

# Calcul fonctionnel non-anticipatif

Rama CONT, CNRS - Université Pierre & Marie Curie

**Mots-clés :** calcul fonctionnel, calcul stochastique, EDP, mouvement Brownien, contrôle stochastique, calcul de Malliavin, martingale.

La modélisation de nombreux phénomènes physiques, biologiques et économiques fait intervenir des quantités qui dépendent de façon causale –ou *non-anticipative*– de la trajectoire d’un processus aléatoire. Cet exposé (dont la première moitié sera tout à fait compréhensible pour un non-probabiliste!) présentera les bases d’un calcul différentiel pour ces *fonctionnelles non-anticipatives* de processus aux trajectoires irrégulières et illustrera quelques-unes de ses applications.

L’ingrédient clé de ce calcul est une formule de changement de variable fonctionnelle [2], que nous dérivons dans un cadre purement analytique (déterministe), pour des fonctionnelles non-anticipatives définies sur l’espace  $D([0, T], \mathbb{R}^d)$  des trajectoires continues à droite avec limite à gauche.

La version probabiliste de cette formule [1, 6] conduit à un “calcul d’Ito fonctionnel”, qui est le ‘relèvement non-anticipatif’ du calcul de Malliavin [3]. Ce calcul permet d’obtenir des formules explicites de représentation d’une martingale comme intégrale stochastique, permettant un calcul numérique trajectoire par trajectoire de ces représentations, avec des applications à la couverture de produits dérivés “path-dependent” et au contrôle stochastique [5].

Ces outils permettent d’étendre, au cas fonctionnel, la relation classique entre martingales Browniennes et fonctions harmoniques: nous montrons qu’une fonctionnelle non-anticipative régulière d’un mouvement Brownien possède la propriété de martingale si et seulement si elle est solution d’une “équation de la chaleur” fonctionnelle, pour lequel nous montrons un résultat d’unicité [3, 4]. Ce résultat permet une formulation déterministe des conditions d’optimalité dans des problèmes de contrôle stochastique non-Markoviens: nous obtenons des équations fonctionnelles de type HJB, dont l’étude pose des problèmes intéressants.

## Références

- [1] R Cont and D Fournié (2010) A functional extension of the Ito formula, *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences*, Volume 348, Issues 1-2, January 2010, Pages 57-61.
- [2] R Cont and D Fournié (2010) Change of variable formulas for non-anticipative functionals on path space, *Journal of Functional Analysis*, Volume 259, No 4, Pages 1043-1072.
- [3] R Cont and D Fournié (2009) Functional Ito calculus and stochastic integral representation of martingales, à paraître dans *Annals of Probability*.
- [4] R Cont and D Fournié (2010) Functional Kolmogorov equations and harmonic functionals, Working Paper.
- [5] R Cont (2010) Numerical computation of martingale representations, Working Paper.
- [6] B Dupire (2009) Functional Ito calculus, [www.ssrn.com](http://www.ssrn.com).