Convergence vers l'état stationnaire d'un modèle simplifié du mécanisme de concentration urinaire

Magali TOURNUS, UPMC PARIS

Aurélie Edwards, UPMC Paris

Nicolas Seguin, UPMC Paris

Benoit Perthame, UPMC Paris

On s'intéresse à un modèle stationnaire [1] [2] de concentration d'un soluté. Ce modèle simplifié vise à décrire le transport d'un soluté dissous dans un fluide qui circule dans 3 tubes de longueur L disposés à contre-courant et qui baignent dans un interstitium commun (int), ce qui constitue une modélisation simplifiée de l'unité fonctionnelle du rein. Les phénomènes biologiques pris en compte sont la diffusion, l'osmose et le transport actif de solutés via des pompes, ce qui introduit une non-linéarité monotone. On obtient le systme d'EDO suivant:

$$\begin{cases} \dfrac{dC^1(x)}{dx} = J^1(x), \qquad x \in [0, L], \\ \dfrac{dC^2(x)}{dx} = J^2(x), \qquad x \in [0, L], \\ -\dfrac{dC^3(x)}{dx} = J^3(x), \qquad x \in [0, L], \\ C^1(0) = C_0^1, \qquad C^2(0) = C_0^2, \qquad C^3(L) = C^2(L), \end{cases} \tag{1}$$

où $C^i(x)$ est la concentration du soluté dans le tube i à la profondeur $x \in [0, L]$. Les flux transmuraux $J^i(x)$ de soluté de l'intersitium vers le tube i à la profondeur x sont donnés par

$$\begin{cases} J^1(x) = P^1(x)(C^{int}(x) - C^1(x)), \\ J^2(x) = P^2(x)(C^{int}(x) - C^2(x)), \\ J^3(x) = P^3(x)(C^{int}(x) - C^3(x)) - F(C^3(x), x), \end{cases} \tag{2}$$

où P^i est la perméabilité de la paroi du tube i au soluté, $C^{int}(x)$ est la concentration interstitielle en soluté à la profondeur x, et F représente la pompe à soluté.

On introduit le système dynamique associé à ce modèle stationnaire qui consiste en un système d'EDP. Il y a existence et unicité du système dynamique et la solution dynamique se relaxe vers l'unique solution du problème stationnaire [3]. Si la non-linéarité n'est pas trop grande, on montre par un argument spectral que cette relaxation est exponentielle. On développe ensuite un algorithme de type volumes-finis qui nous permet d'atteindre la solution numérique du système stationnaire et de mettre en évidence des comportements qualitatifs induits par l'architecture à contre-courant.

Références

[1] B. Hargitay and W. Kuhn, *The Multiplication Principle as the Basis for Concentrating Urine in the Kidney (with comments by B. Hargitay and S. R. Thomas)*, J. Am. Soc. Nephrol., volume 12, number 7, pages 1566–1586, 2001.

[2] J. L. Stephenson, *Urinary concentration and dilution: Models*, E. E. Windhager, pages 1349–1408, Oxford University Press, Handbook of Physiolog, Section 8, Renal Physiology, Bethesda, MD, 1992.

[3] B. Perthame, *Transport equations in biology*, Frontiers in Mathematics, Frontiers in Mathematics, Basel, 2007.

Magali TOURNUS, UPMC Univ Paris 06, CNRS UMR 7598, Laboratoire Jacques-Louis Lions, F-75005, Paris
`magali.tournus@ann.jussieu.fr`