Formule d'Eyring-Kramers pour un type d'équations aux dérivées partielles stochastiques parabolique et semi-linéaire

Florent BARRET, École Polytechnique

Le type d'EDPS qui nous intéresse est le suivant :

$$\partial_t u^\varepsilon(x,t) = \gamma \partial_x^2 u^\varepsilon(x,t) - V'(u^\varepsilon(x,t)) + \sqrt{2\varepsilon} W \quad \forall (x,t) \in [0,1] \times \mathbb{R}^+ \tag{1}$$

avec des conditions au bord soit de Dirichlet, soit Von Neumann, soit périodiques. γ et ε sont des paramètres strictement positifs. W est un bruit blanc en espace et en temps. La fonction V vérifie des hypothèses générales de régularité, de convexité à l'infini, de non dégénérescence (pour $V(u) = u^4 - u^2$ on obtient l'équation de Ginzburg-Landau). Cette équation peut être vue comme la perturbation aléatoire d'un flot de gradient en dimension infinie

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t,x) = -\frac{\delta S}{\delta \phi}(u^\varepsilon)(x,t) + \sqrt{2\varepsilon} W \qquad \text{avec} \qquad S(\phi) = \int_0^1 \left[\frac{\gamma}{2}\phi'(x)^2 + V(\phi(x))\right] \mathrm{d}x \tag{2}$$

où S est une fonctionnelle (l'action).

L'action S peut avoir de multiples minima, les états métastables, points d'équilibre stable de notre système sans la perturbation stochastique. À cause de l'aléa, le système peut changer d'équilibre et il se produit une transition. Le temps de transition suit, dans l'asymptotique du bruit faible ($\varepsilon \to 0$), une loi exponentielle [3]. La formule d'Eyring-Kramers donne une asymptotique précise de l'espérance du temps de transition. Cette formule est démontrée pour les diffusions en dimensions finies [2].

Pour simplifier on esquisse le cas où l'action S a seulement trois points stationnaires, deux, ϕ^- et ϕ^+, sont des minima avec $S(\phi^-) < S(\phi^+)$, et le troisième, $\hat{\phi}$, est un point selle de degré un (la linéarisation de $\frac{\delta S}{\delta u}(\hat{\phi})$ a une unique valeur propre strictement négative). Dans ce cadre, notre résultat donne :

$$\mathbb{E}_{\phi^+}\left[\tau^\varepsilon(B_{\phi^-})\right] = \frac{1}{\left|\lambda^-(\hat{\phi})\right|}\sqrt{\left|\frac{\mathrm{Det} L_{\hat{\phi}}}{\mathrm{Det} L_{\phi^+}}\right|} e^{\Delta S/\varepsilon}\left(1 + \Psi(\varepsilon)\right) \tag{3}$$

où $\Psi(\varepsilon) = o(1)$ et $\tau^\varepsilon(B_{\phi^-}) = \inf\left\{t > 0, u^\varepsilon(t) \in B_{\phi^-}\right\}$, B_{ϕ^-} une boule de centre ϕ^- suffisamment petite.

On a noté les quantité suivantes :

1. $\Delta S = S(\hat{\phi}) - S(\phi^+)$ est la différence d'action à franchir pour aller de ϕ^+ à ϕ^-.
2. L_ϕ désigne la Hessienne de l'action S au point ϕ, c'est un opérateur de Sturm-Liouville. Le rapport des déterminants est défini en utilisant les valeurs propres : $\frac{\mathrm{Det} L_{\hat{\phi}}}{\mathrm{Det} L_{\phi^+}} = \prod_{k \geq 1} \frac{\lambda_k(\hat{\phi})}{\lambda_k(\phi^+)}$.
3. $\lambda^-(\hat{\phi})$ l'unique valeur propre négative de $L_{\hat{\phi}}$.

La preuve repose principalement sur une approximation par différence finie en espace de l'EDPS. Nous obtenons donc un système d'équations différentielles stochastiques auquel nous pouvons appliquer les estimations obtenues par [2]. La principale difficulté réside dans le fait d'obtenir des estimations avec des erreurs qui ne dépendent pas de la dimension (égale au nombre de points de discrétisation). Une partie a déjà été publiée dans [1] dans le cas des conditions au bord de Dirichlet.

Références

[1] Florent Barret, Anton Bovier and Sylvie Méléard, *Uniform estimates for metastable transition times in a coupled bistable system*, Electron. J. Probab., 15, 323–345, 2010.

[2] Anton Bovier, Michael Eckhoff, Véronique Gayrard and Markus Klein, *Metastability in reversible diffusion processes. I. Sharp asymptotics for capacities and exit times*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS),6(4),399–424,2004.

[3] Fabio Martinelli, Enzo Olivieri and Elisabetta Scoppola, *Small random perturbations of finite- and infinite-dimensional dynamical systems: unpredictability of exit times*, J. Statist. Phys., 55, 477–504,1989.

Florent BARRET, CMAP, École Polytechnique, Route de Saclay, 91128 Palaiseau
barret@cmap.polytechnique.fr