Homogénéisation périodique

Utilité du correcteur d'ordre 2 dans un problème de transfert thermique

Zakaria HABIBI, CEA Saclay DANS & Polytechnique/CMAP

Grégoire Allaire, CMAP/Polytechnique

Anne Stietel, CEA Saclay DANS

Nos travaux concernent l'homogénéisation (voir [1]) de problèmes de transferts thermiques dans les coeurs des réacteurs nucléaires. Elle a des applications dans de très nombreux domaines physiques et nos travaux ont donc une portée plus générale que le seul contexte des réacteurs nucléaires.
Notre objectif est de définir un modèle homogène permettant une résolution numérique moins coûteuse du problème (1) qui modélise un transfert thermique par conduction dans un domaine Ω_ϵ périodiquement perforé par plusieurs trous infiniment petits de taille ϵ. Ce transfert tient compte, de la présence du rayonnement et d'un échange thermique dans les parois des trous Γ_ϵ.

$$\begin{cases} -div(K(\frac{x}{\epsilon})\nabla T_\epsilon(x)) & = f(\frac{x}{\epsilon}) & \text{dans } \Omega_\epsilon \\ -K(\frac{x}{\epsilon})\nabla T_\epsilon(x)\cdot n & = \epsilon h(\frac{x}{\epsilon})(T_\epsilon(x) - T_g(x)) + \frac{1}{\epsilon}G(\sigma T_\epsilon) & \text{sur } \Gamma_\epsilon \end{cases} \tag{1}$$

où: K est le tenseur de conductivité, $f \in L^2(\Omega_\epsilon)$ est une source thermique périodique fortement oscillante, T_g est la température à l'intérieur des trous (le gaz), h_ϵ est le terme d'échange entre chaque trou et le reste du domaine Ω. G est l'opérateur de rayonnement tel que $G(\sigma T_\epsilon) = (Id - \zeta_\epsilon)(\sigma T_\epsilon)$, où $\zeta_\epsilon(u)(s) = \int_{\Gamma_\epsilon} u(x)F(s,x)dx$, F est le facteur de forme.

A l'aide d'une méthode de développement asymptotique, on approche l'inconnue T_ϵ par

$$T_\epsilon(x) \simeq T_0(x) + \epsilon T_1(x, \frac{x}{\epsilon}) + \epsilon^2 T_2(x, \frac{x}{\epsilon}) + ...$$

Dans un premier lieu, on approche T_ϵ par T_0 qui est solution d'un problème homogène où les paramètres oscillants de (1) y apparaissent sous forme de moyenne. Ensuite, pour approcher correctement le gradient de T_ϵ, on corrige T_0 par le correcteur de premier ordre $\epsilon T_1(x, \frac{x}{\epsilon}) = \epsilon \sum_{j=1}^{d} \omega_j(y)\frac{\partial T_0}{\partial x_j}(x)$ où les ω_j sont les solutions périodiques des problèmes de cellule qui tiennent compte du rayonnement au bord des trous de la cellule de périodicité Y. Les résultats de notre étude montrent une contribution non négligeable du correcteur de second ordre $\epsilon^2 T_2$ où T_2 est la solution périodique d'un problème sous la forme

$$\begin{cases} -div_y(K(y)\nabla_y T_2(x,y)) & = f(x,y) + fonction(T_0, T_1) & \text{dans } Y \\ -K(y)\nabla_y T_2(x,y)\cdot n & = h(y)(T_0(x) - T_g(x)) + G(T_0, T_1, T_2) & \text{sur } \Gamma \end{cases} \tag{2}$$

Sa contribution est importante car elle nous permet de modéliser les gradients qui apparaissent entre la zone de la source thermique et les perforations. Ceci est du au fait que c'est le seul terme qui est fonction des valeurs locales de la source et de l'échange thermiques.
La justification des résultats est obenue grâce à un calcul d'erreur sur un domaine Ω_ϵ périodique pour éviter les problèmes de couches limites.

Références

[1] A. Bensoussan and J.L. Lions and G. Papanicolaou, *Asymptotic analysis for periodic structures*, North-Holland, Amsterdam, 1978.

Zakaria HABIBI, CEA Saclay DEN/DM2S/SFME/LTMF bat 454 91191 Gif-sur-Yvettes
zakaria.habibi@cmapx.polytechnique.fr
Grégoire Allaire, CMAP/Polytechnique, 91128 Palaiseau
gregoire.allaire@cmapx.polytechnique.fr
Anne Stietel, CEA Saclay DEN/DM2S/SFME/LTMF bat 454 91191 Gif-sur-Yvettes
anna.stietel@cea.fr