# Équation de Burgers avec un terme source singulier

**Nicolas SEGUIN**, UPMC – Paris 6

**Boris ANDREIANOV**, Université de Franche-Comté

On s'intéresse dans ce travail au problème de Cauchy associé à l'équation qui s'écrit formellement

$$\partial_t u(t,x) + \partial_x \frac{u^2}{2}(t,x) = -s(u(t,x))\ \delta_0(x), \tag{1}$$

posée sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, où $\delta_0$ désigne la masse de Dirac en située en $x = 0$. En second membre, la fonction $s$ est supposée régulière, strictement croissante et s'annulant en 0.

Ce type de problème intervient naturellement dans le cadre d'écoulements de fluides unidimensionnels, modélisés par l'équation de Burgers, dans lesquels un obstacle ponctuel est disposé en $x = 0$. On peut songer à une grille ou à une particule fixe dans un tuyau. Cet obstacle exerce sur le fluide une force de frottement et est à l'origine du terme source dans l'équation (1).

D'un point de vue mathématique, la difficulté principale de cette équation est le produit "$(u(t,x))\ \delta_0(x)$" qui n'est pas défini au sens des distributions puisque la solution $u$ est à déterminer dans $\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$. S'il est clair que $u$ doit être une solution entropique de l'équation de Burgers de part et d'autre de l'interface $\{x = 0\}$, il est nécessaire de définir les relations qu'elle doit vérifier *à travers* cette interface. On fait alors appel à une régularisation monotone de cette interface et après passage à la limite, on détermine l'ensemble des couples de traces en $x = 0^-$ et $x = 0^+$ admissibles, appelé *germe* dans la théorie développée dans [1].

À partir de cette définition, initialement proposée dans [6] et formalisée dans [2], on démontre dans [3] le caractère bien posé du problème de Cauchy associé. La démonstration de l'unicité repose sur l'extension de la technique de Kruzhkov et sur la propriété de dissipation du germe. L'existence est obtenue par passage à la limite dans une classe de schémas numériques adaptés, dits *schémas équilibre* (voir notamment [5] et [4]), qui permettent de résoudre de manière exacte certaines solutions stationnaires de l'équation (1).

### Références

[1] B. Andreianov, K. H. Karlsen et N. H. Risebro, *A theory of $L^1$-dissipative solvers for scalar conservation laws with discontinuous flux*, Arch. Ration. Mech. Anal., 2011 (disponible en ligne).

[2] B. Andreianov, F. Lagoutière, N. Seguin et T. Takahashi, *Small solids in an inviscid fluid*, Networks Het. Media, 5(3):385–404, 2010.

[3] B. Andreianov et N. Seguin, *Well-posedness of a singular balance law*, prépublication HAL-00576959, soumis pour publication.

[4] L. Gosse, *Localization effects and measure source terms in numerical schemes for balance laws*, Math. Comp., 71(238):553–582, 2002.

[5] J. M. Greenberg and A.-Y. LeRoux, *A well-balanced scheme for the numerical processing of source terms in hyperbolic equations*, SIAM J. Numer. Anal., 33(1):1–16, 1996.

[6] F. Lagoutière, N. Seguin et T. Takahashi, *A simple 1D model of inviscid fluid-solid interaction*, J. Differential Equations, 245(11):3503–3544, 2008.

**Nicolas SEGUIN**, UPMC Univ Paris 06 & CNRS, UMR 7598 Labo. J.-L. Lions, F-75005 Paris
`nicolas.seguin@upmc.fr`
**Boris ANDREIANOV**, Laboratoire de Mathématiques CNRS UMR 6623, Université de Franche-Comté, 16 route de Gray, 25030 Besançon Cedex
`boris.andreianov@univ-fcomte.fr`