Théorème d'Approximation Diffusion pour une EDP non linéaire : Application aux fibres optiques aléatoirement biréfringentes.

Maxime Gazeau, CMAP - Ecole Polytechnique

Anne de Bouard, CMAP - Ecole Polytechnique

Mots-clés : Théorème d'Approximation diffusion, Méthode de la fonction test perturbée, Système couplé d'équations de Schrodinger, Equation aux dérivées partielles stochastiques.

Deux physiciens ont établi dans [2] un système d'équations de NLS permettant de décrire l'évolution de la lumière dans une fibre optique en présence de dispersion modale de polarisation (PMD), induite par des variations aléatoires de la biréfringence. Ils ont également mis en évidence l'importance des différentes longueurs d'échelles présentes dans l'étude de ce problème. Ainsi en introduisant un petit paramètre $1 \gg \epsilon > 0$ on obtient l'évolution suivante pour les deux modes de polarisation $X_\epsilon = (X_{1,\epsilon}, X_{2,\epsilon})^t$:

$$i\frac{\partial X_\epsilon}{\partial t} + \frac{ib'}{\epsilon}\boldsymbol{\sigma}\left(\nu_\epsilon(t)\right)\frac{\partial X_\epsilon}{\partial x} + \frac{d_0}{2}\frac{\partial^2 X_\epsilon}{\partial x^2} + F_{\nu_\epsilon(t)}\left(X_\epsilon\right) = 0, \tag{1}$$

où $\boldsymbol{\sigma}\left(\nu_\epsilon(t)\right)$ décrit l'évolution aléatoire de la PMD linéaire (et en particulier le couplage entre les deux modes) et $F_{\nu_\epsilon(t)}\left(X_\epsilon\right)$ correspond à l'effet Kerr ainsi qu'à la PMD non linéaire aléatoire. Dans le cas d'ondes linéaires et sous de bonnes hypothèses d'ergodicité sur le processus directeur ν, Garnier et Marty [3] montrent un théorème limite permettant d'obtenir une équation de propagation effective sous la forme d'un système d'équations de Schrodinger linéaires stochastiques.

On s'est intéressé dans [1] à la généralisation du résultat précédent i.e on a montré que la solution X_ϵ de (1) converge en loi, lorsque ϵ tend vers 0, vers la solution X de l'EDP stochastique

$$idX(t) + \left(\frac{d_0}{2}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + F\left(X(t)\right)\right)dt + i\sqrt{\gamma}\sum_{k=1}^{3}\sigma_k\frac{\partial X}{\partial x} \circ dW_k(t) = 0, \tag{2}$$

où la fonction F se réduit à $F\left(X(t)\right) = \frac{8}{9}|X(t)|^2 X(t)$.

Pour montrer ce théorème limite, on a dû généraliser la méthode de la fonction test perturbée (voir [4]) à la dimension infinie. En effet la méthode utilisée dans [3] n'est pas applicable pour des EDP non linéaires et les résultats d'Approximation Diffusion existants pour des EDP non linéaires ont été montrés lorsque le processus directeur est de dimension 1 et que le processus solution est une fonction continue du bruit. L'intérêt de cette équation limite est que l'impact de la PMD linéaire sur le signal se réduit à un unique paramètre γ devant le mouvement brownien. L'étude numérique de l'équation (2) devrait permettre d'obtenir plus facilement des informations sur la dispersion du signal due à la PMD.

Références

[1] A. de Bouard, M. Gazeau, *A Diffusion Approximation theorem for a nonlinear PDE with application to random birefringent optical fibers.*, A paraitre, 2011.

[2] P.K.A. Wai and C.R. Menyuk, *Polarization Mode Dispersion, Decorrelation, and Diffusion in Optical Fibers with randomly Varying Birefringence*, Journal of Lightwave Tech., 14:148-157, 1996.

[3] J. Garnier and R. Marty, *Effective pulse dynamics in optical fibers with polarization mode dispersion*, Wave motion, 43:544-560, 2006.

[4] G. Papanicolaou, D. W. Stroock and S. R. S. Varadhan, *Martingale approach to some limit theorems*, Statistical Mechanics and Dynamical Systems, D. Ruelle, ed. Duke Turbulence Conf., Duke Univ. Math. Series III, Part IV, 1-120, 1976.

Maxime Gazeau, CMAP, CNRS UMR 7641, Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex, France.
`gazeau@cmap.polytechnique.fr`
Anne de Bouard, CMAP, CNRS UMR 7641, Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex, France.
`debouard@cmap.polytechnique.fr`