

# Modèle multi-water-bag et méthode des moments pour l'équation de Vlasov

**Anaïs CRESTETTO**, Université de Strasbourg & INRIA Nancy - Grand Est

**Philippe HELLUY**, Université de Strasbourg

Les modèles cinétiques, souvent utilisés en physique des plasmas, sont numériquement très lourds, car la fonction de distribution  $f$  dépend de la position  $x$ , de la vitesse  $v$  et du temps  $t$  (ce qui fait sept variables en 3 dimensions d'espace). On s'intéresse ici au système de Vlasov-Poisson en une dimension d'espace :

$$\partial_t f(x, v, t) + v \partial_x f(x, v, t) - E(x, t) \partial_v f(x, v, t) = 0, \quad \partial_x E(x, t) = 1 - \int f(x, v, t) dv,$$

où  $E$  est le champ électrique, avec une distribution initiale telle que la solution puisse devenir multi-valuée (des filaments apparaissent). On propose deux méthodes fluides pour réduire sa complexité.

D'une part, le modèle multi-water-bag, présenté dans [1], consiste à approcher la fonction de distribution par une fonction constante par morceaux en  $v$ . Soient  $N$  un entier,  $v_j^\pm(x, t)$  des vitesses,  $A_j$  des constantes,  $j = 1, \dots, N$ , tels qu'on puisse faire l'approximation :

$$f(x, v, t) = \sum_{j=1}^N A_j (H(v_j^+(x, t) - v) - H(v_j^-(x, t) - v)),$$

où  $H$  est la fonction de Heaviside. En reportant cette expression de  $f$  dans l'équation de Vlasov, on obtient un système d'équations de Burgers sur les  $v_j^\pm$ . Au lieu de faire évoluer  $f$ , on résout ces équations par un schéma de Godunov (par exemple), ce qui réduit la complexité des calculs.

D'autre part, on peut utiliser une autre méthode fluide : la méthode des moments présentée dans [2]. On définit le moment d'ordre  $k$  en la variable  $v$  d'une fonction  $f$  dépendant de  $v$  par :

$$M_k(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} v^k f(x, v, t) dv.$$

La méthode consiste à fixer un entier  $N$  et à prendre les  $2N$  premiers moments de l'équation de Vlasov. On obtient alors un système de  $2N$  équations à  $2N + 1$  inconnues (les  $M_k$ ,  $k = 0, \dots, 2N$ ), dans lequel la variable  $v$  n'intervient plus. Pour le résoudre on doit trouver une relation de fermeture. On l'obtient en choisissant une bonne approximation de  $f$ , par exemple celle du modèle water-bag qui nous donne une expression simple des moments de  $f$  en fonction des  $v_j^\pm$  :

$$M_k(x, t) = \sum_{j=1}^N A_j \frac{v_j^{+k+1}(x, t) - v_j^{-k+1}(x, t)}{k+1}, \quad \forall k = 0, \dots, 2N.$$

L'algorithme consiste alors à utiliser un schéma cinétique pour le système aux moments, puis à résoudre la relation de fermeture (calculer les  $v_j^\pm$  grâce aux moments) soit par une méthode itérative (Newton), soit par l'algorithme décrit dans [3] lorsqu'il peut s'appliquer (une condition sur les  $A_j$  doit être satisfaite).

On compare les résultats numériques obtenus par ces deux méthodes à ceux d'une méthode cinétique très utilisée pour le système de Vlasov-Poisson : la méthode PIC (Particle-In-Cell). Tant que la solution n'est pas multi-valuée, les deux méthodes fluides la décrivent précisément. Lorsqu'elle devient multi-valuée (elle filamente), des chocs apparaissent. Ces deux méthodes décrivent encore le cœur de la solution, mais ne donnent pas d'information sur les filaments.

## Références

- [1] BESSE, N., BERTHELIN, F., BRENIER, Y., BERTRAND, P., *The multi-water-bag equations for collisionless kinetic modeling*, Kinetic and Related Models **2**, 39–80 (2009)
- [2] FOX, R. O., LAURENT, F., MASSOT, M., *Numerical simulation of spray coalescence in an Eulerian framework: direct quadrature method of moments and multi-fluid method*, Journal of Computational Physics **227**, 3058–3088 (2008)
- [3] GOSSE, L. AND RUNBORG, O., *Resolution of the finite Markov moment problem*, Comptes Rendus Mathématique. Académie des Sciences. Paris **12**, 775–780 (2005)

**Anaïs CRESTETTO**, IRMA, Université de Strasbourg, 7 rue René Descartes, 67084 Strasbourg  
crestetto@math.unistra.fr

**Philippe HELLUY**, IRMA, Université de Strasbourg, 7 rue René Descartes, 67084 Strasbourg  
helluy@math.unistra.fr