Quelques problèmes d'optimal design pour l'équation des ondes

Yannick PRIVAT, CNRS & ENS Cachan

Emmanuel TRÉLAT, MAPMO, Univ. d'Orléans

Enrique ZUAZUA, BCAM, Bilbao

Mots-clés : contrôle optimal, optimisation de forme, équation des ondes

On considère l'équation des ondes 1-D contrôlée à l'aide d'un feedback h_ω agissant sur un sous-domaine $\omega \subset (0,\pi)$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = h_\omega, \quad (t,x) \in (0,T) \times (0,\pi), \\ &y(t,0) = y(t,\pi) = 0, \quad t \in [0,T], \\ &y(0,x) = y^0(x),\ \partial_t y(0,x) = y^1(x), \quad x \in [0,\pi]. \end{aligned} \tag{1}$$

Les outils classiques de la théorie du contrôle assurent que, si ω est un sous ensemble de $(0,\pi)$ de mesure strictement positive et si T est supérieur à 2π, il existe pour toute condition initiale un contrôle de norme $L^2(0,T;L^2(\omega))$ minimale stabilisant à zéro l'équation des ondes 1-D. Ce contrôle est caractérisé par la méthode HUM (méthode d'unicité de Hilbert, voir [1, 2]). Il est explictement donné par

$$h_\omega(t,x) = \chi_\omega(x)\phi(t,x),\ t \in [0,T] \text{ et } x \in [0,\pi],$$

où ϕ désigne la solution du problème adjoint

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0, \quad (t,x) \in (0,T) \times (0,\pi), \\ &\phi(t,0) = \phi(t,\pi) = 0, \quad t \in [0,T], \end{aligned} \tag{2}$$

avec $\phi(0,\cdot) = \phi^0(\cdot)$ et $\partial_t\phi(0,\cdot) = \phi^1(\cdot)$. Le couple $(\phi^0(\cdot),\phi^1(\cdot))$ désigne l'unique minimiseur de la fonctionnelle

$$J_\omega(\phi^0,\phi^1) = \frac{1}{2}\int_0^T \int_\omega \phi(t,x)^2\,dxdt + \langle(\phi(0,\cdot),\partial_t\phi(0,\cdot)),(-y^1(\cdot),y^0(\cdot))\rangle. \tag{3}$$

Pourvu que l'inégalité d'observabilité

$$\|(\phi(0,\cdot),\partial_t\phi(0,\cdot))\|^2_{L^2(0,\pi)\times H^{-1}(0,\pi)} \leq C\int_0^T \int_\omega \phi(t,x)^2\,dxdt, \tag{4}$$

soit vérifiée pour tout ϕ solution du problème adjoint, l'unicité du minimiseur précédent est claire.
On s'intéresse au problème consistant à rechercher ω minimisant la norme L^2 du contrôle. On tentera d'établir le lien entre les outils classiques d'optimisation et ceux de la théorie du contrôle. Plus précisément, nous nous intéresserons aux problèmes :

1er problème. $(y^0,y^1) \in H^1_0(0,\pi) \times L^2(0,\pi)$ étant donné, on cherche à minimiser la quantité

$$\|h_\omega\|^2_{L^2(0,T;L^2(\omega))} = \int_0^T \int_\omega \phi(t,x)^2\,dxdt, \tag{5}$$

où ϕ est le problème adjoint du contrôle HUM h_ω amenant (y^0,y^1) à $(0,0)$ en temps T, parmi tous les ensembles mesurables $\omega \subset [0,\pi]$ de mesure de Lebesgue $|\omega| = L\pi$, avec $l \in (0,1)$.

2ème problème. On cherche à minimiser la quantité

$$\|\Gamma_\omega\| = \sup\left\{\|h_\omega\|_{L^2((0,T)\times(0,\pi))} \mid \|(y^0,y^1)\|_{H^1_0(0,\pi)\times L^2(0,\pi)} = 1\right\} \tag{6}$$

parmi tous les sous-ensembles mesurables $\omega \subset [0,\pi]$, de mesure égale à $L\pi$.

Dans ce travail, nous démontrons des résultats d'existence et de non-existence et fournissons des caractérisations et propriété qualitatives des solutions de ces problèmes d'optimal design.

Références

[1] J.-L. Lions, *Exact controllability, stabilizability and perturbations for distributed systems*, SIAM Rev. **30** (1988), 1–68.

[2] J.-L. Lions, *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués*, Tome 1, Recherches en Mathématiques Appliquées [Research in Applied Mathematics], Masson (1988).

Yannick PRIVAT, ENS de Cachan, antenne de Bretagne Campus de Ker Lann, Avenue Robert Schuman, F-35170 BRUZ
`yannick.privat@bretagne.ens-cachan.fr`
Emmanuel TRÉLAT, Universit d'Orlans, UFR Sciences, Fdration Denis Poisson Mathmatiques, Laboratoire MAPMO, UMR 6628, Route de Chartres, BP 6759, 45067 Orlans Cedex 2, France
`emmanuel.trelat@univ-orleans.fr`
Enrique ZUAZUA, BCAM - Basque Center for Applied Mathematics, Bizkaia Technology Park, B.500, E48160 Derio, Basque Country, Spain.
`zuazua@bcamath.org`