Un théorème de Noether discret fractionnaire dans le cadre des plongements discrets

Loïc BOURDIN, LMA, UPPA

La théorie des plongements de systèmes dynamiques est initiée par Cresson et Darses dans [4]. Une revue du sujet est donnée dans [5]. Un plongement d'une EDO ou d'une EDP est un moyen de donner un sens à cette équation sur un ensemble plus large de solutions. Par exemple, les plongements stochastiques développés dans [4] permettent de donner un sens à une équation différentielle sur l'ensemble des processus stochastiques. Certaines propriétés des équations, comme des symétries ou des conservations d'énergie, donnent des informations sur la dynamique des systèmes. Il est donc important de conserver ces structures par plongement.

Les systèmes Lagrangiens couvrent un large ensemble de comportements dynamiques et sont largement utilisés en mécanique classique. Ces systèmes possèdent une structure variationnelle appelée structure Lagrangienne, i.e. leurs solutions correspondent aux points critiques de fonctionnelles Lagrangiennes. La structure Lagrangienne est intrinsèque et induit de fortes contraintes sur le comportement qualitatif des solutions. Sa conservation par plongement est donc importante. Dans [4], les auteurs construisent des plongements stochastiques qui préservent cette structure variationnelle, i.e. les solutions généralisées peuvent être aussi caractérisées comme point critiques de fonctionnelles Lagrangiennes généralisées.

Nous nous plaçons dans le cadre des plongements discrets introduit dans [3]. Un plongement discret est une procédure algébrique qui, à une équation différentielle donnée, associe un schéma numérique. Comme dans [4], nous obtenons la conservation au niveau discret de la structure variationnelle des systèmes Lagrangiens classiques et des systèmes Lagrangiens fractionnaires initiés dans [1]. Nous retrouvons en particulier la théorie des intégrateurs variationnels, [7]. Enfin, d'autres propriétés, telle que l'existence d'une constante de mouvement via le théorème de Noether [8], se plongent alors naturellement au niveau discret dans le cas classique.

Plusieurs études ont été menées autour de la formulation d'un théorème de Noether fractionnaire, [2], [6]. Cependant, ces formulations ne semblent pas satisfaisantes puisqu'elles ne fournissent pas explicitement d'intégrales premières. Nous proposons alors un théorème de Noether discret fractionnaire espérant qu'il corresponde au plongement discret d'une version continue encore hypothétique.

Références

[1] O.P. Agrawal, *Formulation of Euler-Lagrange equations for fractional variational problems*, J. Math. Anal. Appl., 272(1):368-379, 2002.

[2] T.M. Atanacković, S. Konjik, S. Pilipović, S. Simić, *Variational problems with fractional derivatives: invariance conditions and Noether's theorem*, Nonlinear Anal., 71(5-6):1504-1517, 2009.

[3] L. Bourdin, J. Cresson, I. Greff, P. Inizan, *Variational integrators on fractional Lagrangian systems in the framework of discrete embeddings*, preprint arXiv:1103.0465v1 [math.DS], 2011.

[4] J. Cresson, S. Darses, *Stochastic embedding of dynamical systems*, J. Math. Phys., 48(7):072703, 2007.

[5] J. Cresson, *Introduction to embedding of Lagrangian systems*, International Journal for biomathematics and biostatistics, 1(1):23-31, 2010.

[6] G.S.F. Frederico, D.F.M. Torres, *Fractional Noether's theorem in the Riesz-Caputo sense*, Appl. Math. Comput., 217(3):1023-1033, 2010.

[7] J.E. Marsden, M. West, *Discrete mechanics and variational integrators*, Acta Numer., 10:357-514, 2001.

[8] E. Noether, *Invariant variation problems*, Transport Theory Statist. Phys., 1(3):186-207, 1971.

Loïc BOURDIN, LMA, Université de Pau et des Pays de l'Adour, BP 1155, 64013 Pau Cédex
`bourdin.l@etud.univ-pau.fr`