Problèmes de variance en homogénéisation stochastique

Ronan COSTAOUEC, CERMICS, ENPC

Claude LE BRIS, CERMICS, ENPC

Frédéric LEGOLL, UR Navier, ENPC

La détermination des propriétés macroscopiques d'un matériau possédant à l'échelle microscopique une structure aléatoire est une question délicate, objet de la théorie mathématique de l'homogénéisation stochastique. Lorsqu'on s'intéresse à des opérateurs du type $-\mathrm{div}(A(\frac{\cdot}{\epsilon},\omega)\nabla)$, sous des hypothèses de stationnarité sur A, la définition de la matrice homogénéisée $A^\star$ nécessite la résolution préalable de problèmes dits des correcteurs. La différence majeure entre homogénéisation périodique et stochastique tient à ce que, dans le dernier cas, ces problèmes sont posés sur l'espace $\mathbb{R}^d$ tout entier et non plus sur une cellule de périodicité. En pratique, ils sont résolus numériquement sur un domaine tronqué $Q_N = [-N,N]^d$. On construit alors à partir de ces derniers une approximation convergente $A_N^\star$ de la matrice *déterministe* $A^\star$. Cependant, à N fixé, à cause de la troncature, $A_N^\star$ est désormais *aléatoire*.

Dans ce travail, nous examinons deux situations: le cas général, A stationnaire, et un cas faiblement stochastique, pour lequel A est une perturbation aléatoire d'un tenseur périodique $A_{\rm per}$. L'objectif n'est pas identique selon la situation. Dans le premier cas, il s'agit d'élaborer de méthodes de réduction de variance, permettant de calculer l'espérance de $A_N^\star$ avec une meilleure précision (i.e, un intervalle de confiance plus petit) à coût calcul constant. Dans le second cas, il s'agit de *contrôler* la variance d'une quantité.

Dans la première partie de cette communication, nous montrons comment appliquer la technique des variables antithétiques dans le cadre général de l'homogénéisation stochastique, et ce pour une grande variété de champs aléatoires $A(x,\omega)$. Cette méthode, générique, permet de réduire la variance, non seulement de $A_N^\star$, mais aussi d'autres quantités, comme expliqué dans [1, 2]. Des résultats numériques illustreront son efficacité (cf aussi [3]), et des éléments de preuve, expliquant la réduction de variance, seront apportés. Enfin, des pistes pour aller plus loin seront proposées.

Dans la seconde partie de cette communication, nous nous intéressons au cas où la matrice $A = A_\eta$ s'écrit comme une perturbation (de taille η) d'une matrice périodique sous-jacente. Dans ce cas, $A^\star$, quantité déterministe, possède un développement limité $A^\star = A_0^\star + \eta A_1^\star + O(\eta^2)$, déterministe en la variable η. Par contre, du fait de la troncature, $A_N^\star$ est aléatoire, ainsi que son développement en η. Or, dans un contexte numérique, la validité de l'approximation d'ordre un en η dépend du contrôle du terme d'ordre 2 dans le développement de $A_N^\star$. Nous présentons les résultats issus de [4] qui précisent sous quelles hypothèses on dispose d'un tel contrôle.

Références

[1] R. Costaouec, C. Le Bris et F. Legoll, *Variance reduction in stochastic homogenization: proof of concept, using antithetic variables*, Boletin Soc. Esp. Mat. Apl., vol. 50, 9-27, 2010.

[2] X. Blanc, R. Costaouec, C. Le Bris, et F. Legoll, *Variance reduction in stochastic homogenization using antithetic variables*, Markov Processes and Related Fields, à paraître.

[3] X. Blanc, R. Costaouec, C. Le Bris et F. Legoll, *Variance reduction in stochastic homogenization: the technique of antithetic variables*, soumis.

[4] R. Costaouec, *Asymptotic expansion of the homogenized matrix in two weakly stochastic homogenization settings*, arXiv:1102.3804v1.

Ronan COSTAOUEC, École Nationale des Ponts et Chaussées, 6 & 8 avenue Blaise Pascal, 77455 Marne-La-Vallée
costaour@cermics.enpc.fr
Claude LE BRIS, École Nationale des Ponts et Chaussées, 6 & 8 avenue Blaise Pascal, 77455 Marne-La-Vallée
lebris@cermics.enpc.fr
Frédéric LEGOLL, École Nationale des Ponts et Chaussées, 6 & 8 avenue Blaise Pascal, 77455 Marne-La-Vallée
legoll@lami.enpc.fr