Schéma de volumes finis hybrides pour un écoulement diphasique, immiscible et incompressible

Konstantin BRENNER, Université Paris-Sud 11

On considère un écoulement diphasique en milieu poreux, qui est décrit par les équations de conservation de masse de chaque phase α

$$\phi\partial_t s_\alpha + \nabla \cdot q_\alpha = 0 \tag{1}$$

et la loi de Darcy-Muskat

$$q_\alpha = -\mathbf{K}\lambda_\alpha(s_\alpha)(\nabla p_\alpha - \rho_\alpha \mathbf{g})) = 0, \tag{2}$$

avec $\alpha = \{o, w\}$ où l'indice w représente la phase eau et où o représente la phase huile. Chaque phase a sa propre saturation s_α ansi que sa pression p_α, $\mathbf{K}$ est un tenseur de perméabilité absolue, λ_α est la perméabilité relative de la phase α et satisfait $\lambda_\alpha(0) = 0$, ρ_α est la masse volumique de la phase α et $\mathbf{g}$ la gravité. En supposant que le milieu poreux est saturé on obtient

$$s_o + s_w = 1, \tag{3}$$

et on note $s = s_o$. On suppose également que les pressions de l'huile et de l'eau sont liées par la loi de pression capillaire

$$p_o - p_w = \pi(s), \tag{4}$$

où π est une fonction strictement croissante sur $(0, 1)$. Si la phase α est absente ($s_\alpha = 0$), alors $\lambda_\alpha(s_\alpha) = 0$ et la pression p_α n'est pas définie. C'est une motivation (cf. [2]) pour réécrire le problème (1)-(4) sous la forme

$$\omega\partial_t s + \nabla \cdot (\mathbf{u}f(s) + \gamma(s)\mathbf{g}) - \nabla \cdot (\mathbf{K}\nabla\varphi(s)) = 0, \tag{5}$$

$$-\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \tag{6}$$

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}(\lambda(s)\nabla p - \xi(s)\mathbf{g}), \tag{7}$$

où la pression globale p joue le rôle d'une pression moyenne. On remarque que la première équation est parabolique dégénérée en la saturation s, tandis que la deuxième équation, que l'on obtient en combinant les équations (6) et (7), est uniformément elliptique en la pression p. La dégénérescence de l'équation en saturation est liée au fait que la dérivée de la fonction φ s'annule en un nombre fini de valeurs.

Nous proposons un schéma de volumes finis implicite en temps qui permet la discrétisation du problème (5)-(7), où le tenseur de perméabilité $\mathbf{K}$ est anisotrope et inhomogène, sur des maillages tridimensionnels très généraux. On utilise un schéma de type Godunov pour la discrétisation des termes de convection non linéaires, tandis que la discrétisation des opérateurs de diffusion s'appuie sur une méthode de volumes finis sur maillages quelconques introduite récemment par [3] et [1]. On démontre la convergence du schéma numérique en supposant que la fonction réciproque de φ est Höldérienne. Les essais numériques montrent la robustesse du schéma par rapport aux anisotropies et hétérogénités du tenseur de perméabilité $\mathbf{K}$, ansi que par rapport au choix du maillage.

Références

[1] O. Angelini, K. Brenner, D. Hilhorst, *A finite volume method on general meshes for a degenerate parabolic convection-reaction-diffusion equation*, to appear.

[2] G. Chavent, J. Jaffré, *Mathematical Models and Finite Elements for Reservoir Simulation*, Studies in Mathematics and its applications, 1986.

[3] R. Eymard, T. Gallouët, R. Herbin, *Discretization of heterogeneous and anisotropic diffusion problems on general nonconforming meshes SUSHI: a scheme using stabilization and hybrid interfaces*, to appear in IMA J. of Num. Anal.

Konstantin BRENNER, Université Paris-Sud 11, 91405 Orsay Cedex
`konstantin.brenner@math.u-psud.fr`