

Application de la méthode RRE aux problèmes de Navier-Stokes

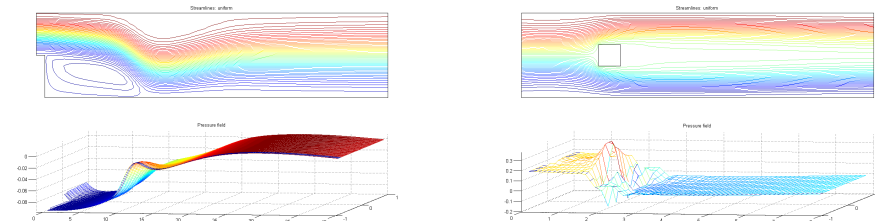
Sébastien DUMINIL, Université du Littoral Côte d'Opale

Mots-clés : Equations de Navier-Stokes, Méthode RRE, Méthode de Picard, Méthode de Newton
En mécanique des fluides, les équations de Navier-Stokes sont des équations aux dérivées partielles non-linéaires qui décrivent le mouvement des fluides dans l'approximation des milieux continus. Dans cet article, on considère les équations de Navier-Stokes pour des fluides incompressibles :

$$\begin{aligned} -\nu \nabla^2 \vec{u} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} + \nabla \vec{p} &= \vec{f}, \\ \nabla \cdot \vec{u} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

où \vec{u} représente la vitesse du fluide, \vec{p} représente la pression. La constante ν est un terme de viscosité. H. Elman, D. Silvester et A. Wathen ont résolu ces équations dans [2]. Ils ont montré que ce problème pouvait admettre, pour certaines conditions aux bords, des solutions non uniques. Ils utilisent les méthodes d'approximations par éléments finis, qui entraînent la résolution de systèmes d'équations non linéaires. Pour résoudre ces problèmes non linéaires, ils utilisent deux méthodes itératives : la méthode de Newton et la méthode de Picard. La méthode de Newton a un rayon de convergence assez petit, alors que la méthode de Picard a une convergence lente.

Les méthodes d'extrapolation vectorielle permettent d'accélérer la convergence des suites de vecteurs. Elle ont, en plus, la propriété de n'utiliser que quelques termes de la suite sans pour autant connaître la manière dont sont générées ces suites. On décide donc d'appliquer une de ces méthodes à notre suite formée par les itérations de Picard. Cette méthode est la méthode RRE (Reduced Rank Extrapolation) de Eddy [1] & Mesina [3]. Elle permet d'obtenir, sous certaines conditions, une convergence quadratique. Nous montrons, dans cet article, qu'en utilisant la méthode RRE, on obtient une meilleure convergence quelle que soit le vecteur initial choisi. Nos tests ont été réalisés sur deux exemples concrets : l'écoulement d'un fluide dans un conduit rectangulaire avec une extension soudaine et l'écoulement d'un fluide dans un conduit rectangulaire contenant un obstacle. Les figures ci-dessous montrent le phénomène observé dans ces deux cas. Dans chaque cas, la figure du haut représente les lignes de niveaux, celle du bas représente le comportement de la pression le long du conduit.



Références

- [1] R.P. EDDY, *Extrapolation to the limit of a vector sequence*, In P. C. C Wang, ed., Information Linkage Between Applied Mathematics and Industry (Academic Press, New-York,1979) 387-396.
- [2] H. ELMAN, D. SILVESTER, A. WATHEN, *Finite Elements and Fast Iterative Solvers : with applications in incompressible fluid dynamics*
- [3] M. MEŠINA, *Convergence acceleration for the iterative solution of $x=Ax+f$* , Comput. Methods Appl. Mech. Eng., 10 (2) (1977) 165-173.