

# Un résultat de trace pour une classe de domaines à bord fractal autosimilaire

**Thibaut DEHEUVELS**, IRMAR Rennes

Ce travail s'inscrit dans un projet visant à simuler la diffusion d'aérosols dans les poumons. On s'intéresse ici à une modélisation bidimensionnelle de l'arbre bronchique : on introduit une classe de domaines ramifiés  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$  à bord fractal autosimilaire  $\Gamma^\infty = f_1(\Gamma^\infty) \cup f_2(\Gamma^\infty)$ , où  $f_1$  et  $f_2$  sont des similitudes contractantes de même rapport, d'angles opposés (voir figure 1). Comme les échanges entre les poumons et le système circulatoire ont lieu dans les dernières générations de l'arbre, il est raisonnable d'imposer des conditions de Neumann non-homogènes, voire de Robin sur la frontière  $\Gamma^\infty$ . Il est alors nécessaire d'étudier la trace sur  $\Gamma^\infty$  des fonctions définies sur le domaine  $\Omega$ . On s'intéressera ici aux fonctions  $u \in W^{1,q}(\Omega)$ ,  $1 < q < \infty$ , et on se posera la question de l'existence d'une trace pour  $u$  dans les espaces de Besov  $B_s^{q,q}(\Gamma^\infty)$ ,  $s > 0$ , que l'on définira.

Le domaine  $\Omega$  dépend essentiellement d'un paramètre de contraction  $a$ ,  $0 < a \leq a^*$ . La condition  $a \leq a^*$  assure que le domaine construit est une union de sous-domaines qui ne se recouvrent pas. Le cas  $a < a^*$  peut être déduit des résultats de [3] (voir [1] et [2]): on a existence d'une trace pour  $u \in W^{1,q}(\Omega)$  dans  $B_{1-\frac{2-d}{q}}^{q,q}(\Gamma^\infty)$  où  $d$  est la dimension de Hausdorff du bord autosimilaire  $\Gamma^\infty$ .

On s'intéresse ici au cas critique  $a = a^*$ , et l'on distingue deux cas, suivant les valeurs de l'angle des similitudes  $f_1$  et  $f_2$ . Dans le premier, l'ensemble  $\Xi^\infty = f_1(\Gamma^\infty) \cap f_2(\Gamma^\infty)$  correspondant à une auto-intersection du fractal  $\Gamma^\infty$  est réduit à un point, dans le second il est infini, voir figure 1.

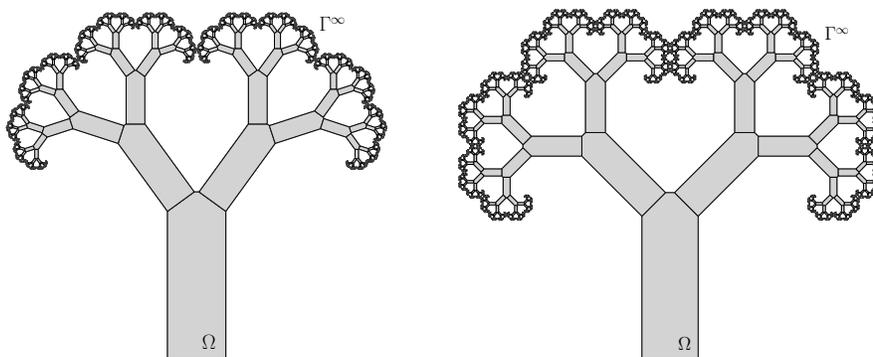


Figure 1: Domaine  $\Omega$  pour  $a = a^*$  dans les cas où  $\Xi^\infty$  est réduit à un point (gauche) ou est infini (droite).

On construit une notion de trace des fonctions de  $W^{1,q}(\Omega)$  dans  $\Gamma^\infty$  et on montre dans [2] que, dans le cas où  $\Xi^\infty$  est réduit à un point, on a l'existence d'une trace dans  $B_{1-\frac{2-d}{q}}^{q,q}(\Gamma^\infty)$  lorsque  $q < 2$ , et dans  $B_s^{q,q}(\Gamma^\infty)$  pour  $s < \frac{d}{q}$  lorsque  $q \geq 2$ . Dans le cas où  $\Xi^\infty$  est infini, on a l'existence d'une trace dans  $B_{1-\frac{2-d}{q}}^{q,q}(\Gamma^\infty)$  lorsque  $q < 2 - \frac{d}{2}$ , et dans  $B_s^{q,q}(\Gamma^\infty)$  pour  $s < \frac{d}{2q}$  lorsque  $q \geq 2 - \frac{d}{2}$ .

## Références

- [1] Y. ACHDOU, N. TCHOU, *Trace theorems for a class of ramified domains with self-similar fractal boundaries*, SIAM J. Math. Anal. 42, 2010.
- [2] Y. ACHDOU, T. DEHEUVELS, N. TCHOU, *JLip versus Sobolev spaces on a class of fractal self-similar foliages*, soumis.
- [3] A. JONSSON, H. WALLIN, *Function spaces on subsets of  $\mathbb{R}^n$* , Maths. Rep. 2, 1984.

**Thibaut DEHEUVELS**, Université Rennes 1, 263 avenue du Général Leclerc, 35000 Rennes  
 thibaut.deheuvels@univ-rennes1.fr

**Yves Achdou**, Université Paris Diderot, 175 rue du Chevaleret, 75013 Paris, et UMR 7598, Laboratoire Jacques-Louis Lions, F-75005 Paris  
 achdou@math.jussieu.fr

**Nicoletta Tchou**, Université Rennes 1, 263 avenue du Général Leclerc, 35000 Rennes  
 nicoletta.tchou@univ-rennes1.fr