# Un problème de contrôlabilité pour les équations de Maxwell du second ordre

**Stephanie LOHRENGEL**, Université de Reims-Champagne Ardenne

**Marion DARBAS**, LAMFA, Université de Picardie

**Olivier GOUBET**, LAMFA, Université de Picardie

La contrôlabilité exacte de certaines équations aux dérivées partielles joue un rôle de plus en plus important dans de nombreux domaines d'application. Elle intervient par exemple dans la résolution de problèmes inverses en imagerie. Elle est également au cœur de certaines méthodes de reconstruction [1].

L'objectif de cette présentation est d'aborder le problème de la contrôlabilité exacte frontière pour les équations de Maxwell instationnaires du second ordre. Plus précisément, soit $\Omega$ un domaine de $\mathbb{R}^3$ régulier et $\Gamma_0$ une partie de sa frontière. Etant donnés un temps $T > 0$ et des données initiales $\{\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_1\}$, nous cherchons un champ tangentiel $\mathbf{G}$ défini sur $\Gamma_0 \times [0,T]$ tel que le champ électrique $\mathbf{E}$, solution du problème

$$\begin{cases} \partial_t^2 \mathbf{E} + \mathbf{curl}\,\mathbf{curl}\,\mathbf{E} = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega \times [0,T], \\ \operatorname{div} \mathbf{E} = 0 & \text{dans } \Omega \times [0,T], \\ \mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{G} & \text{sur } \Gamma_0 \times [0,T], \\ \mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} & \text{sur } \partial\Omega \setminus \Gamma_0 \times [0,T], \\ \mathbf{E}(0) = \mathbf{E}_0, \partial_t \mathbf{E}(0) = \mathbf{E}_1 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

vérifie

$$\mathbf{E}(T) = \partial_t \mathbf{E}(T) = 0 \text{ dans } \Omega.$$

On dira alors que le *contrôle* $\mathbf{G}$ amène le système (1) au repos au temps $T$. Le modèle (1) est dérivé, après élimination du champ magnétique, des équations de Maxwell. Pour ces dernières, des résultats de contrôlabilité sont connus (cf. par exemple dans [2, 3]).

Nous proposons de résoudre le problème de contrôlabilité par la méthode H.U.M. (*Hilbert Uniqueness Method*) développée par J.-L. Lions. Le point clé de cette méthode est une estimation dite d'*observabilité* que nous déduisons des résultats de [3]. La méthode H.U.M. permet ensuite d'exprimer le contrôle recherché $\mathbf{G}$ en termes de la solution du problème adjoint associé à (1): les donnés initiales $\{\psi_0, \psi_1\}$ du problème adjoint apparaissent comme l'image réciproque des donnés $\{\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_1\}$ par l'opérateur H.U.M. Cet opérateur définissant une forme bilinéaire continue et coercive sur un espace de Hilbert approprié, il est possible de résoudre le problème de contrôlabilité *numériquement* grâce à une méthode de type gradient conjugué. Les résultats numériques que nous montrerons confirment et illustrent la théorie.

## Références

[1] H. Ammari, *Identification of small amplitude perturbations in the electromagnetic parameters from partial dynamic boundary measurements*, J. Math. Anal. Appl., **282**, pp. 479–494, 2003.

[2] J.E. Lagnese, *Exact boundary controllability of Maxwell's equations in a general region*, J. Control Optim., **27**, pp. 374–388, 1989.

[3] K.D. Phung, *Contrôle et stabilisation d'ondes électromagnétiques*, ESAIM COCV, **5**, pp. 87–137, 2000.

**Stephanie LOHRENGEL**, Laboratoire de Mathématiques, U.F.R. Sciences Exactes et Naturelles, Moulin de la Housse - BP 1039, 51687 REIMS cedex 2
`stephanie.lohrengel@univ-reims.fr`
**Marion DARBAS**, LAMFA CNRS UMR 6140 UPJV, Faculté des Sciences, 33 rue Saint-Leu, 80039 AMIENS cedex 1
`marion.darbas@u-picardie.fr`
**Olivier GOUBET**, LAMFA CNRS UMR 6140 UPJV, Faculté des Sciences, 33 rue Saint-Leu, 80039 AMIENS cedex 1
`olivier.goubet@u-picardie.fr`