Méthodes Galerkin discontinues localement implicites pour la résolution des équations de Maxwell en domaine temporel

Ludovic Moya, INRIA Sophia Antipolis

Mots-clés : équations de Maxwell, Galerkin discontinu, schéma d'intégration en temps localement implicite, convergence temporelle, réduction d'ordre

De nos jours, une grande variété de methodes existe pour le traitement numérique des équations de Maxwell en domaine temporel, des plus anciennes différences finies (DFDT) basées sur le schéma de Yee, aux plus récentes éléments finis (EFDT) et Galerkin discontinu (GDDT). Nous nous intéressons à cette dernière famille de méthodes particulièrement bien adaptée à la prise en compte de maillages localement raffinés, permettant ainsi de traîter des géométries complexes.
L'efficacité de la méthode globale est conditionnée par le choix du schéma d'intégration en temps. Le plus souvent un schéma explicite est utilisé, la méthode résultante est alors stable sous une condition liée au plus petit élément du maillage considéré. Cette dernière peut s'avérer très contraignante dans le cas d'un raffinement local. Une alternative possible pour pallier la restriction du pas de temps est d'utiliser des méthodes d'intégration localement implicites. Un schéma implicite est appliqué à des sous-parties du maillage global (typiquement les zones où le maillage est raffiné) et un schéma explicite est utilisé partout ailleurs. Précisons que la proportion d'éléments fins par rapport aux éléments grossiers doit être suffisamment petite pour éviter un surcoût trop important (en terme de temps de calcul et d'occupation mémoire) dû à la résolution de systèmes linéaires à chaque itération en temps. Ce type de méthode implicite-explicite est donc particulièrement bien adapté pour des raffinements fortement localisés.
Nous nous intéressons ici à deux méthodes localement implicites, basées sur un schéma explicite du second ordre saute-mouton (LF2) et un schéma implicite du second ordre Crank-Nicolson (CN2). Une première méthode GDDT implicite-explicite CN2-LF2 a été proposée par Serge Piperno dans [2]. Une étude théorique de stabilité ainsi que des résultats numériques en 3D sont présentés dans [1]. Une seconde méthode d'intégration en temps localement implicite combinée avec une discrétisation en espace de forme générale a été proposée par Jan Verwer dans [3]. Les grandes similitudes entre les deux schémas, dans le cas d'une semi-discrétisation en espace par une méthode GD, nous ont conduit à une étude comparative. Les résultats numériques montrent un comportement de l'erreur différent, généralement en faveur de la méthode proposée par Jan Verwer. Nous avons alors conduit une étude théorique de convergence, le découpage implicite-explicite pouvant être à l'origine d'une réduction d'ordre pour la convergence temporelle, au sens des équations aux dérivées partielles (EDP). Dans [3], Jan Verwer a démontré que pour un raffinement du maillage simultané et stable en espace-temps, le second ordre de convergence, au sens des équations différentielles ordinaires (EDO), est conservé pour la solution exacte de l'EDP. Suivant le même modèle, nous avons récemment montré que la méthode proposée par Serge Piperno converge au moins au premier ordre et exhibé une condition suffisante pour assurer le second ordre.

Références

[1] V. Dolean, H. Fahs, L. Fezoui and S. Lanteri, *Locally implicit discontinuous Galerkin method for time domain electromagnetics*, J. Comput. Phys., 229 pp. 512-526, 2010.

[2] S. Piperno, *Symplectic local time-stepping in non-dissipative DGTD methods applied to wave propagation problem*, ESAIM: M2AN, Vol. 40 No. 5 pp. 815-841, 2006.

[3] J.G. Verwer, *Component splitting for semi-discrete Maxwell equations*, BIT Numer. Math., DOI 10.1007/s10543-010-0296-y, 2010.

Ludovic Moya, INRIA Sophia Antipolis - Méditerannée, équipe-projet Nachos, 2004 Route des Lucioles, BP 92, 06902 Sophia Antipolis Cedex
`ludovic.moya@inria.fr`