Un schéma numérique fluide pour les gaz sans pression

Laurent BOUDIN, UPMC & INRIA

Julien MATHIAUD, CEA & ENS Cachan

Mots-clés : équations d'Euler, gaz sans pression, condition d'Oleinik, viscosité

Le système des gaz sans pression a été l'objet de nombreux travaux depuis [1]. Il apparaît par exemple comme un modèle simplifié de dynamique des galaxies et dans l'étude des plasmas froids. Pour $T > 0$, la densité du gaz $\rho(t, x) \geq 0$ et la quantité de mouvement $q(t, x) \in \mathbb{R}$ sont solutions des équations suivantes, dans $]0, T[\times\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \partial_x(\rho u) &= 0, \\ \partial_t q + \partial_x(qu) &= 0, \end{aligned}$$

qui constituent toutes deux des lois de conservation, l'une pour la masse, l'autre pour la quantité de mouvement. La vitesse $u(t, x) \in \mathbb{R}$ intervenant dans l'expression des flux doit être définie comme un quotient de q par ρ, mais cela n'est pas forcément possible, puisque ρ peut s'annuler. Ce système a été largement étudié, notamment dans [2], où est pointée l'importance de la condition OSL (*one-sided Lipschitz*), appelée aussi condition d'Oleinik : $\partial_x u \leq 1/t$.
L'objet de ce travail est donc la discrétisation du système des gaz sans pression [4]. On constatera d'abord que le schéma décentré amont pour ρ et q, classiquement utilisé pour les lois de conservation, ne fournit pas la solution des gaz sans pression, car la vitesse u, construite comme q/ρ, peut ne pas vérifier la condition d'Oleinik. On présentera alors un schéma numérique fondé sur le système des gaz sans pression avec viscosité [3], écrit dans sa formulation en ρ, u et préservant, entre autres, la condition d'Oleinik discrète, pour des raisons structurelles, voir [5].

Références

[1] F. Bouchut, *On zero pressure gas dynamics*, in *Advances in kinetic theory and computing*, volume 22 of *Ser. Adv. Math. Appl. Sci.*, pp.171–190. World Sci. Publ., 1994.

[2] F. Bouchut, F. James, *Duality solutions for pressureless gases, monotone scalar conservation laws, and uniqueness*, *Comm. Partial Differential Equations*, 24(11-12):2173–2189, 1999.

[3] L. Boudin, *A solution with bounded expansion rate to the model of viscous pressureless gases*, *SIAM J. Math. Anal.*, 32(1):172–193, 2000.

[4] L. Boudin, J. Mathiaud, *A numerical scheme for the one-dimensional pressureless gases system*, accepté pour publication dans *Numer. Methods Partial Differential Equations*, 2011.

[5] Y. Brenier and S. Osher, *The discrete one-sided Lipschitz condition for convex scalar conservation laws*, *SIAM J. Numer. Anal.*, 25(1):8–23, 1988.

Laurent BOUDIN, UPMC Univ Paris 06, UMR 7598 LJLL, Paris, F-75005, France & INRIA Paris-Rocquencourt, REO Project team, BP 105, F-78153 Le Chesnay Cedex, France
`laurent.boudin@upmc.fr`
Julien MATHIAUD, CEA, DAM, DIF, F-91297 Arpajon, France & CMLA, ENS Cachan, CNRS, UniverSud, 61 Avenue du Président Wilson, F-94230 Cachan, France
`mathiaud@cmla.ens-cachan.fr`