

# Existence de solutions à support compact pour un problème quasilineaire singulier

Paul SAUVY, Université de Pau et des Pays de l'Adour

Soit  $\Omega$  un domaine borné de classe  $\mathcal{C}^2$  de  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 2$ . On considère le problème quasi-linéaire elliptique suivant :

$$(\mathcal{P}_\lambda) \begin{cases} -\Delta_p u = K(x)(\lambda u^q - u^r), & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \quad u \geq 0 \quad \text{in } \Omega, \end{cases}$$

où  $p > 1$  et  $\Delta_p u \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$  est l'opérateur  $p$ -Laplacien.

Dans ce modèle,  $\lambda > 0$  est un paramètre réel, les exposants  $q$  et  $r$  satisfont  $-1 < r < q < p - 1$  et  $K : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction positive présentant un caractère singulier au voisinage de la frontière du domaine  $\partial\Omega$ . Plus précisément,

$$K(x) = \delta(x)^{-k} L(\delta(x)) \quad \text{dans } \Omega,$$

avec  $0 < k < p$ ,  $\delta(x)$  la distance du point  $x \in \Omega$  à  $\partial\Omega$  et  $L$  une fonction de perturbation positive satisfaisant les propriétés :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} t^\varepsilon L(t) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} t^{-\varepsilon} L(t) = +\infty.$$

En utilisant une méthode de sur- et sous-solution, on discute de l'existence de solutions strictement positives ou à support compact de  $(\mathcal{P}_\lambda)$  en fonction de la valeur du paramètre  $k$  relative au comportement plus ou moins singulier du second membre de l'équation de  $(\mathcal{P}_\lambda)$ . On démontre que si  $k < 1 + r$ ,  $(\mathcal{P}_\lambda)$  admet au moins une solution strictement positive sur  $\Omega$  pour des valeurs suffisamment grandes de  $\lambda$ , alors qu'il n'admettra de solution à support compact uniquement si  $k \geq 1 + r$ .

Ces résultats étendent ceux d'un travail antérieur dû à HAITAO [3], où était étudié le cas elliptique, c'est à dire lorsque  $p=2$ , avec une classe de singularités  $K$  moins importante.

## Références

- [1] ALVAREZ, L and DÍAZ, J.I, *On the behaviour of the free boundary of some nonhomogeneous elliptic problems*, Positivity, Applicable Analysis (**36**), 1990.
- [2] GIACOMONI, J, MÂAGLI, H and SAUVY, P, *Existence of compact support solutions for a quasilinear and singular problem*, à paraître, 2011.
- [3] HAITAO, Y, *Positive versus compact support solutions to a singular elliptic problem*, J. Math. Anal. Appl. (**319**), 2006.
- [4] VÁSQUEZ, J.L, *A Strong Maximum Principle for some quasilinear elliptic equations*, Appl. Math & Opt. (**12**), 1984.

Paul SAUVY, LMA Pau UMR CNRS 5142  
Bâtiment IPRA - Université de Pau et des Pays de l'Adour  
Avenue de l'université - BP 1155 - 64013 PAU CEDEX (FRANCE)

paul.sauvy@etud.univ-pau.fr