Une méthode de discrétisation totale des systèmes vibrants utilisant les observateurs

Nicolae Cîndea, INRIA Rocquencourt

Dominique Chapelle, INRIA Rocquencourt

Philippe Moireau, INRIA Rocquencourt

Soit H un espace de Hilbert et soit $A_0 : \mathcal{D}(A_0) \to H$ un opérateur auto-adjoint, défini positif avec des résolvantes compactes. On considère le système d'évolution du second ordre suivant

$$\begin{cases} \ddot{w}(t) + A_0 w(t) = 0, & t > 0 \\ w(0) = w_0, & \dot{w}(0) = w_1, \end{cases} \tag{1}$$

Il est bien connu que, en discrétisant (1) en temps et en espace sur l'intervalle $[0, T]$, l'erreur est contrôlée par $C_0(w_0, w_1)C_1(h, \Delta t)T$, où h est le pas de discrétisation en espace, Δt le pas de temps et $C_1(h, \Delta t) \to 0$ quand $h, \Delta t \to 0$. Supposant qu'on dispose de certaines mesures partielles de l'état du système :

$$z(t) = B_0 w(t), \qquad t > 0, \tag{2}$$

le but de ce travail est de proposer une méthode de discrétisation totale de (1) telle que l'erreur soit contrôlée par un terme qui ne dépende plus du temps T. Dans (2), $B_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(A_0^{\frac{1}{2}}), Z)$ et Z est un espace de Hilbert. Pour simplifier la notation on définit $A : \mathcal{D}(A_0) \times \mathcal{D}(A_0^{\frac{1}{2}}) \to \mathcal{D}(A_0^{\frac{1}{2}}) \times H$ et $B \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(A_0^{\frac{1}{2}}) \times H, U)$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A_0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} B_0 & 0 \end{pmatrix}$, tels que le système (1) s'écrit comme un système d'ordre un en temps

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \qquad x(0) = x_0, \qquad \text{avec } x(t) = \begin{pmatrix} w(t) \\ \dot{w}(t) \end{pmatrix}. \tag{3}$$

L'idée de notre méthode est de discrétiser à la place de (3) un observateur utilisant comme entrée (2), i.e., un système de la forme : $\dot{\overline{x}}(t) = A\overline{x}(t) + \gamma B^*(z(t) - B\overline{x}(t))$, avec γ un paramètre positif.
Sous l'hypothèse que le système (1)-(2) soit exactement observable, $\|\overline{x}(t) - x(t)\|$ tend exponentiellement à zéro quand $t \to \infty$. On propose donc un schéma, inspiré de [2], qui discrétise cet observateur en conservant sa vitesse de convergence. Plus précisément, on introduit deux familles de sous-espaces finis dimensionnels $(V_h)_{h>0}$ et $(Z_h)_{h>0}$ de $\mathcal{D}(A_0^{\frac{1}{2}})$, respectivement de Z, et on note $A_h \in \mathcal{L}(Vh \times V_h)$, $B_h \in \mathcal{L}(V_h, Z_h)$ les opérateurs en dimension finie approchant A et B. On considère alors le schéma numérique suivant

$$\frac{\tilde{\overline{x}}_h^{k+1} - \overline{x}_h^k}{\Delta t} = A_h \frac{\overline{x}_h^k + \tilde{\overline{x}}_h^{k+1}}{2} + \gamma B_h^* \left(z((k+\frac{1}{2})\Delta t) - B_h \frac{\overline{x}_h^k + \tilde{\overline{x}}_h^{k+1}}{2} \right), \quad \frac{\overline{x}_h^{k+1} - \tilde{\overline{x}}_h^{k+1}}{\Delta t} = \varepsilon \mathcal{V}_\varepsilon \overline{x}_h^{k+1} \tag{4}$$

où $\overline{x}_h^0 = x_{0h}$, $\varepsilon = \max\{h, \Delta t\}$ et $\mathcal{V}_\epsilon \in \mathcal{L}(V_h \times V_h)$ est un opérateur de viscosité numérique. Le résultat principal de ce travail, donne l'existence des constantes positives $C_0(x_0)$ et $C_1(h, \Delta t)$ telles que

$$\|\overline{x}^k - x(k\Delta t)\|_{\mathcal{D}(A_0^{\frac{1}{2}}) \times H} \le C_0(x_0) C_1(\Delta t, h), \qquad \forall k \in \mathbb{N},$$

où $C_1(h, \Delta t) \to 0$ quand $(h, \Delta t) \to 0$. De plus, on prouve que cette estimation d'erreur est valable pour l'équation des ondes avec B_0 la restriction à un ouvert du domaine satisfaisant la condition de contrôle géométrique. Les difficultés à surmonter résident dans l'inégalité d'observabilité non-standard nécessaire pour la stabilité, ainsi que dans la construction de l'adjoint B^* (voir [1]).

Références

[1] Chapelle, D.; Cîndea, N; de Buhan, M.; Moireau, P., *Exponential convergence of an observer using partial field measurements for the wave equation*, preprint.

[2] Ervedoza, S.; Zuazua, E., *Uniformly exponentially stable approximations for a class of damped systems*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 91 (2009), 20-48.

Nicolae Cîndea, INRIA Rocquencourt, Domaine de Voluceau, BP 105, 78153 Le Chesnay Cedex, France
`nicolae.cindea@inria.fr`
Dominique Chapelle, INRIA Rocquencourt, Domaine de Voluceau, BP 105, 78153 Le Chesnay Cedex, France
`dominique.chapelle@inria.fr`
Philippe Moireau, INRIA Rocquencourt, Domaine de Voluceau, BP 105, 78153 Le Chesnay Cedex, France
`philippe.moireau@inria.fr`