Méthode particulaire préservant l'asymptotique près de la quasi-neutralité pour le système de Vlasov-Maxwell

David Doyen, Pierre Degond, Fabrice Deluzet et Giacomo Dimarco

Institut de Mathématiques de Toulouse

Modèle de Vlasov-Maxwell

- Modèle décrivant l'évolution de particules chargées dans le champ électromagnétique engendré par les particules elles-mêmes. Pour simplifier, on suppose que les ions sont fixes et forment un fond uniforme de charge ρ_0.

- La fonction de distribution des électrons f satisfait l'équation de Vlasov :

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f - \frac{e}{m}(E + v \times B) \cdot \nabla_v f = 0.$$

- Le courant et la charge créés par les particules sont

$$J = -e \int_{\mathbb{R}^d} f(x,v,t) v \, dv \quad et \quad \rho = \rho_0 - e \int_{\mathbb{R}^d} f(x,v,t) \, dv.$$

- Les champs magnétique et électrique satisfont les équations de Maxwell (avec les sources créées par les particules) :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{c^2}\partial_t E - \nabla \times B = -\mu_0 J, \\
&\partial_t B + \nabla \times E = 0, \\
&\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \\
&\nabla \cdot B = 0.
\end{aligned}$$

Limite quasi-neutre

- La force de Coulomb qui s'exerce entre les particules tend à restaurer la neutralité de la charge. Ce phénomène introduit une longueur caractéristique de séparation de la charge, la **longueur de Debye**, et une période caractéristique d'oscillation de la charge, la **période plasma**.

- La longueur de Debye et la période plasma sont définies ainsi :

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T_0}{e^2 n_0}}, \qquad \tau_p = \sqrt{\frac{m\epsilon_0}{e^2 n_0}},$$

  où T_0 est la température caractéristique du plasma et n_0 est la densité caractéristique du plasma.

- Quand ces grandeurs caractéristiques sont beaucoup plus petites que les échelles d'espace et de temps du problème, le plasma est dit **quasi-neutre**.

- D'un point de vue mathématique, les modèles de plasmas changent de nature à la limite quasi-neutre, il s'agit d'une limite singulière.

Schémas préservant l'asymptotique

Comment traiter les problèmes où coexistent des zones proches de la quasi-neutralité et d'autres qui en sont éloignées ?

Option 1 : Deux discrétisations (une pour la zone quasi-neutre, une pour le reste du domaine) couplées à travers une interface.

Option 2 : Une discrétisation préservant l'asymptotique.

P1. Pour une longueur de Debye et une période plasma fixées, elle est consistante avec le modèle de plasma standard quand les paramètres de discrétisation tendent vers zéro.

P2. Elle est stable indépendamment de la longueur de Debye et de la période plasma.

P3. Pour des paramètres de discrétisation fixés, elle est consistante avec le modèle quasi-neutre quand la longueur de Debye et la période plasma tendent vers zéro.

Approche déjà appliquée à d'autres modèles :

- Euler-Poisson, Euler-Maxwell,
- Vlasov-Poisson (particulaire et semi-lagrangien).

Plan de l'exposé

Adimensionnement des équations de Vlasov-Maxwell (1/2)

On introduit des paramètres sans dimension :

$$\lambda = \frac{\lambda_D}{x_0}, \quad \eta_1 = \frac{ex_0 E_0}{mv_0^2}, \quad \eta_2 = \frac{ex_0 E_0}{k_B T_0}, \quad \alpha = \frac{v_0}{c}, \quad \beta = \sqrt{\frac{v_0 B_0}{E_0}}.$$

Avec ces paramètres, le système de Vlasov-Maxwell adimensionné s'écrit :

$$\begin{aligned}
&\partial_t f + v \cdot \nabla_x f - \eta_1 (E + \beta^2 v \times B) \cdot \nabla_v f = 0 \\
&\lambda^2 \eta_2 (\alpha^2 \frac{\partial E}{\partial t} - \beta^2 \nabla \times B) = -\alpha^2 J, \\
&\beta^2 \partial_t B + \nabla \times E = 0, \\
&\lambda^2 \eta_2 \nabla \cdot E = 1 - n, \\
&\nabla \cdot B = 0.
\end{aligned}$$

Adimensionnement des équations de Vlasov-Maxwell (2/2)

On fait les hypothèses suivantes sur les paramètres :

$$\eta_1 = 1, \quad \eta_2 = 1, \quad \alpha = \lambda, \quad \beta = 1.$$

Le système de Vlasov-Maxwell adimensionné devient alors :

$$\begin{aligned}
&\partial_t f + v \cdot \nabla_x f - (E + v \times B) \cdot \nabla_v f = 0, \\
&\lambda^2 \partial_t E - \nabla \times B = -J, \\
&\partial_t B + \nabla \times E = 0, \\
&\lambda^2 \nabla \cdot E = 1 - n, \\
&\nabla \cdot B = 0.
\end{aligned}$$

Limite quasi-neutre des équations de Vlasov-Maxwell (1/2)

$$\begin{aligned}
&\partial_t f + v \cdot \nabla_x f - (E + v \times B) \cdot \nabla_v f = 0, \\
&\lambda^2 \partial_t E - \nabla \times B = -J, \\
&\partial_t B + \nabla \times E = 0, \\
&\lambda^2 \nabla \cdot E = 1 - n, \\
&\nabla \cdot B = 0.
\end{aligned}$$

Quand on fait tendre λ vers 0 (limite quasi-neutre), on obtient formellement :

$$\begin{aligned}
&\partial_t f + v \cdot \nabla_x f - (E + v \times B) \cdot \nabla_v f = 0, \\
&\nabla \times B = J, \\
&\partial_t B + \nabla \times E = 0, \\
&n = 1, \\
&\nabla \cdot B = 0.
\end{aligned}$$

Limite quasi-neutre des équations de Vlasov-Maxwell (2/2)

On reformule le modèle quasi-neutre :

$$\begin{aligned}
&\partial_t f + v \cdot \nabla_x f - (E + v \times B) \cdot \nabla_v f = 0 \\
&E + \nabla \times (\nabla \times E) = J \times B - \nabla \cdot S, \\
&\partial_t B + \nabla \times E = 0, \\
&n = 1, \\
&\nabla \cdot B = 0,
\end{aligned}$$

où S, le tenseur de pression cinétique, est défini comme

$$S = \int_{\mathbb{R}^d} f(x, v, t) v \otimes v \, dv.$$

Notations

- L'intervalle de temps est discrétisé avec un pas de temps Δt. On pose $t^m := m\Delta t$.

- La fonction de distribution est approchée par une collection de N particules. Les vecteurs position et vitesse au temps t^m sont notés X_N^m et V_N^m. La position et la vitesse de la $j$ème particule sont notées $X_{N,j}^m$ et $V_{N,j}^m$.

- Les champs sont discrétisés par différences finies. Le champ électrique, le champ magnétique, la densité d'électrons et le courant au temps t^m sont notés E_h^m, B_h^m, n_h^m et J_h^m.

- La densité, le courant et le tenseur de pression cinétique calculés à partir des particules de position X_N et de vitesse V_N sont notés $n_h(X_N)$, $J_h(X_N, V_N)$ et $S_h(X_N, V_N)$.

- Les valeurs des champs E_h^m et B_h^m au point $X_{N,j}$ sont notées $E_h^m(X_{N,j})$ et $B_h^m(X_{N,j})$.

- Opérateurs vectoriels discrets : ∇_h, Δ_h, $\nabla_h\cdot$, $\nabla_h\times$, etc...

Schéma explicite classique

Les champs sont calculés avec une discrétisation explicite (leap-frog) :

$$\lambda^2 \frac{E_h^{m+1} - E_h^m}{\Delta t} - \nabla_h \times B_h^m = -J_h(X_N^m, V_N^m),$$
$$\frac{B_h^{m+1} - B_h^m}{\Delta t} + \nabla_h \times E_h^{m+1} = 0.$$

Les particules sont avancées avec un schéma explicite (leap-frog) :

$$\frac{X_{N,j}^{m+1} - X_{N,j}^m}{\Delta t} = V_{N,j}^{m+1},$$
$$\frac{V_{N,j}^{m+1} - V_{N,j}^m}{\Delta t} = -E_h^m\left(X_{N,j}^m\right) - \frac{V_{N,j}^m + V_{N,j}^{m+1}}{2} \times B_h^m\left(X_{N,j}^m\right).$$

Conditions de stabilité :

- Le pas de temps doit être plus petit que la période plasma : $\Delta t < 2\tau_p$.
- Le pas d'espace doit être plus petit que la longueur de Debye $\Delta x < \zeta\lambda_D$.
- Condition CFL pour les particules : $v_{th}\frac{\Delta t}{\Delta x} < 1$.
- Condition CFL pour les ondes EM : $c\frac{\Delta t}{\Delta x} < 1$.

Un schéma préservant l'asymptotique (1/4)

Le courant est prédit en utilisant une discrétisation de l'équation suivante :

$$\partial_t J - \nabla \cdot S - nE + J \times B = 0.$$

Il est essentiel d'impliciter le champ électrique. Les autres quantités peuvent être gardées explicites.

$$\frac{J_h^{m+1} - J_h(X_N^m, V_N^m)}{\Delta t} - \nabla_h \cdot S_h(X_N^m, V_N^m) - n_h(X_N^m) E_h^{m+1} + J_h(X_N^m, V_N^m) \times B_h^m = 0.$$

Les équations de Maxwell sont discrétisées de façon implicite et on utilise le courant prédit J_h^{m+1} :

$$\lambda^2 \frac{E_h^{m+1} - E_h^m}{\Delta t} - \nabla_h \times B_h^{m+1} = -J_h^{m+1},$$
$$\frac{B_h^{m+1} - B_h^m}{\Delta t} + \nabla_h \times E_h^{m+1} = 0.$$

Finalement, en éliminant J_h^{m+1}, on obtient un système linéaire pour E_h^{m+1} et B_h^{m+1} :

$$\frac{\lambda^2}{\Delta t^2}(E_h^{m+1} - E_h^m) + n_h(X_N^m) E_h^{m+1} - \frac{\nabla_h \times B_h^{m+1}}{\Delta t} = -\frac{J_h(X_N^m, V_N^m)}{\Delta t} - \nabla_h \cdot S_h(X_N^m, V_N^m) + J_h(X_N^m, V_N^m) \times B_h^m$$
$$\frac{B_h^{m+1} - B_h^m}{\Delta t} + \nabla_h \times E_h^m = 0.$$

Un schéma préservant l'asymptotique (2/4)

Finalement, les particules sont avancées avec les champs prédits E_h^{m+1} et B_h^{m+1} :

$$\frac{X_{N,j}^{m+1} - X_{N,j}^{m}}{\Delta t} = V_{N,j}^{m+1},$$
$$\frac{V_{N,j}^{m+1} - V_{N,j}^{m}}{\Delta t} = -E_h^{m+1}(X_{N,j}^{m}) - \frac{V_{N,j}^{m} + V_{N,j}^{m+1}}{2} \times B_h^{m+1}(X_{N,j}^{m}).$$

Un schéma préservant l'asymptotique (3/4)

P1. Pour une longueur de Debye et une période plasma fixées, elle est consistante avec le modèle de plasma standard quand les paramètres de discrétisation tendent vers zéro.
$\rightarrow$ ok

P2. Elle est stable indépendamment de la longueur de Debye et de la période plasma.
$\rightarrow$ ok (il ne reste que la condition CFL sur la vitesse des particules)

Un schéma préservant l'asymptotique (4/4)

P3. Pour des paramètres de discrétisation fixés, elle est consistante avec le modèle quasi-neutre quand la longueur de Debye et la période plasma tendent vers zéro.
$\rightarrow$ ok

Si l'on élimine B_h^{m+1} dans le système linéaire satisfait par E_h^{m+1} et B_h^{m+1}, on trouve :

$$\frac{\lambda^2}{\Delta t^2}(E_h^{m+1} - E_h^m) + n_h(X_N^m)E_h^{m+1} + \nabla_h \times \nabla_h \times E_h^{m+1} = \frac{\nabla_h \times B_h^{m+1} - J_h(X_N^m, V_N^m)}{\Delta t} - \nabla_h \cdot S_h(X_N^m, V_N^m) + J_h(X_N^m, V_N^m) \times B_h^m$$

Pour des paramètres de discrétisation fixés, quand $\lambda \rightarrow 0$, l'équation ci-dessus devient

$$E_h^{m+1} + \nabla_h \times \nabla_h \times E_h^{m+1} \approx J_h(X_N^m, V_N^m) \times B_h^m - \nabla_h \cdot S_h(X_N^m, V_N^m),$$

ce qui est consistant avec le modèle quasi-neutre

$$E + \nabla \times (\nabla \times E) = J \times B - \nabla \cdot S.$$

Loi de Gauss

- Dans la discrétisation des équations Maxwell, généralement, on n'impose pas d'équivalent discret de la loi de Gauss :

$$\begin{aligned} &\lambda^2 \partial_t E - \nabla \times B = -J, \\ &\partial_t B + \nabla \times E = 0, \\ &\lambda^2 \nabla \cdot E = 1 - n, \\ &\nabla \cdot B = 0. \end{aligned}$$

- Celle-ci est cependant vérifiée sous certaines conditions :
  - bonnes propriétés des opérateurs discrets,
  - sources vérifiant l'équation de conservation de la charge.

- Avec les méthodes particulaires, les sources ne vérifient pas l'équation de conservation de la charge. Pour satisfaire la loi de Gauss, on a généralement recours à une correction du champ électrique.

Correction elliptique standard (correction de Boris)

- **Principe :** On corrige la partie longitudinale du champ électrique de sorte à assurer la loi de Gauss.

$$\tilde{E}_h^{m+1} = E_h^{m+1} - \nabla_h p_h,$$
$$\lambda^2 \nabla_h \cdot \tilde{E}_h^{m+1} = 1 - n_h(X_N^{m+1}).$$

- En pratique, on résout

$$-\lambda^2 \Delta_h p_h = 1 - n_h(X_N^{m+1}) - \lambda^2 \nabla_h \cdot E_h^{m+1},$$

puis

$$\tilde{E}_h^{m+1} = E_h^{m+1} - \nabla_h p_h.$$

- Cette correction ne préserve pas l'asymptotique.

Une correction elliptique préservant l'asymptotique

- On corrige de la façon suivante :

$$\tilde{E}_h^{m+1} = E_h^{m+1} - \nabla_h p_h,$$
$$\lambda^2 \nabla_h \cdot \tilde{E}_h^{m+1} = 1 - \tilde{n}_h^{m+1},$$

où $\tilde{n}_h^{m+1}$ est une prédiction de la densité. Cette densité est prédite en utilisant :

$$\frac{\tilde{n}_h^{m+1} - n_h(X_N^m)}{\Delta t} - \nabla_h \cdot \tilde{J}_h^{m1} = 0,$$
$$\frac{\tilde{J}_h^{m+1} - J_h(X_N^m, V_N^m)}{\Delta t} - \nabla_h \cdot S_h(X_N^m, V_N^m) - n_h(X_N^m)\tilde{E}_h^{m+1} + J_h(X_N^m, V_N^m) \times B_h^m = 0.$$

- En pratique, on résout

$$-\nabla_h \cdot \left(\left(\frac{\lambda^2}{\Delta t^2} + n_h(X_N^m) \right) \nabla_h p_h \right) = \frac{1 - n_h(X_N^m)}{\Delta t^2} - \frac{\lambda^2}{\Delta t^2} \nabla_h \cdot E_h^{m+1},$$

puis

$$\tilde{E}_h^{m+1} = E_h^{m+1} - \nabla_h p_h.$$

- Cette correction préserve l'asymptotique.

Expansion d'un plasma

- Vlasov-Poisson, schéma préservant l'asymptotique
- 1D en espace
- deux espèces (électrons et ions)

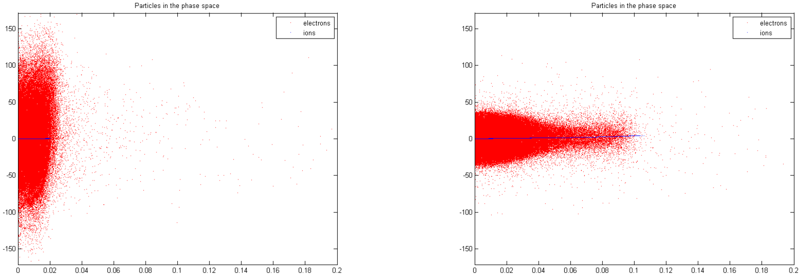

FIGURE: Particules dans l'espace des phases

Un modèle 1D de POS (Plasma Opening Switch)

- Vlasov-Maxwell, schéma préservant l'asymptotique
- 1D en espace, 2D en vitesse
- deux espèces (électrons et ions)

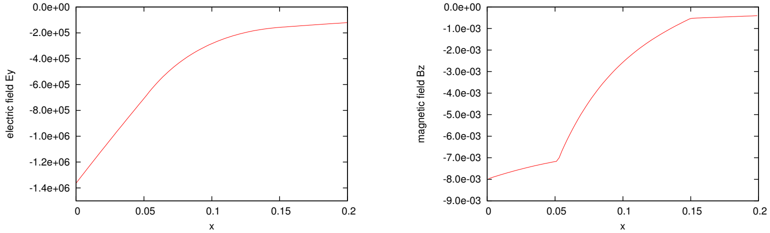

FIGURE: Champs électrique et magnétique (plasma peu dense)

Un modèle 1D de POS (Plasma Opening Switch)

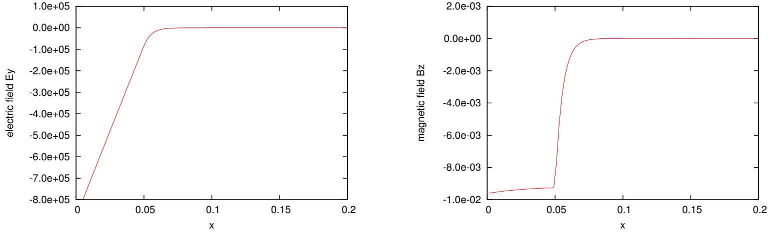

FIGURE: Champs électrique et magnétique (plasma très dense)

Perspectives

- analyse de stabilité
- variantes dans la discrétisation
- éliminer la condition de Courant sur la vitesse des électrons