Prise en compte des singularités géométriques dans la résolution par équations intégrales de problèmes de diffraction d'ondes.

Séverine MOLKO, Université Paris-Sud XI, Onera

François ALOUGES, Polytechnique

David LEVADOUX, Onera

Mots-clés : Equations intégrales, Equation de Helmholtz, Haute fréquence, Préconditionnement, Singularités géométriques

Nous souhaitons modéliser une onde diffractée par une surface parfaitement conductrice non lisse recevant une onde incidente (typiquement, nous voulons modéliser l'action d'un radar sur un avion)
Notre travail s'inscrit dans la continuité de celui de Sophie Borel [1] sur la construction d'équations intégrales bien conditionnées pour le problème de Maxwell. S. Borel a construit une équation intégrale en source, bien posée à toute fréquence, et intrinsèquement bien conditionnée, la GCSIE (Generalized Combined Source Integral Equation). Son élaboration repose sur la construction d'un potentiel choisi comme la combinaison des potentiels électriques et magnétiques. Le couplage n'est pas réalisé à l'aide d'un coefficient scalaire comme cela est fait habituellement, mais par un opérateur à choisir correctement. Si l'on prend comme opérateur de couplage l'opérateur Dirichlet-to-Neumann, appelé admittance par les physiciens, l'opérateur sous-jacent à la GCSIE est l'identité. L'admittance n'étant connu explicitement que pour des surfaces canoniques, l'opérateur de couplage sera donc une approximation de l'admittance. La méthode de S. Borel consiste à découper la surface de l'objet considéré en sous-surfaces approchées par leur plan tangent, sur lesquels l'admittance est connue.
Lorsque les surfaces étudiées présentent des singularités géométriques, cette méthode ne donne plus les très bons résultats obtenus pour des surfaces lisses. En effet, au voisinage des singularités, il n'est plus possible d'approcher la surface par un plan tangent. L'idée que nous proposons est de garder le schéma numérique de la GCSIE classique, mais en approchant les sous-surfaces par la surface canonique associée (plan tangent sur les sous-surfaces lisses, arête, coin ou cône). Cela suppose donc de connaître l'admittance de surfaces canoniques.
Nous considérons pour l'instant l'équation de Helmholtz et l'équation de Laplace en dimension deux, sur des surfaces polygonales. L'admittance du cône infini pour le problème de Laplace se calcule explicitement grâce à la transformée de Mellin. L'admittance du cône infini pour le problème de Helmholtz se calcule également explicitement sous forme de série [2], [3] par décomposition spectrale.
A l'aide d'études sur les espaces de Sobolev définis sur des ouverts polygonaux [4], nous avons montré le caractère bien posé de la GCSIE pour les problèmes de Helmholtz et de Laplace en dimension deux.
Enfin, nous avons implémenté la nouvelle GCSIE comme définie plus haut. Sur un triangle (base = 1cm et hauteur = 10cm, 500 degrés de libertés), nous observons un gain d'environ 25% en terme de nombre d'itérations par rapport à la GCSIE classique [1].

Références

[1] F. Alouges, S. Borel, D. Levadoux, *A stable well-conditioned integral equation for electromagnetism scattering*, J. Comp. Appl. Math, 2007.

[2] M. Cessenat, *Sur quelques opérateurs liés l'équation de Helmholtz en coordonnées polaires, transformation H.K.L. (Hankel-Kantorovich-Lebedev)*, C. R. Acad. Sci. Paris, 1989.

[3] M. Cessenat, *Résolution des problèmes de Helmholtz par séparation des variables en coordonnées polaires*, C. R. Acad. Sci. Paris, 1989.

[4] P. Grisvard, *Singularities in boundary value problems*, Masson, Springer Verlag, 1992.

Séverine MOLKO, Onera, DEMR-SFM, Chemin de la Hunière, 91761 Palaiseau
severine.molko@math.u-psud.fr
François ALOUGES, CMAP, Ecole Polytechnique, route de Saclay, 91128 Palaiseau
alouges@cmapx.polytechnique.fr
David LEVADOUX, Onera, DEMR-SFM, Chemin de la Hunière, 91761 Palaiseau
david.levadoux@onera.fr