Ondes rogue multiples

Philippe DUBARD, Université de Bourgogne

Vladimir MATVEEV, Université de Bourgogne

Mots-clés : ondes rogue, équation de Schrödinger non-linéaire, équation KP-I, wronskiens

Depuis de très nombreuses années, des témoignages de marins décrivant des vagues destructrices apparues subitement avant de disparaître non moins rapidement sont disponibles dans la littérature. Cependant l'étude mathématique de ces phénomènes, appelés rogue waves (ou ondes scélérates), est beaucoup plus récente et encore incomplète. Par exemple, l'apparition d'une série de trois vagues (appelées trois sœurs) n'était pas expliquée mathématiquement, même dans des modèles très simples, encore récemment.

Une des équations les plus utilisée pour modéliser le comportement d'ondes de surface dans de l'eau profonde est l'équation de Schrödinger non-linéaire

$$iv_t + v_{xx} + 2|v|^2 v = 0. \tag{1}$$

En 1983, Peregrine a construit la première solution quasi-rationnelle non-triviale de (1). Elle a la particularité de présenter un grand maximum entouré de deux minima prononcés dans une région localisée de l'espace et du temps. Elle peut donc être qualifiée d'onde rogue. En 2010, Akhmediev et ses collaborateurs ont obtenu plusieurs autres solutions quasi-rationnelles de (1) (références dans la bibliographie de [1]). Là encore, ces solutions présentent un maximum de grande amplitude en un point précis de l'espace-temps.

Ici, nous construisons des familles de solutions quasi-rationnelles de (1) dépendant de $2n$ paramètres rels, n étant un entier choisi arbitrairement. Dans le cas $n = 1$, on retrouve la solution de Peregrine et les deux paramètres sont simplement des paramètres de translation. Le cas $n = 2$ est déjà beaucoup plus intéressant. Deux des paramètres sont encore de simples translations mais les deux autres ont une incidence profonde sur le profil des solutions. Pour un choix particulier de ces paramètres on retrouve la première solution d'Akhmediev évoquée ci-dessus qui admet cinq maxima locaux. Pour un choix générique on observe une solution de type trois sœurs à trois maxima locaux. Entre ces deux phénomènes, il existe une phase de "transition" où les solutions présentent quatre maxima locaux.

Ces solutions sont obtenues grace à une propriété de covariance de l'équation de Schrödinger non-stationnaire

$$i\varphi_t + \varphi_{xx} + u\varphi = 0 \tag{2}$$

qui peut redonner (1) après réduction. Cette méthode nous permet de construire "gratuitement" des familles à $2n$ paramètres réels de solutions rationnelles lisses de l'équation KP-I

$$(4u_t + 6uu_x + u_{xxx})_x = 3u_{yy} \tag{3}$$

qui décrit le comportement d'ondes dans de l'eau très peu profonde.

Références

[1] P. Dubard and V.B. Matveev, *Multi-rogue waves solutions to the focusing NLS equation and the KP-I equation*, Nat. Hazards Earth Syst. Sci., **11**, 667-672, 2011.

Philippe DUBARD, IMB, 9 avenue Alain Savary, 21078 Dijon Cedex
`Philippe.Dubard@u-bourgogne.fr`