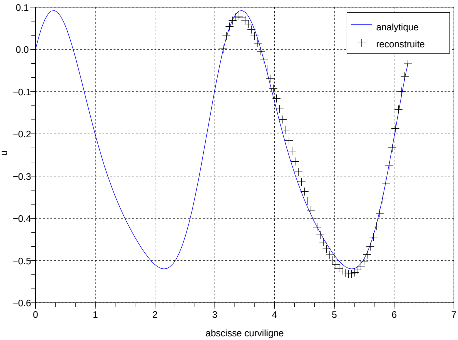
Pour gérer les contraintes égalités, on introduit N multiplicateurs de lagrange. On obtient un système linéaire de $3N$ équations à $3N$ inconnues.

- Le domaine Ω est le disque unité.
- $\Gamma_d = \frac{1}{2}\Gamma$.
- $u(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1(\cos x_1 \cosh x_2 - \sin x_1 \sinh x_2)$.
- $\omega(x_1, x_2) = \cos x_1 \cosh x_2 + \sin x_1 \sinh x_2$.
- N_d = Nombre de données sur Γ_d .

- **Exemple 1** $N_d = 60$ **et** $N = 120$

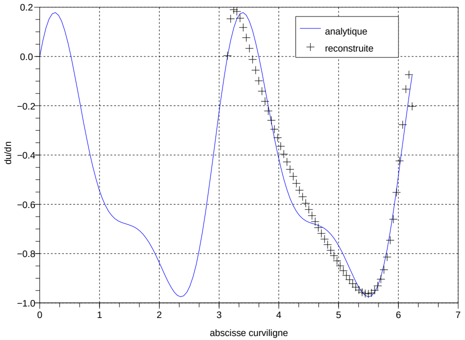
- **Exemple 1** $N_d = 60$ **et** $N = 120$

Reconstruction de la trace de u



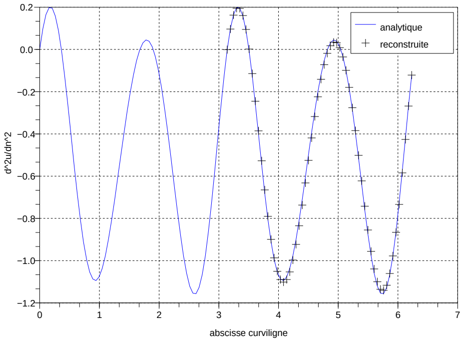
$$c = 10^{-5}$$

Reconstruction de $\partial u/\partial n$



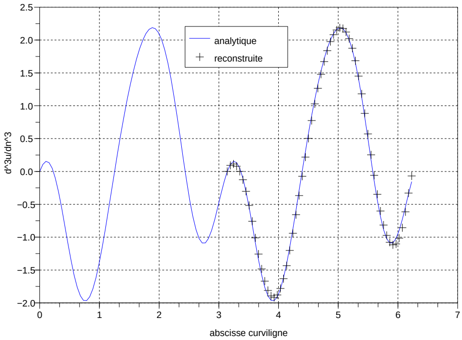
$$c = 10^{-5}$$

Reconstruction de $\partial^2 u/\partial n^2$



$$c = 10^{-5}$$

Reconstruction de $\partial^3 u/\partial n^3$



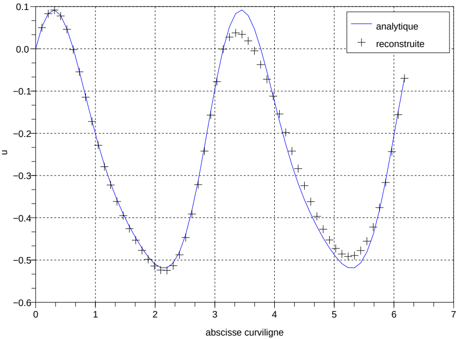
$$c = 10^{-5}$$

- **Exemple 2 : Données bruitées avec** $N_d = 30$, $N = 60$

• **Exemple 2 : Données bruitées avec $N_d = 30$, $N = 60$**

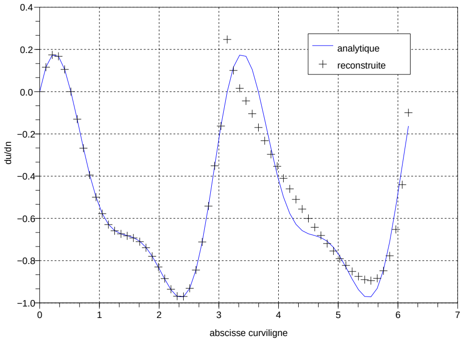
β_{0d} bruitée de 10%

Reconstruction de la trace de u



$$c = 25.10^{-3}$$

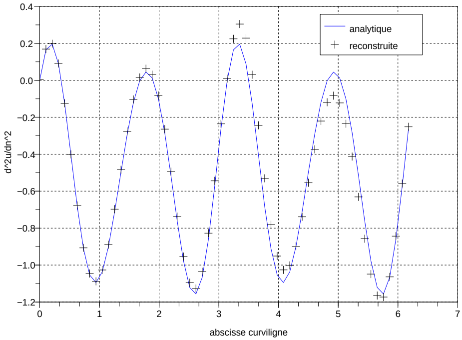
Reconstruction de $\partial u/\partial n$



$$c = 25.10^{-3}$$

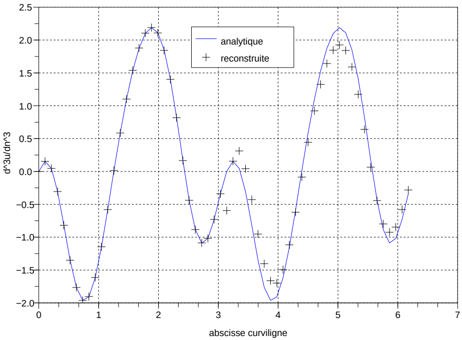
β_{1d} bruitée de 10%

Reconstruction de $\partial^2 u/\partial n^2$



$$c = 25.10^{-3}$$

Reconstruction de $\partial^3 u/\partial n^3$



$$c = 25.10^{-3}$$

Conclusions et perspectives

- La méthode est efficace et robuste.
- La convergence quand $h \to 0$ vient renforcer les résultats pour le laplacien.
- L'extension de la méthode en dimension 3 reste envisageable.
- Comment généraliser la méthode aux opérateurs linaires élliptiques d'ordre 2m ?

Merci de votre attention !