# Résolution d'un problème inverse de Cauchy en théorie des plaques minces

**Azariel Paul EYIMI MINTO'O**, Université de Poitiers

**Mots-clés :** Problèmes inverses, problèmes mal posés, problèmes aux limites elliptiques.

Soit $\Omega$ un domaine borné de $\mathbb{R}^2$, de frontière $\Gamma = \Gamma_d \cup \Gamma_i$. Soient $\varphi_d$ et $\psi_d$ deux fonctions données sur $\Gamma_d$ (aucune information n'est fournie sur $\Gamma_i$). A.Cimetière et al. [1] ont introduit la méthode inverse dite de régularisation évanescente pour résoudre le problème inverse de Cauchy suivant pour le laplacien:

$$\left\{ \begin{array}{rccc} \Delta u = & 0 & \text{dans} & \Omega \\ u = & \varphi_d & \text{sur} & \Gamma_d \\ \frac{\partial u}{\partial n} = & \psi_d & \text{sur} & \Gamma_d \end{array} \right. \tag{1}$$

où $n$ est le vecteur unitaire normal extérieur à $\Gamma$. La méthode de régularisation évanescente consiste à remplacer le problème (1), mal posé au sens d'Hadamard, par une suite de problèmes d'optimisation bien posés, dépendant d'un paramètre de régularisation dont l'effet perturbateur diminue au cours des itérations. Dans le cas continu et pour des données $\varphi_d$ et $\psi_d$ compatibles sur $\Gamma_d$, est établie dans [1] la convergence du processus itératif vers la solution du problème de Cauchy. Le but de notre travail est d'étendre la méthode de regularisation évanescente au problème inverse de Cauchy pour le bilaplacien:

$$\left\{ \begin{array}{rclrcll} D\Delta^2\zeta & = & f & & & & \text{dans } \Omega \\ \zeta & = & \rho_d, & \frac{\partial \zeta}{\partial n} & = & \beta_d & \text{sur } \Gamma_d \\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial n^2} & = & \mu_d, & \frac{\partial^3 \zeta}{\partial n^3} & = & \phi_d & \text{sur } \Gamma_d \end{array} \right. \tag{2}$$

où $\zeta$ représente la déflexion verticale d'une plaque mince, $f$ la charge à laquelle la plaque est soumise, $D = Eh^3/(12(1-\nu^2))$ la rigidité à la flexion (dépendant du coefficient de Poisson $\nu$ du matériau dont est constituée la plaque, du module de Young $E$ et de l'épaisseur $h$ de la plaque), $\frac{\partial^i \zeta}{\partial n^i}$ représente, pour $i = 0, ..., 3$, la trace d'ordre $i$ de $\zeta$, $\rho_d$, $\beta_d$, $\mu_d$ et $\phi_d$ sont des données compatibles sur $\Gamma_d$, et où $\mu_d$ et $\phi_d$ sont reliées aux grandeurs physiques par les relations suivantes:

$$\mu_d = D'\xi_d - \nu\Big(\frac{\partial^2 \rho_d}{\partial \tau^2} + \frac{\beta_d}{R}\Big) \ , \quad D' = 1/D \tag{3}$$

$$\phi_d = -D'\Big(\gamma_d + \frac{\xi_d}{R}\Big) - (2-\nu)\frac{\partial}{\partial \tau}\Big(\frac{\partial \beta_d}{\partial \tau} - \frac{1}{R}\frac{\partial \rho_d}{\partial \tau}\Big) + \frac{(\nu+1)}{R}\Big(\frac{\partial^2 \rho_d}{\partial \tau^2} + \frac{\beta_d}{R}\Big) \tag{4}$$

Ci-dessus, $R$ désigne le rayon de courbure de la plaque, $\tau$ le vecteur unitaire de la tangente au bord, $\xi_d$ le moment de flexion et $\gamma_d$ l'effort tranchant de la plaque imposés sur la partie $\Gamma_d$. L'objectif est de rechercher sur toute la frontière $\Gamma$, les traces $\zeta$, $\frac{\partial \zeta}{\partial n}$, $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial n^2}$, $\frac{\partial^3 \zeta}{\partial n^3}$ de la fonction $\zeta$ caractérisée par (2). D'abord, nous étendons les résultats de convergence de [1] au cas du bilaplacien. Ensuite, nous factorisons le problème (2) en deux problèmes de Cauchy de type (1). Enfin, en s'appuyant sur la factorisation de (2), on construit une stratégie numérique pour rédoudre le problème (2) et on établit un résultat de convergence lorsque le pas du maillage tend vers zéro.

## Références

[1] A. Cimetière, F.Delvare, M.Jaoua and F.Pons, *Solution of the Cauchy problème using iterated Tikhonov regularization*, Inverse problems, 2001.

**Azariel Paul EYIMI MINTO'O**, LMA, Université de Poitiers, Téléport 2 Boulevard Marie et Pierre Curie, BP 30179, 86962 Futuroscope Chasseneuil cedex
`Azariel.Eyimi.Mintoo@math.univ-poitiers.fr`
**Alain CIMETIERE**, PhyMat, Université de Poitiers, Téléport 2 Boulevard Marie et Pierre Curie SP2MI, BP 30179, F-86962 Futuroscope Chasseneuil Cedex
`alain.cimetiere@univ-poitiers.fr`
**Alain MIRANVILLE**, LMA, Université de Poitiers, Téléport 2 Boulevard Marie et Pierre Curie, BP 30179, 86962 Futuroscope Chasseneuil cedex
`alain.miranville@math.univ-poitiers.fr`