

Un résultat d'existence pour le problème du frottement de Coulomb discrétisé

Florent CADOUX, Inria Rhône-Alpes

La mécanique du contact et frottement possède de nombreuses applications pratiques (robotique, génie civil [1] ...). Lorsqu'on discrétise les équations du mouvement d'un système mécanique qui comporte des contacts unilatéraux avec frottement de Coulomb, on aboutit à un problème incrémental difficile, comportant de fortes non-linéarités et non-régularités. Etant donné une dimension d'espace d (2 ou 3 en pratique), un nombre de degrés de liberté m et un nombre de contacts n , ce problème est de trouver un triplet $(v, u, r) \in \mathbb{R}^{m+(nd)+(nd)}$ où v représente les vitesses généralisées, u les vitesses relatives aux points de contact et r les forces de contact, vérifiant pour une valeur donnée de M, f, H, w, e^i et μ^i le système

$$\begin{cases} Mv + f = H^T r \\ u = H v + w \\ (u^i, r^i) \in C(e^i, \mu^i) \quad \forall i \in 1, \dots, n. \end{cases} \quad (1)$$

Dans cette équation (1), la première ligne représente la dynamique discrétisée (supposée linéaire, avec M définie positive), la deuxième représente la cinématique discrétisée, et l'ensemble $C(e^i, \mu^i)$ défini par

$$(u, r) \in C(e, \mu) \iff \begin{cases} \text{ou : } r = 0 \text{ et } u_N \geq 0 \\ \text{ou : } r \in K \text{ et } u = 0 \\ \text{ou : } r \in \partial K \setminus 0, u_N = 0, \exists \alpha > 0, r_T = -\alpha u \end{cases} \quad (2)$$

représente l'ensemble des couples vitesse/force compatibles avec la loi de Coulomb. Dans (2), K désigne le cône du second ordre de direction e et d'ouverture μ et x_N et x_T représentent les composantes normale et tangentielle d'un vecteur x .

On peut montrer par des exemples simples que ce problème peut avoir : soit aucune solution, soit une solution unique (c'est le cas le plus favorable), soit plusieurs solutions qui peuvent être en nombre fini, dénombrable ou indénombrable, avec certaines solutions isolées et d'autres pas. Plusieurs algorithmes sont disponibles [2] pour tenter de le résoudre, mais aucun ne possède la bonne propriété de (*) soit converger vers une solution, (**) soit s'arrêter en prouvant que le problème n'admet pas de solution. Ainsi, en pratique, il arrive que les algorithmes dédiés à la résolution du problème incrémental échouent, sans que l'on sache si c'est parce que la solution cherchée n'existe pas (dans ce cas, il faut peut-être remettre en cause notre modèle) ou parce que l'on n'a pas été capable d'en trouver une (il faut alors tenter d'améliorer l'algorithme de résolution, et on vient de trouver un bon problème-test pour évaluer sa qualité). Dans les deux cas, la question de savoir *a priori* si une solution existe ou pas est de grande importance théorique et pratique. Dans cette contribution, on propose un critère pratique facilement vérifiable qui donne une condition suffisante à l'existence de solutions.

La preuve du critère d'existence utilise des notions d'optimisation, essentiellement d'optimisation conique sur le cône du second ordre, et le théorème du point fixe de Brouwer. Elle est considérablement plus complète que les résultats d'existence précédents [3] basés sur la théorie de LCP, qui ne fonctionnent qu'en dimension $d = 2$; de plus, ses hypothèses sont faibles (on constate d'ailleurs que le critère est en fait une condition nécessaire et suffisante sur un exemple simple de type "paradoxe de Painlevé") et la preuve est relativement simple. Bien que la méthode utilisée dans la preuve ne soit pas constructive (à cause de l'utilisation du théorème de Brouwer), elle suggère naturellement une méthode implémentable de résolution ; celle-ci fonctionne bien en pratique, même si – comme ses concurrentes – elle ne possède pas de garantie de convergence.

Références

- [1] MOREAU, J.-J., *Unilateral contact and dry friction in finite freedom dynamics*, CISM Courses Lect. 302, 1998.
- [2] ALART, P. ET CURNIER, A., *A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like solution methods*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., 1991.
- [3] STEWART, DAVID E., *Rigid-body dynamics with friction and impact*, SIAM Rev., 2000.