Formes différentielles discrètisées par des B-Splines. Applications aux équations de Maxwell.

Aurore BACK, IRMA, CNRS and Université de Strasbourg

Éric SONNENDRÜCKER, IRMA, CNRS and Université de Strasbourg

Mots-clés : Formes différentielles discrètes, B-splines, Maxwell, Simulation numérique

Les équations de la physique sont des modèles mathématiques qui mettent en relation des objets géométriques. Il y a de nombreuses méthodes pour discrètiser des équations mais peu préservent la nature physique des différents objets qui les constituent. Afin de respecter la nature géométrique de la physique, il est nécessaire de changer de point de vue et d'utiliser la géométrie différentielle, également pour l'étude numérique. Les opérateurs comme la divergence, le rotationnel, le gradient sont remplacés par la dérivée extérieure d. Celle-ci agit sur une k-forme différentielle et produit une $(k+1)$-forme différentielle. Le théorème fondamental de l'analyse, le théorème de Green, le théorème de Stokes et la cohomologie de De Rham sont également définis en géométrie différentielle. Le premier à utiliser ce point de vue afin de discrètiser des équations est Alain Bossavit [2]. Il utilisa les élèments de Whitney [3] pour discrètiser les formes différentielles et par la suite, discrètiser les équations de Maxwell dans le langage de la géométrie différentielle. Depuis, il y a eu de nombreux articles sur ce sujet car beaucoup de problèmes sont apparus tels que la discrètisation de l'opérateur Hodge Star [11, 12, 6] (une importante notion qui contient toute la métrique du domaine), et l'interpolation des formes différentielles [10, 2, 3, 8]. Jusqu' à présent, les fonctions de bases utilisées pour l'interpolation sont les formes de Whitney. On propose donc de définir une nouvelle classe de formes différentielles discrètes utilisant les B-Splines [1]. Cette nouvelle approche apporte beaucoup d'avantages. Premièrement, elle permet de d'obtenir une approximation d'ordre élevé. Les B-splines de degré élevé sont calculées par récurrence à l'aide de l'algorithme de Boor [7] dont l'implémentation est facile et efficace. Deuxièment, il suffit de définir les formes différentielles discrètes dans le cas unidimensionnel pour les obtenir dans le cas $3D$ en utilisant le produit tensoriel. D'autre part, les formes différentielles discrètes obtenues vérifient les mêmes propriétés que les formes différentielles 'continues', en particulier le diagramme de De Rham. De plus, nos formes différentielles discrètes sont naturellement reliées aux élèments finis basés sur les B-splines qui apparaissent en analyse isogéométrique [4, 5].

On rappelera la construction des B-splines et leurs propriétés [7] puis on expliquera la construction des formes différentielles discrètes basées sur des B-splines. Pour discrètiser l'opérateur Hodge Star, on choisira d'adapter la technique de T. Tarhasaari, L. Kettunen et A. Bossavit [12] dans le cas des B-splines. On montrera la cohérence des formes différentielles discrètes basées sur des B-splines ainsi que la préservation du diagramme de De Rham discret. Finalement, on appliquera cette théorie aux équations de Maxwell avec des conditions aux bords périodiques et des conditions aux bords de type conducteur parfait. D'autre part, puisque ce point de vue est lagrangien, i.e. qu'il n'y a pas de référence à un système de coordonnées, la construction du schéma numérique reste valide dans le cas d'une déformation continue. Donc, on résoudra Maxwell dans le cas d'un changement de variables sur un maillage non uniforme avec des conditions aux bords de type conducteur parfait.

Références

[1] A. Back et E. Sonnendrücker, Spline discrete differential forms. Application to Maxwell' s equations. *http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00568811/fr/ ,2011*

[2] A. Bossavit, Computational electromagnetism, Academic Press (Boston), 1998.

[3] A. Bossavit, Generating Whitney Forms of Polynomial Degree One and High, IEEE Trans. on Magnetics (2002), 341–344.

[4] A. Buffa and G. Sangalli and R. Vazquez, Isogeometric analysis in electromagnetics: B-splines approximation, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 199 (2010), no. 17-20, 1143–1152

[5] A. Ratnani and E. Sonnendrücker, Arbitrary High-Order Spline Finite Element Solver for the Time Domain Maxwell equations, *http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00507758/fr, 2010.*

[6] B. He and F. L. Teixeira, Geometric finite element discretization of Maxwell equations in primal and dual spaces, Physics Letters. A 349, no. 1-4 (2006), 1–14.

[7] C. de Boor, A practical guide to splines, Revised edition. Applied Mathematical Sciences, 27. Springer-Verlag, New York, 2001.

[8] F. Rapetti and A. Bossavit, Whitney forms of higher degree, SIAM J. Numer. Anal. 47 no. 3 (2009), 2369–2386.

[9] M. Desbrun, E. Kanso and Y. Tong , Discrete differential forms for computational modeling, Oberwolfach Semin. (2008), 287–324.

[10] R. Hiptmair, Finite elements in computational electromagnetism. Acta Numerica 11 (2002), 237–339.

[11] R. Hiptmair, Discrete Hodge operators. Numer. Math. 90 (2001), 265–289.

[12] T. Tarhasaari, L. Kettunen and A. Bossavit. Some realizations of a discrete Hodge: A reinterpretation of finite element techniques, IEEE Trans. Magnetics 35 (1999), 1494–1497.

[13] V.I. Arnold, Mathematical methods of classical mechanics, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1976.

Aurore BACK, 7 rue ren Descartes 67000 STRASBOURG
`aurore.back@math.unistra.fr`
Éric SONNENDRÜCKER, 7 rue ren Descartes 67000 STRASBOURG
`sonnen@unistra.fr`