Propriétés d'isotropie pour les schémas de Boltzmann sur réseau : application à l'acoustique

Adeline Augier[1], François Dubois[1,2], Benjamin Graille[1]

[1]Laboratoire de Mathématiques Université Paris-Sud XI
[2]Conservatoire National des Arts et Métiers

SMAI 2011
26 mai 2011

Plan

Plan

Equation de Boltzmann

Modélisation d'un écoulement fluide visqueux

Equation de Botzmann

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f = Q(f), \text{ où}$$

- f est la densité de particules,
- $\mathbf{v}$ la vitesse des particules,
- Q est l'opérateur de collision.

Linéarisation de l'opérateur de collision (pour l'acoustique) autour de l'équilibre

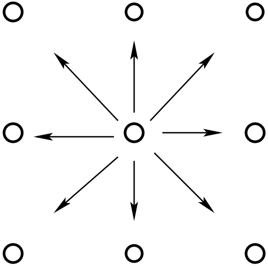
Linéarisation de l'équation de Boltzmann

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f = -\frac{1}{\tau} \cdot (f - f^{eq}),$$

où τ est le temps de relaxation à l'équilibre.

Discrétisation 1/2

- $J+1$ vitesses et distributions
- Réseau discret tel que
  - ✓ pas de temps Δt
  - ✓ pas d'espace Δx
  - ✓ Paramètre $\lambda = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$
  - ✓ $x \in \mathcal{L} \Rightarrow x + \mathbf{v}_i \Delta t \in \mathcal{L}$



Exemple : D2Q9

- D : dimension
- Q : vitesse

Discrétisation 2/2

EDP discrétisée

$$\frac{\partial f_j}{\partial t} + \mathbf{v}_j \cdot \nabla f_j = -\frac{1}{\tau_j} \cdot (f_j - f_j^{\mathrm{eq}}), \; 0 \leq j \leq J.$$

- A choisir :
  - ✓ Les $J+1$ vitesses $\mathbf{v}_j$
  - ✓ Les $J+1$ caractéristiques du retour à l'équilibre τ_j
- Inconnues :
  - ✓ Les $J+1$ densités de particules f_j

Différents types de schémas

- BGK : $\tau_j = \tau, \; \forall\, 0 \leq j \leq J$
- TRT : $\tau_j = \tau_0$ ou τ_1 (suivant la parité du moment)
- MRT : $\tau_j \neq \tau_k, \; \forall\, 0 \leq j \neq k \leq J$

Idée de la méthode

$$\frac{\partial f_j}{\partial t} + \mathbf{v}_j \cdot \nabla f_j \;=\; -\frac{1}{\tau_j} \cdot (f_j - f_j^{\mathrm{eq}}),\;\; 0 \leq j \leq J.$$

Schéma de Boltzmann sur réseau

Description des $J+1$ distributions de particules $f_j(x,t)$ en $x \in \mathcal{L}$ de vitesse v_j à l'instant t.

On passe du temps t au temps $t + \Delta t$ en deux étapes

- collision : redistribution des densités en chaque noeuds

$$\frac{\partial f_j^*}{\partial t} \;=\; -\frac{1}{\tau_j} \cdot (f_j - f_j^{\mathrm{eq}})$$

- advection : transport des particules vers ses noeuds voisins

$$\frac{\partial f_j}{\partial t} + \mathbf{v}_j \cdot \nabla f_j \;=\; 0$$

Algorithme de d'Humières pour le schéma D2Q9

On suppose connus :

- les vitesses,
- les temps de relaxation.

1. Collision
   - Choix des 9 moments à l'équilibre :
     - ✓ 3 moments conservés : densité ρ et impulsion $\overrightarrow{q}$
     - ✓ 6 moments non conservés définis à l'équilibre comme combinaison linéaire des moments conservés
   - Relaxation des moments hors équilibre

$$m_j^* := (1 - s_j)m_j + s_k m_j^{\text{eq}} \text{ où } s_j = \Delta t/\tau_j,\ j \geq 3.$$

   - Retour à l'espace des particules avec le calcul de la distribution $f^* = M^{-1}m^*$.
2. Advection par la méthode des caractéristiques

$$f_j(x + v_j\Delta t, t + \Delta t) = f_j^*(x, t),\ x \in \mathcal{L},\ 0 \leq j \leq 8$$

Définition des moments

Moments conservés :

- densité macroscopique $\rho = \sum_{0 \leq j \leq J} f_j$
- impulsion macroscopique $\overrightarrow{q} = \sum_{0 \leq j \leq J} v_j f_j$

Autres moments pour le D2Q9 :

- énergie cinétique : $\varepsilon = \sum |v_j|^2 f_j$, ordre 2,
- carré énergie : $\varepsilon^2 = \sum \left(1/2|v_j|^2\right)^2 f_j$, ordre 4,
- flux de chaleur : $\varphi = \sum 1/2|v_j|^2 v_j f_j$, ordre 3,
- $\varphi_{XX} = \sum \left(v_j^1\right)^2 f_j - \sum \left(v_j^2\right)^2 f_j$, ordre 2,
- $\varphi_{XY} = \sum v_j^1 v_j^2 f_j$, ordre 2,

Moments après relaxation : D2Q9

$$m_j^* := (1 - s_j) m_j + s_k m_j^{\mathrm{eq}} \text{ où } s_j = \Delta t / \tau_j, \ j \geq 3.$$

$$\begin{array}{c} \\ \varepsilon \\ \varphi xx \\ \varphi xy \\ \varphi^x \\ \varphi^y \\ \varepsilon^2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} & I_3 & & 0 \\ \hline \theta_1 \lambda^2 s_4 & \theta_2 \lambda s_4 & \theta_3 \lambda s_4 & \\ a_{x1} \lambda^2 s_{5x} & a_{x2} \lambda s_{5x} & a_{x3} \lambda s_{5x} & \\ a_{y1} \lambda^2 s_{5y} & a_{y2} \lambda s_{5y} & a_{y3} \lambda s_{5y} & (1 - s_i) I_6 \\ c_{11x} \lambda^3 s_{6x} & c_{12x} \lambda^2 s_{6x} & c_{13x} \lambda^2 s_{6x} & \\ c_{11y} \lambda^3 s_{6y} & c_{12y} \lambda^2 s_{6y} & c_{13y} \lambda^2 s_{6y} & \\ \beta_1 \lambda^4 s_{11} & \beta_2 \lambda^3 s_{11} & \beta_3 \lambda^3 s_{11} & \end{array} \right)$$

Données

- θ_1 : reliée à la vitesse du son
- s_4, s_{5y} : reliés aux viscosités de volume / cisaillement

Relation avec la physique

Schéma de Boltzmann sur réseau pour le D2Q9

$$f_j(x + v_j\Delta t, t + \Delta t) = f_j^*(x, t),\ \ x \in \mathcal{L},\ \ 0 \leq j \leq J.$$

Propriétés

- Ce schéma de Boltzmann sur réseau résout Navier-Stokes (méthode d'ordre 2)
- Les viscosités (de cisaillement et de volume) s'expriment en fonction des temps de relaxation

- Travail en collaboration avec Renault / Airbus
- Objectif garder deux viscosités tout en rendant le schéma isotrope

Plan

1. Introduction à la méthode
2. Isotropie
3. Perspectives

Positionnement du problème

Equations équivalentes (F. Dubois et P. Lallemand)

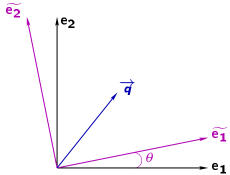
$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + {}_1A : \nabla^1 \mathbf{W} + {}_2A : \nabla^2 \mathbf{W} + {}_3A : \nabla^3 \mathbf{W} + {}_4A : \nabla^4 \mathbf{W} = 0,$$

où $$\left({}_1A : \nabla^1 \mathbf{W}\right)^i = \left(\sum_{\substack{0 \leq j \leq 2 \\ 1 \leq \alpha \leq 2}} {}_1A_i^{\alpha j} \partial_\alpha \mathbf{W}^j \right)^i$$

- $\mathbf{W}$ est le vecteur des moments conservés
- les tenseurs ${}_NA$ dépendent
  - ✓ des temps de relaxation,
  - ✓ de l'écriture des moments non conservés.

- Obtenues par développement de limité à partir du schéma
- Code *Maple* qui donne les équations aux différents ordres

Raisonnement



- Ecriture de l'équation de conservation pour $\widetilde{\mathbf{W}}$
- But : les deux équations doivent être les mêmes pour tout θ :

$$R\,{}_N\widetilde{A} : \widetilde{\nabla}^N \mathbf{W} \;=\; {}_N A : \nabla^N \mathbf{W}.$$

- Cela donne une relation sur les ${}_N\widetilde{A}$

Relations ancienne base / nouvelle base

- $\mathbf{W} \;=\; R\widetilde{\mathbf{W}},$
- $\partial_\alpha \mathbf{W}^i \;=\; \sum_{\substack{0\leq j\leq 2\\ 1\leq\beta\leq 2}} R^i_j \left(r^{-1}\right)^\beta_\alpha \widetilde{\partial}_\beta \widetilde{\mathbf{W}}^j.$

Relations

Condition d'isotropie (à rajouter dans le code *Maple*)

$$_1\widetilde{A}_j^{\beta l} = \sum_{\substack{1 \le \alpha \le 2 \\ 0 \le k \le 2}} (R)_k^l \; {}_1A_i^{\alpha k} \, (R^{-1})_j^i \, (r^{-1})_\alpha^\beta .$$

A titre d'exemple pour le D2Q9 :

- 3*3*2 équations
- 9-3=6 temps de relaxations
- 6*3 coefficients de linéarité (description des moments à l'équilibre)

Résultats

Résultats sur l'isotropie

- Le schéma D2Q9 est isotrope à l'ordre 3 avec possibilité de choisir plusieurs temps de relaxation
- Le schéma D2Q9 est isotrope à l'ordre 4 avec deux temps de relaxation
- Le schéma D2Q13 est isotrope à l'ordre 3 avec plusieurs temps de relaxation
- Le schéma D2Q13 n'est pas isotrope à l'ordre 4

Bonus

Schéma isotrope $\Rightarrow$ relations cohérentes par rapport au caractère scalaire / vectoriel des objets manipulés.
Exemple : l'énergie, moment non conservé, est bien proportionnelle à la densité.

Plan

Travail en cours

1. D2Q9 / D2Q13
   - Comparer résultats avec ceux déjà publiés
   - Simulations numériques pertinentes
2. En dimension 3
   - D3Q19,
   - D3Q27.
3. Quelle influence sur la stabilité des schémas ?