Comportement asymptotique des valeurs de jeux répétés à somme nulle : équations d'évolution en temps discret et continu

Guillaume VIGERAL, Université Paris 6 et Université Paris Dauphine

On se place dans le cadre des jeux répétés à deux joueurs et à somme nulle. Notons v_n la valeur du jeu en n étapes et v_λ celle du jeu λ-escompté. Une question naturelle est celle du comportement asymptotique (respectivement quand $n \to +\infty$ et quand $\lambda \to 0$) de ces valeurs, en particulier la recherche de conditions suffisantes sur les paramètres du jeu (espace d'états, ensembles d'actions, fonction de paiement, probabilité de transition etc.) pour qu'il y ait convergence des deux familles de valeurs, et pour que la limite soit la même. Cette question est résolue positivement dans certains cas (jeux absorbants, jeux récursifs, jeux finis, Markov chain games), mais il existe divers contre-exemples ainsi que de nombreux cas où le problème reste ouvert.
Sous certaines hypothèses, v_n et v_λ satisfont des formules faisant intervenir l'opérateur de Shapley Ψ du jeu :

$$v_n = \frac{\Psi^n(0)}{n} = \Phi\left(\frac{1}{n}, v_{n-1}\right) \tag{1}$$

$$v_\lambda = \Phi(\lambda, v_\lambda) \tag{2}$$

où $\Phi(\alpha, f) := \alpha\Psi\left(\frac{1-\alpha}{\alpha} f\right)$. L'idée de l'operator approach [1, 2] est d'étudier les propriétés analytiques vérifiées par Ψ pour en déduire le comportement asymptotique de v_n et v_λ.
En particulier, Ψ est toujours 1-Lipschitzien pour la norme infinie : on se place donc dans le cadre plus général où, étant donné un opérateur contractant quelconque Ψ défini sur un espace de Banach, on considère les formules (1) et (2) comme les définitions de v_n et v_λ.
Il est alors naturel d'étudier les versions en temps continu des équations de définition de v_n et v_λ; on montre alors [3] que leurs solutions ont le même comportement asymptotique qu'en temps discret : v_n se comporte asymptotiquement comme la solution de l'équation d'évolution

$$u(t) + u'(t) = \Phi\left(\frac{1}{t}, u(t)\right) \tag{3}$$

et v_λ comme celle de

$$u(t) + u'(t) = \Phi\left(\alpha(t), u(t)\right) \tag{4}$$

où α est une fonction $\mathcal{C}^1$ quelconque tendant vers 0 en $+\infty$ et vérifiant $\alpha'(t) = o(\alpha^2(t))$.

Références

[1] D.Rosenberg and S.Sorin, *An operator approach to zero sum repeated games*, Israel Journal of Mathematics, 2001.

[2] S.Sorin, *Asymptotic properties of monotonic nonexpansive mappings*, Discrete Event Dynamic Systems, 2004.

[3] G.Vigeral, *Evolution equations in discrete and continuous time for nonexpansive operators in Banach spaces*, ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations (to appear).

Guillaume VIGERAL, Laboratoire Combinatoire et Optimisation (Université Pierre et Marie Curie) and CEREMADE (Université Paris Dauphine)
vigeral@math.jussieu.fr