Temps de sortie pour des processus croissants d'arbres browniens

R. Abraham[1] J.-F. Delmas[2] P. Hoscheit[2]

[1]MAPMO, Université d'Orléans

[2]CERMICS, Ecole des Ponts ParisTech

SMAI 2011, Guidel, 26 mai 2011

Plan de l'exposé

1. Arbres browniens
2. Elagage et processus à valeurs arbre
   - Elagage
   - Processus d'élagage
   - Construction poissonnienne
3. Applications
   - Temps de sortie d'un domaine
   - Cas de domaines spatiaux

Arbres réels

Définition (Arbre réel)

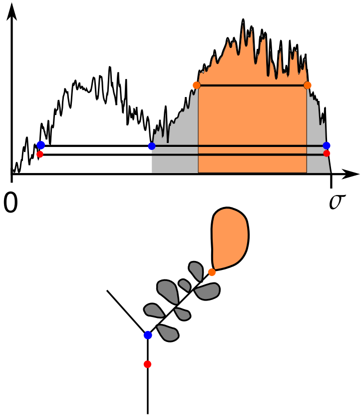
Un arbre réel est un espace métrique $(\mathcal{T}, d)$ tel que :

- *Si $x, y \in \mathcal{T}$, alors il existe un unique arc $[\![x, y]\!]$ qui les relie.*
- *Les arcs $[\![x, y]\!]$ sont isométriques à des segments.*

Un arbre réel enraciné est un arbre réel dont on a distingué un point, noté $\emptyset$.

On note $\mathbb{T}$ l'ensemble des arbres réels localement compacts enracinés (muni de la distance de Gromov-Hausdorff).

Arbres browniens sous-critiques



$$\psi(u) = 2\alpha u + 2u^2, \quad (\alpha \geq 0)$$

$H : [0, \sigma] \to \mathbb{R}_+$ excursion d'un MB de drift $-\alpha$, réfléchi en 0.
Relation d'équivalence sur $[0, \sigma]$:
$x \sim y$ ssi

$$H(x) = H(y) = \min_{z \in [x,y]} H(z).$$

$\mathcal{T}_H = [0, \sigma]_{/\sim}$ de loi $\mathbb{N}^\psi(d\mathcal{T})$

Arbres surcritiques

$$\psi(u) = 2\alpha u + 2u^2 \quad (\alpha < 0)$$

- Si $a > 0$, définition de l'arbre surcritique tronqué au niveau a comme transformée de Girsanov de l'arbre critique tronqué au niveau a.
- Par consistance, définition de la loi de l'arbre surcritique $\mathbb{N}^\psi$.
- Si ψ est (sous-)critique, $\sigma < \infty$ p.s.
- Si ψ est surcritique, $\sigma = \infty$ avec probabilité positive.

Marques poissonniennes

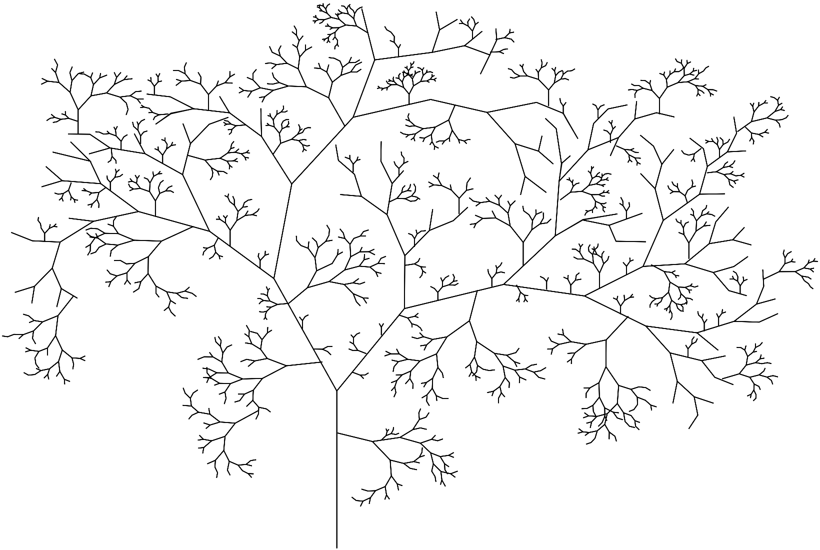
$\mathcal{T}$ un arbre brownien de mécanisme ψ.
$\mathcal{M}(dx, d\theta)$ mesure ponctuelle de Poisson sur $\mathcal{T} \times \mathbb{R}$, d'intensité $d\theta\, dx$
$\Rightarrow$ Marques x “uniformes” sur le squelette de l'arbre, étiquettes θ (temps)

Definition (Arbre élagué)

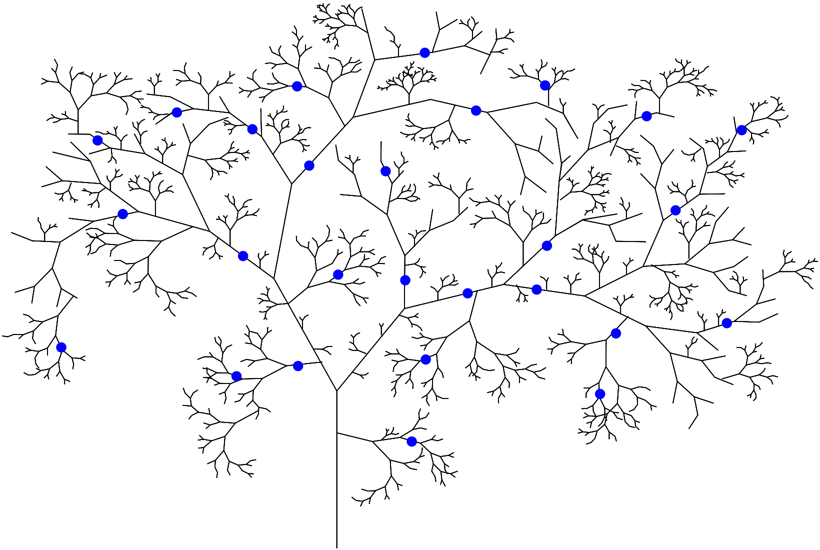
Soit $\theta > 0$. L'arbre élagué $\mathcal{P}_\theta(\mathcal{T})$ est la composante connexe de la racine :

$$\mathcal{P}_\theta(\mathcal{T}) = \{x \in \mathcal{T},\ \mathcal{M}([\![\emptyset, x[\![\times[0,\theta]) = 0\}$$

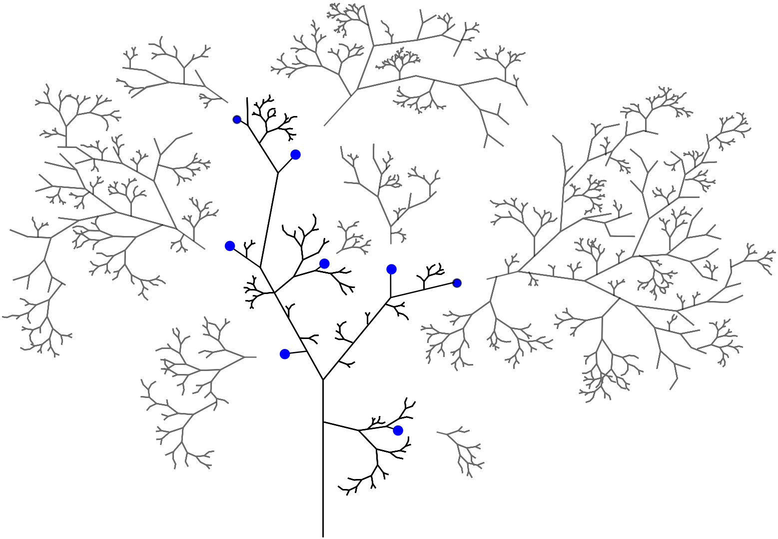
Elagage



Elagage



Elagage



Théorème (Abraham, Delmas, Voisin)

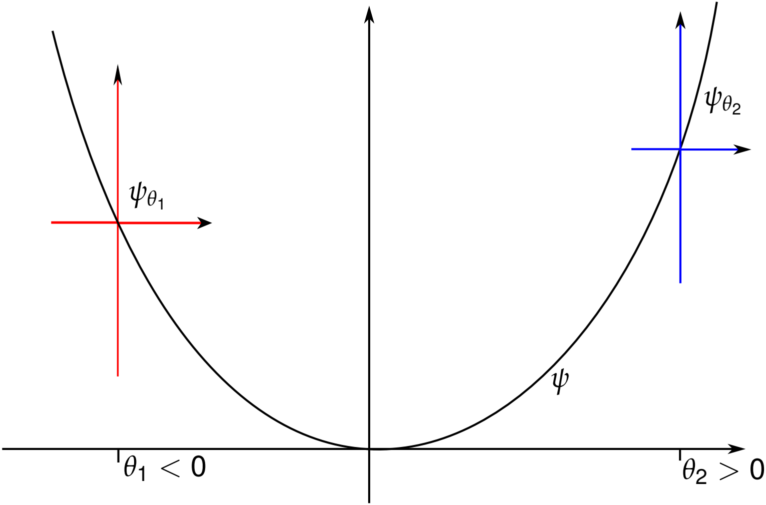
Soit $\theta > 0$. Sous la mesure $\mathbb{N}^{\psi}$, l'arbre élagué $\mathcal{P}_\theta(\mathcal{T})$ est distribué suivant $\mathbb{N}^{\psi_\theta}$, où

$$\psi_\theta(u) = \psi(\theta + u) - \psi(\theta), \quad u \in \mathbb{R}$$

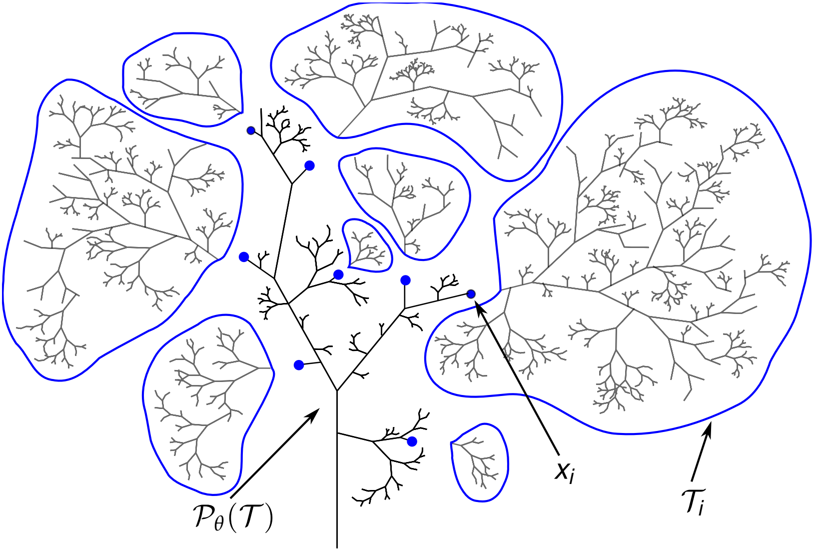
Désormais, on suppose que $\psi(u) = 2u^2$. On a alors

$$\psi_\theta(u) = 4\theta u + 2u^2.$$

Elagage



Processus d'élagage



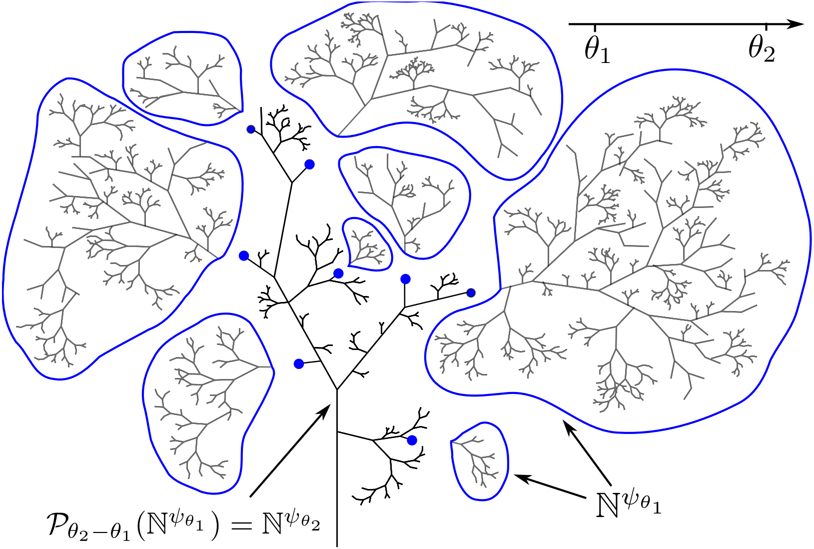
Propriété de Markov spéciale (extension d'un résultat d'Abraham, Delmas, Voisin) :

Théorème

Sous $\mathbb{N}^\psi$, conditionnellement à $\mathcal{P}_\theta(\mathcal{T})$, la mesure $\sum_{i\in I}\delta_{(x_i,\mathcal{T}_i,\theta_i)}$ est une mesure ponctuelle de Poisson sur $\mathcal{P}_\theta(\mathcal{T})\times\mathbb{T}\times[0,\theta)$ d'intensité

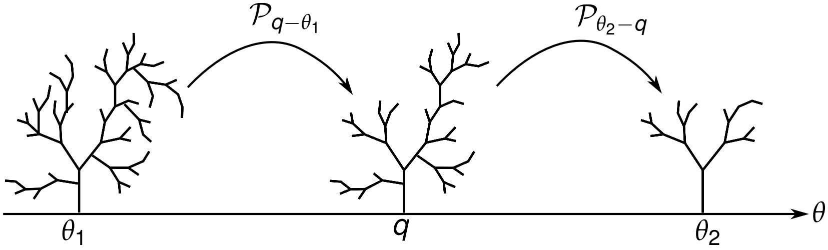
$$\mathbf{m}^{\mathcal{T}^\theta}(dx)\;(4\mathbb{N}^\psi[d\mathcal{T}])\;d\theta'$$

Processus d'élagage



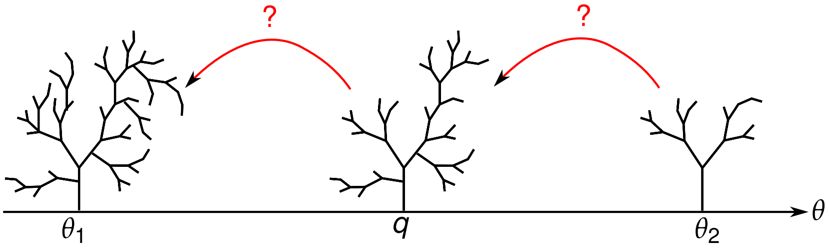
Par consistance, processus d'élagage $(\mathcal{T}^\theta, \theta \in \mathbb{R})$:

- Décroissant p.s.
- Si $\theta \in \mathbb{R}$, $\mathcal{T}^\theta$ distribué suivant $\mathbb{N}^{\psi_\theta}$.
- Semigroupe décrit par la propriété de Markov spéciale.



Par consistance, processus d'élagage $(\mathcal{T}^\theta, \theta \in \mathbb{R})$:

- Décroissant p.s.
- Si $\theta \in \mathbb{R}$, $\mathcal{T}^\theta$ distribué suivant $\mathbb{N}^{\psi_\theta}$.
- Semigroupe décrit par la propriété de Markov spéciale.



Arbres éligibles

$\mathcal{N}$ une mesure ponctuelle de Poisson sur $\mathbb{R} \times \mathbb{T} \times \mathbb{R}_+$, d'intensité :

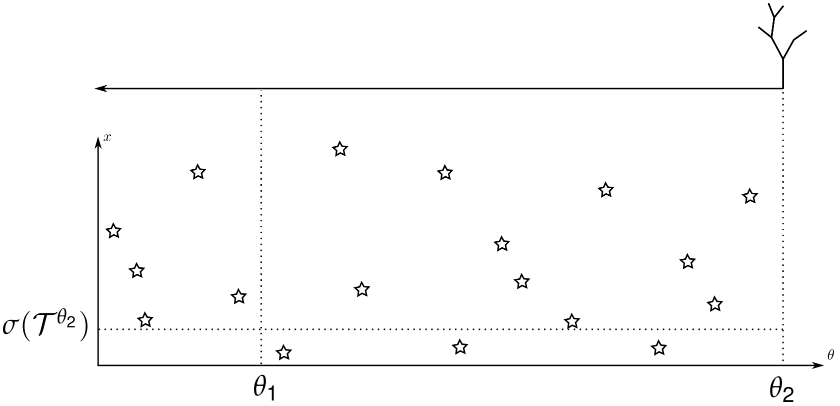
$$d\theta \; 4\mathbb{N}^{\psi_\theta}[d\mathcal{T}] \; dx.$$

Idée : partant d'un arbre $\mathcal{T}$ distribué suivant $\mathbb{N}^{\psi_{\theta_2}}$, empiler les atomes de $\mathcal{N}$ sur $\mathcal{T}$ pour obtenir un arbre distribué suivant $\mathbb{N}^{\psi_{\theta_1}}$.

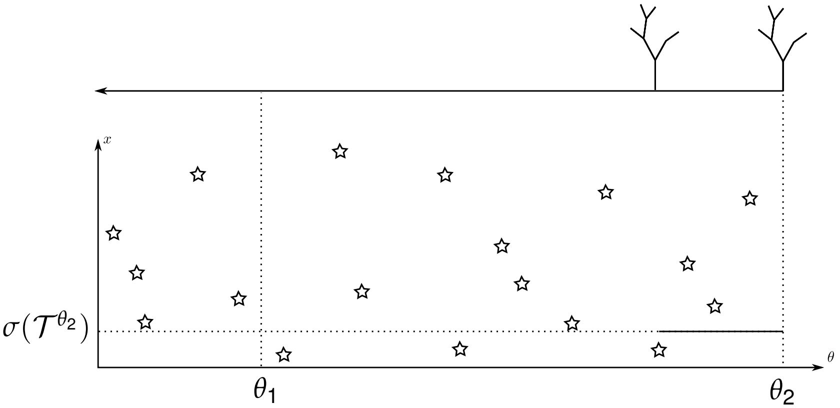
Difficultés :

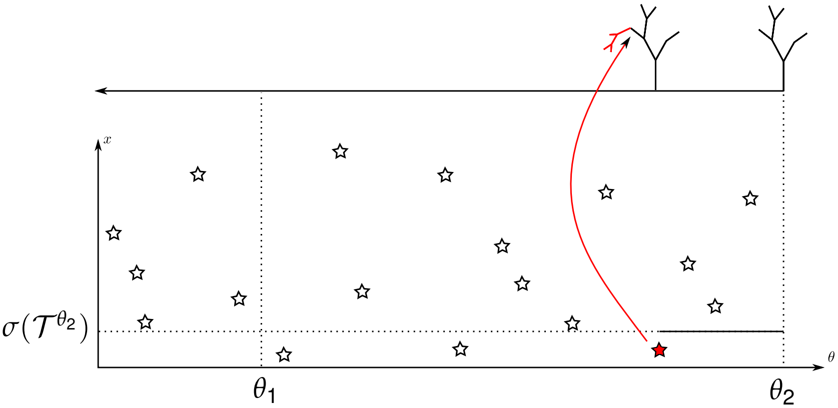
- Il faut le faire de façon consistante.
- Il ne faut pas exploser en chemin.

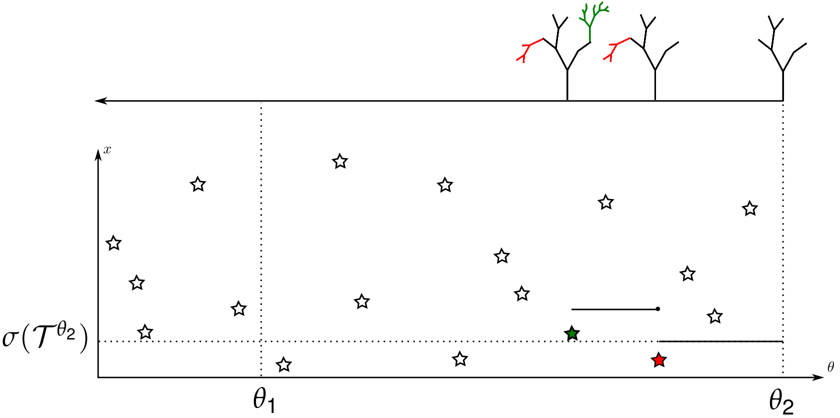
Construction poissonnienne



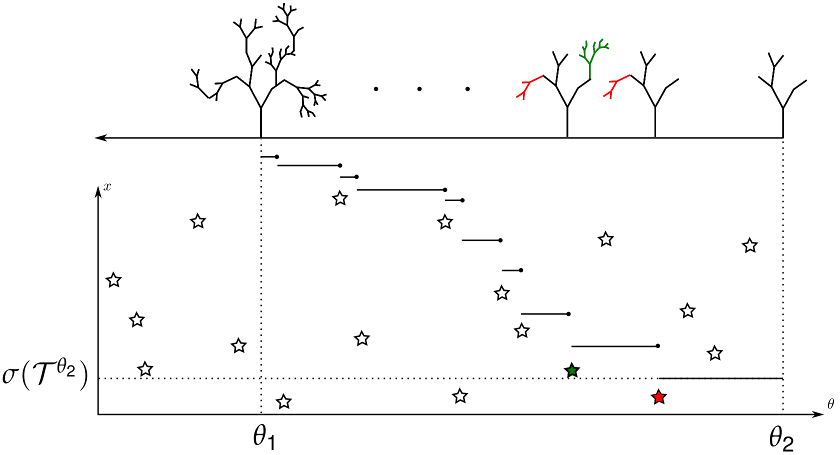
Construction poissonnienne




x
$\sigma(\mathcal{T}^{\theta_2})$
θ
θ_1
θ_2


x
$\sigma(\mathcal{T}^{\theta_2})$
θ
θ_1
θ_2

Construction poissonnienne



Loi de l'arbre (cas sous-critique)

On construit ainsi, partant d'un arbre T^{θ_2}, un processus d'arbres décroissant $(T^q,\ \theta_1 \le q \le \theta_2)$.

Théorème

Si T^{θ_2} est distribué suivant $\mathbb{N}^{\psi_{\theta_2}}$, alors le processus $(T^q,\ \theta_1 \le q \le \theta_2)$ a la même loi qu'un processus d'élagage $(\mathcal{T}^q,\ \theta_1 \le q \le \theta_2)$, issu d'un arbre distribué suivant $\mathbb{N}^{\psi_{\theta_1}}$.

Temps de sortie

On s'intéresse au premier temps auquel le processus d'élagage franchit une hauteur donnée :

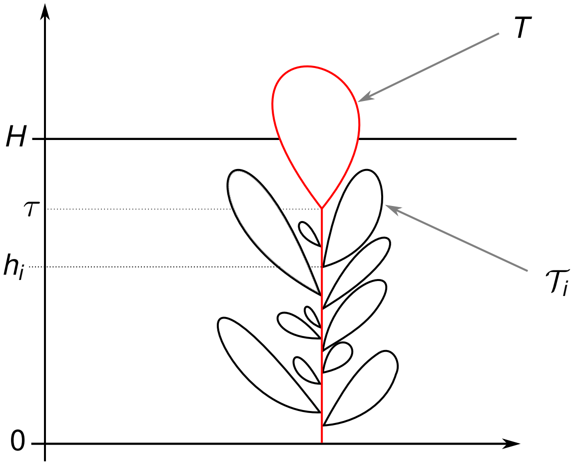
$$\Theta_H = \inf\{\theta \in \mathbb{R},\ H_{max}(\mathcal{T}^\theta) \leq H\}$$

Théorème (Duquesne, Le Gall)

La loi de Θ_H est donnée par $\mathbb{N}^\psi[\Theta_H \geq \theta] = u^\theta(H)$, où u^θ est telle que

$$\int_{u^\theta(H)}^{\infty} \frac{dr}{\psi_\theta(r)} = H.$$

Définitions en Θ_H



Loi de la colonne

Soit $H > 0, \theta \in \mathbb{R}$. Soit $f_{H,\theta}$ définie sur $[0, H)$ par :

$$f_{H,\theta}(t) = 4u^{\theta}(H-t)\exp\left(-4|\theta|t - \int_0^t 4u^{|\theta|}(H-x)dx\right)$$

Théorème

Conditionnellement à $\{\Theta_H = \theta\}$,

$$\mathbb{N}^{\psi}[\tau \in dt] = \frac{f_{H,\theta}(t)}{\int_0^H f_{H,\theta}(t)\ dt}.$$

Loi de l'arbre en dessous de **x**

Théorème

Conditionnellement à $\{\Theta_H = \theta\}$*, l'arbre* $\mathcal{T}^{\Theta_H}$ *peut s'écrire*

$$[\![\emptyset, \tau]\!] \circledast_{i\in I} (\mathcal{T}_i, h_i)$$

où $\sum_{i\in I} \delta_{(\mathcal{T}_i, h_i)}$ *est une mesure ponctuelle de Poisson sur* $\mathbb{T} \times [0, \tau]$ *d'intensité*

$$4\big(|\theta| + u^{|\theta|}(H-h)\big)dh\, \mathbb{N}^{\psi_{|\theta|}}\left[d\mathcal{T}\mathbf{1}_{H_{max}(\mathcal{T})+h<H}\right].$$

- Greffe d'arbres sous-critiques ne dépassant pas H.
- Greffe d'autant plus intense à mesure qu'on se rapproche de H.

Loi de l'arbre au-dessus de **x**

Théorème

Conditionnellement à $\{\Theta_H = \theta\}$, *l'arbre* $\mathcal{T}^{\Theta_{H^-}}$ *peut s'écrire*

$$\mathcal{T}^{\Theta_{H^-}} = \mathcal{T}^{\Theta_H} \circledast (T, \tau)$$

où T *est distribué suivant* $\mathbb{N}^{\psi_\theta}[dT \mathbf{1}_{H_{max}(T)+\tau>H}]$.

- Arbre standard, restreint à franchir la hauteur
- Asymptotique $H \to \infty$: Arbre conditionné à être infini

Cas surcritique

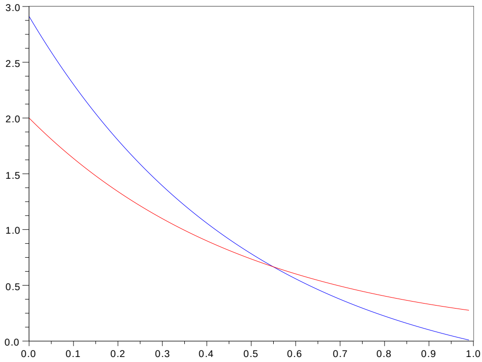


FIGURE: Densité de τ pour $H = 1$, $\theta = -1$

Cas sous-critique

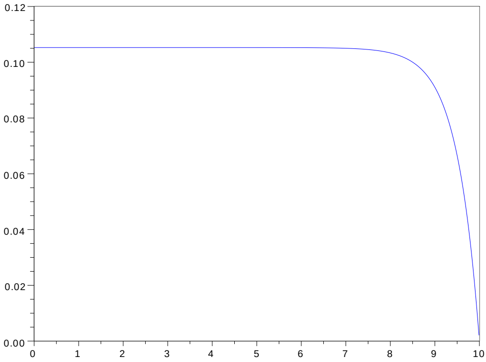


FIGURE: Densité de τ pour $H = 1$, $\theta = 1$

Couplage d'un mouvement brownien avec la structure d'arbre :
$\Rightarrow$ Serpent brownien (Le Gall)
Si $\mathcal{D}$ est un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, soit $u(x) = \mathbb{N}_x[\mathcal{T} \cap \partial\mathcal{D} \neq \emptyset]$.

Théorème (Dynkin ; Duquesne, Le Gall)

La fonction u est solution de l'équation

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\Delta u(x) = \psi(u(x)), \; x \in \mathcal{D} \\ u_{|\partial\mathcal{D}} = \infty \end{cases}$$

Si $\Theta_{\mathcal{D}} = \inf\{\theta \in \mathbb{R}, \; \mathcal{T}^\theta \cap \partial\mathcal{D} = \emptyset\}$, description de $\mathcal{T}^{\Theta_{\mathcal{D}}}$:

- Colonne vertébrale = Brownien tué (pas une diffusion)
- Greffe d'un arbre restreint à franchir $\partial\mathcal{D}$.

Couplage d'un mouvement brownien avec la structure d'arbre :
$\Rightarrow$ Serpent brownien (Le Gall)
Si $\mathcal{D}$ est un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, soit $u(x) = \mathbb{N}_x[\mathcal{T} \cap \partial\mathcal{D} \neq \emptyset]$.

Théorème (Dynkin ; Duquesne, Le Gall)

La fonction u est solution de l'équation

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\Delta u(x) = \psi(u(x)), \ x \in \mathcal{D} \\ u_{|\partial\mathcal{D}} = \infty \end{cases}$$

Si $\Theta_{\mathcal{D}} = \inf\{\theta \in \mathbb{R}, \ \mathcal{T}^\theta \cap \partial\mathcal{D} = \emptyset\}$, description de $\mathcal{T}^{\Theta_{\mathcal{D}}}$:

- Colonne vertébrale = Brownien tué (pas une diffusion)
- Greffe d'un arbre restreint à franchir $\partial\mathcal{D}$.