Étude spectrale de l'opérateur Schrödinger avec champ magnétique dans un dièdre.

Nicolas POPOFF, IRMAR, Université de Rennes 1

Mots-clés : Supraconductivité, Condition de Neumann, Éléments finis

Motivation en physique. Les propriétés supraconductrices d'un matériau sont détruites par un champ magnétique trop intense, mais si on abaisse progressivement son intensité en dessous d'une valeur critique, les premières paires d'électrons supraconductrices apparaissent sur le bord du matériau. La linéarisation des équations de Ginzburg-Landau au voisinage de cette valeur critique conduit alors à étudier le spectre de l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique et condition de Neumann au bord.

Modélisation. Afin de comprendre le rôle de la géométrie du matériau, nous étudions l'influence d'une arête droite sur l'apparition de la supraconductivité. Ce travail fait suite à l'étude concernant un matériau en forme de demi-espace [1]. Nous nous intéressons au cas modèle d'un dièdre infini $S_\alpha \times \mathbb{R}$ où $S_\alpha = \{(t,s) \in \mathbb{R}^2, t > 0, |s| < t \tan \frac{\alpha}{2}\}$ est le secteur d'angle α. Le dièdre est soumis à un champ magnétique constant de la forme $\mathbf{B} = (\sin\gamma, 0, \cos\gamma)$, qui est donc contenu dans le plan bissecteur du dièdre. Après une transformation de Fourier partielle, nous sommes ramenés à étudier le spectre d'un opérateur de Schrödinger avec conditon de Neumann en deux dimensions sur le secteur S_α :

$$\mathcal{L}(\alpha,\gamma) = -(\nabla - i\mathbf{A})^2 + V,$$

où $\mathbf{A}$ est un vecteur en dimension 2 vérifiant rot $\mathbf{A} = \cos\gamma$ et V est le potentiel réel défini par $V(s,t) = s^2 \sin^2\gamma$.

Résultats. Nous réalisons une étude asymptotique de la première paire propre $(\mu(\alpha,\gamma), u_{\alpha,\gamma})$ de l'opérateur $\mathcal{L}(\alpha,\gamma)$ quand l'angle α tend vers 0.

Si la jauge de $\mathbf{A}$ n'influe pas sur la première valeur propre de l'opérateur, nous montrons en revanche que pour un certain choix de la jauge, le premier terme du développement asymptotique du vecteur propre a une phase moins oscillante. Nous justifions ainsi le choix de cette jauge pour les calculs numériques. Nous avons utilisé la librairie d'éléments finis MELINA afin de calculer la première paire propre de l'opérateur $\mathcal{L}(\alpha,\gamma)$, nous retrouvons ainsi certaines structures vues dans [2].

Il est en particulier remarquable de voir que le premier mode s'annule en certains points, ce qui diffère du cas d'un opérateur de Schrödinger sans champ magnétique. Nous expliquons ceci en réalisant un développement asymptotique à deux termes du vecteur propre, nous démontrons que le premier vecteur propre de l'opérateur est approché en norme L^2 par le quasi-mode :

$$u^{\mathrm{app}}_{\alpha,\gamma}(t,\eta) = e^{-t/2\sqrt{3}\cos\gamma}(1 + \alpha^2 P_\gamma(t,\eta)),$$

avec P_γ est un polynôme en les variables $(t,\eta) = (\frac{1}{2}\alpha\rho^2, \frac{\phi}{\alpha})$, où (ρ,ϕ) sont les coordonnées polaires. Nous démontrons aussi que l'équivalent de la première valeur propre $\mu(\alpha,\gamma)$ ne dépend pas de l'orientation du champ : $\mu(\alpha,\gamma) \underset{\alpha\to 0}{\sim} \frac{\alpha}{\sqrt{3}}$. Nous retrouvons ainsi le résultat connu pour un champ magnétique parallèle au dièdre [3]. Nous démontrons que le paramètre γ intervient dans le deuxième terme du développement asymptotique.

Références

[1] V. Bonnaillie-Noël, M. Dauge, N.Popoff and N.Raymond, Discrete spectrum of a model Schrödinger operator on the half-plane with Neumann condition, Preprint IRMAR 10-64, 2010.

[2] V. Bonnaillie-Noël, M. Dauge, D. Martin and G. Vial, *Computations of the first eigenpairs for the Schrödinger operator with magnetic field*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 196 2007.

[3] V.Bonnaillie-Noël, *On the fundamental state energy for a Schrödinger operator with magnetic field in domains with corners*, Asymptot. Anal. 41, 3-4, 2001.

Nicolas POPOFF, IRMAR, Université de Rennes 1, 263 avenue du Général Leclerc, 35000 Rennes
`nicolas.popoff@univ-rennes1.fr`