

Une classe de schémas naïfs pour les équations d'Euler

Jean-Claude LATCHÉ, Institut de Radioprotection et de Sûreté Nucléaire (IRSN)

Raphaèle HERBIN, Université d'Aix-Marseille

Walid KHERIJI, Institut de Radioprotection et de Sûreté Nucléaire (IRSN)

Tan-Trung NGUYEN, Institut de Radioprotection et de Sûreté Nucléaire (IRSN)

Bruno PIAR, Institut de Radioprotection et de Sûreté Nucléaire (IRSN)

Les travaux présentés ici s'inscrivent dans une démarche de construction de schémas pour les équations de Navier-Stokes compressibles (ou, pour un écoulement non-visqueux, Euler) satisfaisant les propriétés suivantes : préserver la positivité de la masse volumique et de l'énergie interne e , conserver l'intégrale de l'énergie totale sur l'ensemble du domaine et dégénérer naturellement vers des schémas stables usuels lorsque le nombre de Mach tend vers zéro.

Parmi les alternatives (formellement) possibles pour la troisième équation du système, nous choisissons le bilan d'énergie interne. Cette équation, comme le bilan de masse, est résolue par une méthode de volumes finis décentrés amont par rapport à la vitesse matérielle, ce qui garantit la positivité de e . La question que nous traitons ici est la suivante : est-il possible, moyennant éventuellement l'introduction d'un terme d'origine numérique noté S au second membre de cette équation, d'obtenir un schéma convergeant vers les solutions faibles "correctes" des équations d'Euler, c'est à dire celles satisfaisant la forme faible de l'équation de bilan de l'énergie totale, y compris en présence de chocs ?

Pour un schéma colocalisé, nous obtenons les résultats suivants :

- Une discrétisation volumes finis particulière de l'équation de bilan de quantité de mouvement permet de construire une équation de conservation pour l'énergie cinétique discrète, qui prend la forme d'un bilan conservatif plus deux termes de reste ; le premier, $R_{\partial t}$ est associé au terme de dérivée en temps, le second, R_{up} , est associé au terme convectif et n'est non nul que si ce terme est décentré amont.
- Ces termes de reste ne tendent vers zéro que pour des solutions régulières.
- $R_{\partial t}$ peut être compensé exactement au second membre de l'équation de bilan d'énergie interne (*i.e.* dans S) ; lorsque $R_{up} = 0$ (*i.e.* dans le cas centré), nous obtenons ainsi en sommant les bilans d'énergie cinétique et interne une équation de bilan conservative pour l'énergie totale.
- le terme R_{up} peut être partiellement compensé dans S , pour ne laisser au second membre de l'équation d'énergie totale qu'un terme tendant vers zéro au sens des distributions avec le pas d'espace.

Au final, avec S bien choisi, nous obtenons ainsi un schéma qui semble converger vers les solutions faibles correctes.

Pour un schéma à mailles décalées :

- l'équation d'énergie cinétique discrète est associée aux faces, tandis que l'équation d'énergie interne reste associée aux mailles primales ; on ne peut donc plus construire de bilan discret pour l'énergie totale.
- malgré tout, avec un terme S bien choisi, si l'on suppose que les solutions discrètes convergent, nous montrons que la limite satisfait la forme faible de l'équation de bilan d'énergie totale.

Associé à une marche en temps implicite ou de type correction de pression, nous obtenons alors un schéma qui semble posséder les propriétés recherchées (stabilité inconditionnelle et dégénérescence vers un schéma standard en incompressible).