

Un schéma volume finis "bien équilibré" pour les écoulements artériels 1 D

Olivier Delestre, d'Alembert

Pierre-Yves Lagrée, d'Alembert

Par analogie avec les développements récents dont ont bénéficié les "équations de Saint Venant" [1], nous examinons les équations de propagation du sang dans les artères. Il s'agit aussi d'un écoulement unidirectionnel moyenné sur l'épaisseur, le terme de pression étant non plus proportionnel à la variation de la hauteur d'eau mais au déplacement de l'artère, le terme de frottement étant quant à lui plutôt linéaire que quadratique.

On obtient de même un système hyperbolique de lois de conservations qui relie le flux Q aux variations de section de l'artère A par rapport à une section de référence au repos:

$$\begin{cases} \partial_t A + \partial_x Q = 0 \\ \partial_t Q + \partial_x \left[\frac{Q^2}{A} + \frac{k}{3\rho\sqrt{\pi}} A^{3/2} \right] = \frac{kA}{2\rho\sqrt{\pi}\sqrt{A_0}} \partial_x A_0 - C_f \frac{Q}{A}, \end{cases} \quad (1)$$

le coefficient k est la raideur de la paroi ($p = k(\sqrt{A/\pi} - \sqrt{A_0/\pi})$), et C_f est un coefficient de frottement dépendant de la viscosité.

On a proposé un schéma adapté aux propriétés du système: un schéma aux volumes finis "bien équilibré" préservant dans les artères l'analogie de l'équilibre du "lac au repos", que nous appelons équilibre de "l'homme au repos éternel". Le schéma est validé sur des cas tests semi analytiques (propagation d'ondes atténuées, traversée de discontinuités de sections).

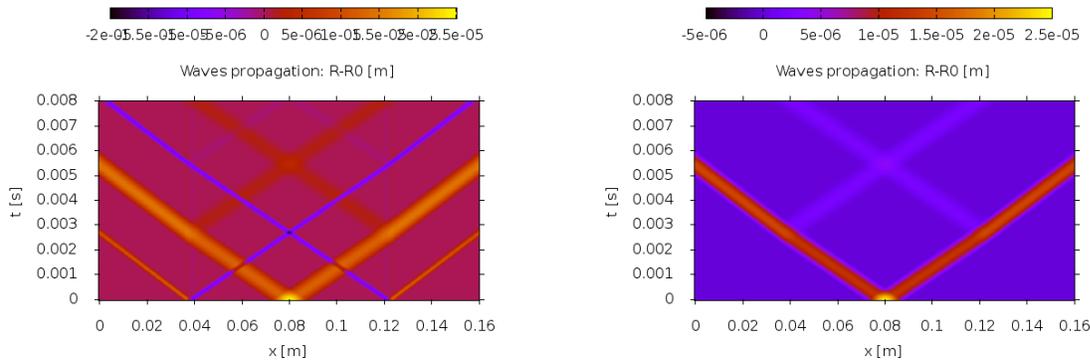


Figure 1: Un pulse initial est introduit dans un "anévrisme". A gauche, un schéma naïf produit des ondes parasites, tandis qu'un schéma bien équilibré, à droite, transmet et réfléchit le pulse conformément aux prédictions linéaires.

Ce travail a été financé par le projet ENDOCOM, du programme ANR TECSAN 2007.

Références

- [1] E. AUDUSSE, F. BOUCHUT, M.-O. BRISTEAU, R. KLEIN AND B. PERTHAME, *A fast and stable well-balanced scheme with hydrostatic reconstruction for shallow water flows*, SIAM J. Sci. Comput., 25(6):2050–2065, 2004.

Olivier Delestre, CNRS & UPMC Université Paris 06, UMR 7190, 4 place Jussieu, Institut Jean Le Rond d'Alembert, Boîte 162, F-75005 Paris, France

delestre@dalembert.upmc.fr

Pierre-Yves Lagrée, CNRS & UPMC Université Paris 06, d'Alembert

pierre-yves.lagree@upmc.fr