Moyennisation d'EPDS: ordre fort et ordre faible

Charles-Edouard BREHIER, ENS de Cachan, Antenne de Bretagne / Université Rennes 1

On considère un système de réaction-diffusion pouvant s'écrire

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^\epsilon(t,\xi)}{\partial t} &= \frac{\partial^2 x^\epsilon(t,\xi)}{\partial \xi^2} + f(\xi, x^\epsilon(t,\xi), y^\epsilon(t,\xi)) \\ \frac{\partial y^\epsilon(t,\xi)}{\partial t} &= \frac{1}{\epsilon}\frac{\partial^2 y^\epsilon(t,\xi)}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\epsilon} g(\xi, x^\epsilon(t,\xi), y^\epsilon(t,\xi)) + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\frac{\partial \omega(t,\xi)}{\partial t}, \end{aligned} \tag{1}$$

pour $t \geq 0$, $\xi \in (0,1)$, avec conditions initiales données et conditions au bord de Dirichlet.
Ce système est perturbé par un bruit blanc en temps et en espace, et présente des évolutions à deux échelles de temps différentes.
Quand le paramètre ϵ tend vers 0, sous des hypothèses de dissipativité de l'équation rapide, on montre que la composante lente x^ϵ est bien approximée par la solution d'une équation d'évolution dite moyennée, construite en moyennant la nonlinéarité f par rapport à l'unique mesure invariante de l'équation rapide.
Ce principe de moyennisation, prouvé dans [3] peut être quantifié, en montrant dans [1] que l'erreur par rapport à ϵ est d'ordre $1/2$ dans un sens fort (approximation des trajectoires), et 1 dans un sens faible (approximation des lois de probabilités).
Ce principe peut être mis à profit pour construire une méthode numérique multi-échelle (sur le même modèle que dans [4]) permettant d'approcher x^ϵ via un schéma d'Euler implicite. L'approximation est aussi étudiée au sens fort et faible, dans [2]. L'efficacité du schéma peut être comparée avec celle d'une méthode directe, où un pas de temps trs petit doit tre utilisé pour compenser le facteur $1/\epsilon$ dans l'équation rapide.
On expliquera comment les méthodes et résultats connus dans le cas des EDS se généralisent au cas des EDPS tudiées ici, en insistant sur les difficultés apparaissant en dimension infinie.
Il s'agit d'un travail effectué dans le cadre d'une thèse, sous la direction d'Erwan Faou et Arnaud Debussche (ENS de Cachan, Antenne de Bretagne / Université Rennes 1).

Références

[1] C.-E. BREHIER, *Strong and weak order in averaging for SPDES*, en préparation.

[2] C.-E. BREHIER, *A HMM scheme for SPDES*, en préparation.

[3] S. Cerrai, M. Freidlin, *Averaging principle for a class of SPDE's*, Probabability Theory & Related Fields 144, n°1 − 2, 2009.

[4] E, D. Liu, E. Vanden-Eijnden, *Analysis of Multiscale Methods for Stochastic Differential Equations*, Communications on Pure and Applied Mathematics Vol. 000, 00010048, 2005.

Charles-Edouard BREHIER, ENS de Cachan, Antenne de Bretagne, avenue Robert Schuman, 35170 Bruz /IRMAR, Université de Rennes 1, 263 avenue du Général Leclerc, 35000 Rennes
`charles-edouard.brehier@bretagne.ens-cachan.fr`