# Sommaire

Éditorial ..... 3
Comptes rendus des CA et bureaux de la SMAI ..... 7
Nouvelles du CNRS ..... 15
Vie de la communauté ..... 21
Comptes rendus de manifestations ..... 25
Hommage à Henri Poincaré ..... 27
Poincaré a-t-il existé ? ..... 28
Poincaré face au négatif : une méthodologie ? ..... 36
A la recherche de l'inégalité perdue ..... 52
Henri Poincaré et l'équation des télégraphistes ..... 65
Mathématiciens originaires du Grand Sud-Ouest ..... 83
Math$\alpha$Lyon : Rencontre avec des mathématiciens ..... 93
Prix de thèse SMAI-GAMNI ..... 99
Trajectoires rugueuses ..... 119
Du changement dans les revues et séries de livres de la SMAI ..... 135
Résumé de thèses ..... 141
Annonces de colloques ..... 151
Liste des correspondants locaux ..... 156

*Date limite de soumission des textes pour le Matapli 99 :* ***15 novembre 2012***

*Smai – Institut Henri Poincaré – 11 rue Pierre et Marie Curie – 75231 Paris Cedex 05*
*Tél : 01 44 27 66 62 – Télécopie : 01 44 07 03 64*
*MATAPLI - ISSN 0762-5707*
*smai@emath.fr*
*http : //smai.emath.fr*

**PRIX DES PUBLICITÉS ET ENCARTS DANS MATAPLI POUR 2012**

- 150 € pour une demi-page intérieure
- 250 € pour une page intérieure
- 400 € pour la 3e de couverture
- 450 € pour la 2e de couverture
- 500 € pour la 4e de couverture
- 300 € pour le routage avec Matapli d'une affiche format A4 (1500 exemplaires)

(nous consulter pour des demandes et prix spéciaux)

*Envoyer un bon de commande au secrétariat de la Smai*

*Smai – Institut Henri Poincaré – 11 rue Pierre et Marie Curie – 75231 Paris Cedex 05*
*Tél : 01 44 27 66 62 – Télécopie : 01 44 07 03 64*
`smai@emath.fr`

Site internet de la SMAI :
`http://smai.emath.fr/`

# Editorial

*par* Maria J. Esteban
Présidente de la SMAI

Chers membres de la SMAI,

Le 28 juin prochain, le Conseil d'administration va élire un nouveau Président de la SMAI. Ce Matapli est donc le dernier pour lequel j'écrirai un éditorial, et je voudrais en profiter pour faire un bilan des activités récentes et des projets de la SMAI qui me semblent les plus importants.

Pendant les dernières années, la SMAI a été très active dans l'organisation d'activités concernant l'emploi mathématique et les relations maths-industrie. Côté emploi, la SMAI a été à l'origine du premier Forum Emploi Mathématique (FEM) qui a eu lieu à Paris en janvier 2012. Ce forum co-organisé avec la SFdS et AMIES a dépassé toutes les espérances en termes de participation et de contacts. Aussi la décision a-t-elle récemment été prise d'en organiser une deuxième édition en janvier 2013, dans des locaux plus spacieux et avec si possible une participation plus importante des entreprises. De leur côté, les Journées maths-industrie de la SMAI ont connu de beaux succès sous l'impulsion d'une équipe très dynamique. Les thématiques variant, petit à petit se tisse un réseau d'entreprises avec lesquelles les relations se font fluides. En outre des accords ont été passés récemment avec le Pôle de compétitivité Systematic et avec Ter@tec.

La création d'AMIES a été une très bonne nouvelle pour les mathématiques appliquées françaises. La SMAI n'a pas été officiellement associée à cette création, mais elle a participé de très près aux discussions qui ont fait naître AMIES. Nous espérons que cette agence se renforcera petit à petit et qu'elle deviendra ce portail si nécessaire pour l'amélioration et le développement des relations entre les mathématiques universitaires et les entreprises.

La SMAI a continué à soutenir de toutes ses forces l'Opération Postes, en particulier dans la période récente où celle-ci a été attaquée par certaines universités qui pour d'obscures raisons ne souhaitent pas que chacun puisse connaitre les informations concernant les concours de recrutement. La consultation d'un cabinet d'avocats spécialisés en droit public a permis à la SMAI de mettre à la disposition

de l'Opération Postes (et plus généralement de la communauté des mathématiciens) un document qui lui permet de continuer à travailler sur des bases légales solides.

Les congrès de la SMAI et les Journées de ses groupes thématiques continuent à être organisés régulièrement, et le nombre de laboratoires volontaires pour leur organisation est exceptionnellement élevé. Cela fait plaisir de voir que les collègues de nombre d'universités sont prêts à s'investir dans ces événements de portée nationale.

L'an dernier, les revues de la SMAI ont vu se produire une évolution importante de leur situation avec la décision d'EDP Sciences de confier leur diffusion à Cambridge University Press. Cette évolution devrait augmenter la visibilité et la diffusion internationales des journaux de la SMAI, même si cela est encore difficilement mesurable. D'autre part les équipes éditoriales de toutes les revues et des deux collections de livres de la SMAI ont été renouvelées l'année dernière ou seront renouvelées cette année, conformément à leurs règles de fonctionnement. Les nouvelles équipes éditoriales vont pouvoir suive la trace de leurs anciens et continuer à travailler dur pour augmenter la qualité et l'audience de ces publications !

Côté enseignement et actions en direction du grand public, l'activité a été forte, les responsables de ces secteurs ayant travaillé sans cesse pour que la SMAI soit présente et active dans les actions et consultations nationales concernant ces thématiques. Beaucoup de nos actions se déroulent en collaboration avec les deux autres sociétés savantes de mathématiques, la SFdS et la SMF, ce qui est naturel pour des actions de portée nationale et de caractère général.

En résumé, je trouve que la SMAI est en bonne santé. Certes beaucoup plus devrait être fait, mais les moyens dont dispose la SMAI sont limités, et elle fait pour le mieux avec les moyens dont elle dispose. Le nombre de chargés de mission et de bénévoles qui s'investissent dans telle ou telle action est important, et c'est souvent grâce à ces personnes que la SMAI peut continuer à être active et présente dans beaucoup d'actions et d'événements.

S'il y a quelque chose qui m'a donné la force de travailler et qui m'a soutenue pendant toute la durée de ma présidence, c'est justement l'existence de tous ces bénévoles et volontaires qui aident la SMAI de mille manières. Beaucoup de jeunes, de collègues dans les labos, de volontaires pour organiser colloques, journées, écoles thématiques ; de soutiens pour la mise en place de nouvelles actions, pour parti-

ciper à des réunions et y représenter la SMAI, pour assurer le nécessaire (pour ne pas dire indispensable) support technique et informatique, pour la publication de Matapli et de la lettre SMAI-Info, pour des coups de main en tout genre. Jamais la SMAI ne pourrait faire la moitié de ce qu'elle fait sans tous ces bénévoles, dont beaucoup sont de jeunes collègues. Je les remercie tous et toutes ici, et en particulier les membres du Conseil d'administration pour leur disponibilité et leur implication. Mais mes remerciements les plus forts vont aux membres du Bureau de la SMAI qui ne ménagent pas leurs efforts pour la bonne marche et le dynamisme de l'association, dans une ambiance de travail conviviale et très agréable. J'espère que ce flot de volontaires se maintiendra et même se renforcera, permettant à la SMAI de diversifier et de renforcer ses activités pour la communauté de mathématiques appliquées et industrielles en France.

Maria J. Esteban
Présidente de la SMAI

**Call for 2013 Nominations**
**Seventh Vasil A. Popov Prize**
**Deadline : November 15, 2012**

The Vasil A. Popov Prize honors the memory of the Bulgarian analyst Vasil A. Popov (1942-1990), best known for his contributions to Approximation theory. The Seventh Vasil A. Popov Prize will be awarded at the Fourteenth International Conference in Approximation Theory, to be held in April of 2013 in San Antonio, Texas.

The Prize, which consists of an engraved marble trophy and a cash award, is awarded every third year for outstanding research contributions in fields related to Vasil Popov's work. Eligibility for this Prize is restricted to young mathematicians (defined as a person who has received their PhD degree within the past six years) who did not have their terminal degree on June 1, 2006. The winner of the Prize will be asked to deliver a plenary lecture at the Texas Conference.

The First Prize in 1995 was awarded to Albert Cohen (Paris VI), the Second Prize in 1998 to Arno Kuijlaars (KU Leuven), the Third Prize in 2001 to Emmanuel Candes (Caltech), the Fourth Prize in 2004 to Serguei Denissov (Wisconsin-Madison), the Fifth Prize in 2007 to Mauro Maggioni (Duke), and the Sixth Prize in 2010 to Joel A. Tropp (Caltech).

The Selection Committee for the Seventh Vasil A. Popov Prize consists of Albert Cohen (Paris VI), Wolfgang Dahmen (RWTH-Aachen), Arno Kuijlaars (KU Leuven), Paul Nevai (The Ohio State University), Allan Pinkus (Technion-Haifa), Pencho Petrushev (University of South Carolina), and Edward Saff (Vanderbilt University).

Letters of nomination should include a brief description of the research related to the nomination and a vita of the nominee. Other supporting material may also be submitted.

All nominations must be received no later than November 15, 2012. Nominations for the award and any supporting materials should be sent electronically or as hardcopies to :

Pencho Petrushev, Chair
Popov Prize Selection Committee
Interdisciplinary Mathematics Institute
University of South Carolina
1523 Greene St., LC 429
Columbia, SC 29208
popov.prize@gmail.com

# Comptes rendus des CA et bureaux de la SMAI

*par* Antoine Lejay,
Secrétaire Général de la SMAI

## Comptes rendus — Bureau (par téléphone) 8 février 2012

**Présents.** A. de Bouard, M.J. Esteban, E. Godlewski, F. Lagoutière, A. Lejay, F. Murat, E. de Rocquigny

**1. Nouvelles**
Un article sur l'interaction mathématiques et entreprises, co-écrit par la SMAI, l'agence AMIES et la SFDS a été publié dans la lettre d'information « Grand Angle »[1] nº 26 (février 2012) de la Conférence des Grandes Ecoles.

**2. Secrétariat**
En vue d'un recrutement d'un mi-temps de secrétariat/assistant, une fiche de poste sera prochainement écrite.

**3. Actions passées et en cours**

**3.1. Circulaire Guéant-Bertrand sur l'immigration légale**

La SMAI, la SMF et la SFdS ont co-signé un communiqué[2] sur la circulaire Guéant-Bertrand sur l'immigration légale[3]. Celui-ci a été lu en présence des présidents de ces trois sociétés lors d'une séance de parrainage le 20 février 2012 à l'Institut Henri Poincaré.

**3.2. Négociation en cours avec les éditeurs**

Le Réseau National des Bibliothèques de Mathématiques[4] (RNBM), le CNRS et l'INRIA négocient actuellement un contrat global pour la France avec l'éditeur Springer, le précédent s'étant terminé en décembre.

[1] ⟨http://www.cge-news.com/main.php?p=447⟩
[2] ⟨http://smai.emath.fr/spip.php?article400⟩
[3] Voir les textes intitulés « Circulaire IOCL1115117J du 31 mai 2011 relative à la maîtrise de l'immigration professionnelle » et « Accès au marché du travail des diplômés étrangers de niveau au moins équivalent au Master : modalités d'examen des demandes. 12 janvier 2012 » sur le site http://circulaire.legifrance.gouv.fr/.
[4] ⟨http://www.rnbm.org/⟩

Ce nouveau contrat prévoit que la diffusion serait seulement électronique pour un prix similaire au contrat précédent avec une augmentation annuelle automatique de 4 %. En échange, Springer offrirait des bouquets de journaux. Une pétition a été lancée par des mathématiciens de l'Université de Grenoble appelant à des négociations équilibrées ; cette pétition a été signée par le CA de la SMAI[5].
Les représentants des sociétés savantes sont invités à une rencontre qui aura lieu prochainement avec des responsables de Springer.

**3.3. Journée *Popularisation des mathématiques***

Une journée *Popularisation des mathématiques*[6] est organisée les 15-16 mai 2012 à l'Université d'Orléans à l'initiative d'Animath, de l'Irem d'Orléans et la Fédération Denis Poisson. La SMAI soutient financièrement cette manifestation et y participera.

**4. Rencontres *Math-Industrie* et relations industrielles**
Les prochaines rencontres Math-Industrie auront lieu le 10 avril sur le thème *Énergies renouvelables et innovation mathématique*. Cette manifestation est organisée en collaboration avec des PME et des start-up[7].
E. de Rocquigny et M.J. Esteban ont rencontré Dassault System qui est prêt à établir un partenariat avec la SMAI. D'autres discussions sont en cours pour des partenariats avec System@tic[8] et l'AMIES[9].

**5. Organisation des prochains congrès SMAI et CANUM**
Le prochain congrès *SMAI 2013* sera organisé par la Fondation Sciences Mathématiques de Paris. Le bureau a discuté de l'organisation des prochains congrès SMAI et CANUM ; plusieurs laboratoires se sont proposés pour les organiser.

**6. Matapli**
Les responsables de plusieurs rubriques de Matapli seront prochainement remplacés par des personnes à trouver.

**7. Recherche de correspondant pour l'EMS**
Le bureau a proposé de nommer T. Horsin comme correspondant de l'EMS à la SMAI.

[5] ⟨http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/petitions/index.php?petition=3⟩
[6] ⟨http://www.animath.fr/spip.php?article370⟩
[7] ⟨http://smai.emath.fr/congres/journees/ER/index.php⟩
[8] ⟨http://www.systematic-paris-region.org/fr⟩
[9] ⟨http://www.agence-maths-entreprises.fr⟩

## Comptes rendus — Bureau (par téléphone) 14 mars 2012

**Présents.** A. de Bouard, M.J. Esteban, E. Godlewski, F. Lagoutière, A. Lejay, F. Murat, E. de Rocquigny.

**1. Nouvelles**
L'*École Hispano-Française sur la Simulation Numérique en Physique et Ingénierie* aura lieu du 24 au 28 septembre 2012 à Torremolinos[10].
Les correspondants locaux ont été informés de l'appel à projet *Cap'Math*[11] avec des délais très courts.
La SMAI a été consultée pour le référentiel des programmes de la licence et celui des classes préparatoires.
Un message a été envoyé aux adhérents pour trouver des responsables de rubriques à Matapli.

**2. Assemblée Générale**
L'Assemblée Générale aura lieu le mercredi 27 juin 2012 à l'Institut Henri Poincaré, amphithéâtre Hermite.
Le prochain CA, qui aura lieu le 4 avril, votera l'ordre du jour de l'AG et le budget.

**3. Comités éditoriaux**
Le bureau a accepté la proposition du comité éditorial d'*ESAIM Proc.* présentée par les nouveaux rédacteurs en chef[12].
Le bureau a accepté la proposition du comité éditorial de la collection *Mathématiques & Applications* présentée par les nouveaux rédacteurs en chef[13].

## Comptes rendus — Conseil d'Administration 4 avril 2012

**Présents.** F. Alabau, Z. Belhachmi, B. Bercu, F. Bonnans, J.-M. Bonnisseau, A. de Bouard, R. Cont, L. Decreusefond, M.J. Esteban, R. Eymard, E. Gobet, E. Godlewski, T. Goudon, F. Lagoutière, A. Lejay, T. Lelièvre, J. Le Rousseau, V. Louvet, F. Murat, G. Pagès.
**Représentés.** C. Gout.
**Excusés.** R. Abgrall, G. Allaire, D. Aussel, C. Durot, R. Eymard, M.-L. Mazure, E. de Rocquigny, A. Samson.

[10] ⟨http://edanya.uma.es/ehf2012/fr/index.html⟩
[11] ⟨http://www.animath.fr/spip.php?article407⟩
[12] Ces rédacteurs en chef sont Djalil Chafaï, Pauline Lafitte, Tony Lelièvre et Clément Mouhot.
[13] Ces rédacteurs en chef sont Josselin Garnier et Valérie Perrier.

**Absents.** M. Bouthou, A. Cohen, M. Lavielle, J. Mairesse, P. Maréchal, S. Mischler.

**1. Nouvelles de la SMAI**

**1.1. Poste de secrétariat**

Le CA est informé du processus de recrutement d'un demi-poste de secrétariat.

**1.2. Négociations avec les éditeurs**

F. Murat, vice-président chargé des publications informe le Conseil d'Administration de l'état des négociations entre l'éditeur Springer-Verlag et la plateforme Couperin, ainsi que des réactions et des actions de la communauté mathématique.

**1.3. Participation au référentiel des compétences**

Madame Évelyne Garnier-Zarli, chargée de mission DGESIP pour l'élaboration des référentiels de compétences de la licence généraliste du domaine Sciences et Technologies (ST), a contacté les sociétés savantes (SMAI, SMF et SFdS) pour une relecture de la partie concernant le « champ mathématique ». Dans le cadre de la phase 2 du plan « Réussite en licence », il s'agit d'un texte d'au plus deux pages, qui s'inscrit dans un document de format contraint, chaque « champ » (informatique, physique, chimie,...) disposant d'un tel texte dans ce document.

**1.4. Rencontres Math-Industrie**

Les prochaines rencontres Math-Industrie *Innovation énergétique et mathématiques* auront lieu le 10 avril 2012 à l'Institut Henri Poincaré (Paris), en partenariat avec AMIES[14], CleanTuesday[15], Systematic[16], et avec le soutien de l'INRIA et du CNRS.
Les industriels représentés seront issus uniquement de PME et de start-up.
Des partenariats se mettent en place avec Ter@tec[17], Systematic et AMIES, ainsi que Dassault Système et l'INRIA.

**1.5. Journée *popularisation des mathématiques***

La SMAI participe à la journée *Popularisation des mathématiques*[18], couplée à la *Journée des IREM*. Ces journées auront lieu à Orléans le 15-16 mai.
Il s'agit de journées nationales d'échanges et de réflexions dans le domaine de la divulgation des mathématiques et des sciences du numérique à destination des enseignants et des chercheurs.

**1.6. *Matapli* : nouveaux responsables de rubriques**

Christian Gout, éditeur en chef de *Matapli*, a informé le Conseil d'Administration du renouvellement des responsables des rubriques suivantes :
– Résumés de livres : Ana Matos ;

[14] ⟨http://www.agence-maths-entreprises.fr⟩
[15] ⟨http://cleantuesdayparis.fr/home/⟩
[16] ⟨http://www.systematic-paris-region.org/⟩
[17] ⟨http://www.teratec.eu/⟩
[18] ⟨http://www.animath.fr/conf/⟩

– Du côté des écoles d'ingénieurs : Gabriel Stoltz ;
– Nouvelles des universités : Olivier Guibé.
Christian Gout remercie vivement les nombreuses personnes qui se sont proposées comme responsables de rubriques.

**1.7. Relations avec l'EMS**

Le bureau a nommé Thierry Horsin correspondant de l'EMS au sein de la SMAI. La SMAI soutient la candidature de Laurence Halpern au comité exécutif de l'EMS.
Début avril, M.J. Esteban a participé à Prague à une réunion des Présidents des Sociétés de Mathématiques européennes.

**1.8. Prix Lagrange de l'ICIAM**

Ce prix de 3000 USD, décerné tous les 4 ans par l'ICIAM, est financé par les sociétés savantes SEMA (Espagne), SIMA (Italie) et SMAI. À la demande de l'ICIAM, il doit être réévalué.
Le Conseil d'Administration a voté à l'unanimité d'augmenter sa participation pour un tiers de 5000 USD, à condition que les frais de séjour des récipiendaires soient pris en charge par les organisateurs locaux ou l'ICIAM, et que la visibilité de la SMAI, de la SIMA et de la SEMA soit maintenue.

**1.9. Projet *Cap'Math***

Le premier appel à projet de *Cap'Math* a été lancé début mars. La SMAI participe à deux demandes de financement, l'une pour une réalisation d'une nouvelle version de la brochure *Explosion des Mathématiques* et l'autre concernant entre autres l'opération *Les maths, ça sert*[19]. La date limite de réponse à l'appel à projet est le 14 mai.

**1.10. Prochains congrès SMAI et CANUM**

Le congrès SMAI 2013 est organisé par la Fondation Sciences Mathématiques de Paris en collaboration avec les laboratoires MAP5 (Paris V), LPMA (Paris VI et Paris VII) LJLL (Paris VI et Paris VII), CEREMADE (Paris-Dauphine) et LAGA (Paris-Nord).
La composition du Comité Scientifique[20] sera bientôt décidée et fera l'objet d'un vote électronique du Conseil d'Administration.
Des équipes marseillaises se sont proposées pour CANUM 2014, à condition de pouvoir l'organiser en mars 2014. Le bureau a donné son accord à condition que les dates ne recoupent pas celles des vacances.

[19] ⟨http://www.animath.fr/spip.php?rubrique290⟩

[20] Pour rappel, le CR du 16 décembre 2009 précisait, concernant la constitution du Comité Scientifique de SMAI 2011 : « Il est rappelé que le comité est constitué sur propositions des organisateurs (pour moitié) et du Conseil d'Administration de la SMAI (pour moitié), en cherchant à respecter les équilibres thématiques. Une liste de douze noms est proposée et arrêtée, modulo les accords des personnes intéressées. »

Plusieurs laboratoires se sont proposés pour organiser les prochains congrès SMAI et CANUM.

**1.11. École Franco-Espagnole Jacques-Louis Lions**

La 15e version de cette école sur la simulation numérique co-organisée par la SEMA et la SMAI aura lieu en septembre 2012 à Malaga[21].

**1.12. Forum Emploi Math**

Sur une idée de Stéphane Cordier, le 1er Forum Emploi Math[22] a été co-organisé le 26 janvier à Paris avec AMIES et la SFdS. Le bilan, détaillé dans *Matapli* no 97 de février 2012, est très positif.
La question de la fréquence de la tenue d'un tel forum reste ouverte.

**1.13. Lettre à la DGRI**

La SMAI, la SMF et la SFdS ont demandé à la DGRI (Direction Générale de la Recherche et l'Innovation) de trouver un nouveau chargé de mission pour les mathématiques, suite au départ de Frank Pacard du Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche.

**1.14. Site des thèses et post-docs**

M.J. Esteban a informé le CA de l'avancement du projet d'un site pour répertorier les bourses et sujets de thèses.
Le Conseil d'Administration souhaite étendre ce site aux annonces de post-doc, sans pour autant entrer en concurrence avec d'autres sites proposant les mêmes services.

**2. Nouvelles des groupes thématiques**

**2.1. SMAI-MAIRCI**

Les prochaines journéees du groupe thématique SMAI-MAIRCI auront lieu les 12-13-14 octobre 2012 chez Bull à Grenoble sur les thèmes de la gestion des risques et de l'analyse de données et problèmes inverses.

**2.2. SMAI-MAS**

Les prochaines journées SMAI-MAS auront lieu 29-30-31 août à Clermont-Ferrand[23].
Le Prix de thèse J. Neveu 2011 a été attribué à Nicolas Curien pour sa thèse « Cartes planaires aléatoires et $(\sqrt{17}-3)/2$ ».

**2.3. SMAI-MODE**

Les journées SMAI-MODE ont eu lieu les 28-29-30 mars 2012 à Dijon[24]. À cette occasion, le comité de liaison du groupe thématique SMAI-MODE a été renouvellé. Patrick Louis Combettes, Jean-Noël Corvellec, Olivier Ley, Jérôme Malick, Adam Ouorou et Aude Rondepierre ont été élus au comité de liaison.

[21] ⟨http://smai.emath.fr/spip.php?article404⟩
[22] ⟨http://smai.emath.fr/forum-emploi/⟩
[23] ⟨http://math.univ-bpclermont.fr/MAS2012/index.php⟩
[24] ⟨http://math.univ-bpclermont.fr/MAS2012/index.php⟩

Le prix Jean-Claude Dodu de 1500 € patronné par EDF et le groupe thématique SMAI-MODE a été attribué à Nicolas Bonnotte, Daniela Tonon et Xavier Verel.
Enfin, le site web du groupe SMAI-MODE a été rénové. La lettre électronique SMAI-MODE, lancée il y a 10 ans, y est archivée pour les dernières années.

### 2.4. SMAI-SIGMA

Le groupe thématique SMAI-SIGMA a renouvellé son site WEB qui est maintenant hébergé sur le site de la SMAI.

## 3. Assemblée Générale

L'Assemblée Générale de la SMAI aura lieu le mercredi 27 juin 2012 à l'Institut Henri Poincaré. Le Conseil d'Administration a décidé que cette Assemblée Générale serait suivie par un débat portant sur les Labex, Idex et autres « initiatives d'excellence ».

### 3.1. Ordre du jour

Le Conseil d'Administration a adopté à l'unanimité l'ordre du jour de cette Assemblée Générale, qui est le suivant :
– Rapport moral et vote du quitus ;
– Rapport financier et vote du quitus ;
– Présentations des groupes thématiques ;
– Proclamation des résultats des élections au Conseil d'Administration ;
– Questions diverses.

### 3.2. Approbation des comptes de l'année 2011

F. Lagoutière, Trésorier de la SMAI, a présenté les comptes de l'année 2011 de l'association. Ces comptes ont été approuvés à l'unanimité par le Conseil d'Administration.

## 4. Renouvellement des comités éditoriaux des journaux et collections

F. Murat, vice-président chargé des publications, a informé le Conseil d'Administration de l'avancement du renouvellement des comités éditoriaux.

## 5. Gestion des listes de mails des groupes thématiques

Chaque groupe thématique dispose d'une liste de diffusion engendrée à partir de la base, mais cette liste repose sur un système d'abonnement. Afin de permettre aux groupes thématiques de mieux communiquer avec leurs adhérents, le bureau propose de donner accès à chaque responsable de groupe thématique à une liste à jour des noms et mails des adhérents de l'année courante et de l'année précédente engendrée à partir de la base de données des adhérents.

## 6. Règles pour le parrainage des colloques

Le Conseil d'Administration a discuté des règles de parrainages de colloques à l'étranger. Il a décidé qu'une conférence scientifique de qualité organisée à l'étranger et dont l'un des organisateurs est membre de la SMAI peut bénéficier d'un parrainage.

Le CA a aussi décidé de changer la présentation des règles de parrainage sur le site pour faire apparaître la motion votée au Conseil d'Administration du 27 juin 2011 concernant la parité.

# Nouvelles du CNRS (section 01)

*par* Virginie Bonnaillie-Noël et Yann Brenier

Les informations du comité national sont mises à jour sur le site
`http ://cn.math.cnrs.fr/`

## 1 Session d'automne 2011

**Promotions CR1.** Les 16 personnes ayant 4 années d'ancienneté dans le grade CR2 et ayant candidaté ont été promues.

**Promotions DR1.** La section a examiné 37 dossiers de candidatures (dont seulement 3 de femmes). Neuf personnes ont été promues : AMMARI Habib, BRESCH Didier, CHAMBOLLE Antonin, DOLBEAULT Jean, ENOCK-LEVI Michel, GEORGESCU Vladimir, GILLE Philippe, GIUSTI Marc, ZEGHIB Abdelghani.

**Promotion DRCE1.** Parmi les 16 candidats (dont 3 femmes), 4 ont été promus : BESSON Gérard, ESTEBAN Maria, GIOVANGIGLI Vincent, WALDSPURGER Jean-Loup.

**Promotion DRCE2.** Il y avait deux dossiers de candidatures : François MURAT a été promu.

## 2 Concours 2012

**Pré-sélection.** La phase de pré-sélection a été mise en place cette année. Cette phase ne concerne que les concours de chargés de recherche. Le déroulement du concours pour les directeurs de recherche n'a pas été modifié.
Comme les années précédentes, le jury d'admissibilité n'a pas auditionné les candidats DR.
Le jury d'admissibilité s'est réuni le 16 février afin d'établir une liste de candidats auditionnés par concours pour les postes CR. Globalement, 80 personnes ont été auditionnées, certaines l'étant sur plusieurs concours. Les candidats retenus pour l'audition ont été répartis en 4 sous-jurys composés de 4 à 5 membres. Chaque candidat a été auditionné durant 15 minutes : 5 minutes de présentation sans support et 10 minutes d'entretien avec le jury. Ces auditions se sont déroulées à l'IHP le 16 avril.

À l'issue des délibérations, la section 1 a diffusé ce message à l'ensemble des directeurs d'unité : *La section 1 du Comité National tient à affirmer que la liste des candidats auditionnés aux concours CR est établie suivant des critères et des profils spécifiques, et ne peut, en conséquence, servir de référence dans un contexte différent et pour d'autres concours.*

**Effectifs** Le tableau 1 précise le nombre de candidats par concours et le nombre de femmes parmi ces candidats.

| concours | nb postes | nb candidats inscrits | | nb candidats auditionnés | | Liste principale | | Liste complém. | | nb candidats admissibles | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | total | nb f | total | nb f | total | nb f | total | nb f | total | nb f |
| 01/01 | 8 | 121 | 14 | | | 8 | 2 | 1 | 0 | 9 | 2 |
| 01/02 | 1 | 46 | 8 | 11 | 1 | 1 | 0 | 2 | 0 | 3 | 0 |
| 01/03 | 8 | 181 | 35 | 49 | 7 | 8 | 3 | 5 | 0 | 13 | 3 |
| 01/04 | 4 | 117 | 27 | 23 | 7 | 4 | 0 | 4 | 1 | 8 | 1 |
| 01/05 | 1 | 54 | 12 | 14 | 2 | 1 | 1 | 1 | 0 | 2 | 1 |
| 01/06 | 1 | 13 | 3 | 6 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 2 | 0 |
| 01/07 | 1 | 6 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| total | 24 | 538 | 100 | 104* | 18 | 24 | 6 | 14 | 1 | 38 | 7 |
| CR | 16 | 249 | 51 | 80 | 12 | 16 | 4 | 13 | 1 | 29 | 5 |

TAB. 1: Nombre de candidats selon les concours et nombre de femmes.

* 80 personnes ont été sélectionnées pour les auditions mais certaines étaient retenues sur plusieurs concours, ce qui fait un total de 104 dossiers retenus pour les auditions.

**Résultats d'admissibilité** Les résultats que nous mentionnons ici sont des listes d'admissibilité et non d'admission. Les jurys d'admission se déroulent en mai-juin et les résultats sont ensuite disponibles sur le site du CNRS. Notons que les postes d'échange sont gérés par les instituts où seront affectés les candidats et qu'aucun membre du jury d'admissibilité des concours de la section 1 ne fait partie des jurys d'admission pour les postes d'échange.

– 8 DR2 (concours 01/01)
  1. BUFETOV Alexander, GAYRARD Véronique, LIMIC Vlada, MOROIANU Andrei, POWELL Geoffrey, QUINT Jean-François, REMOND Gaël, TONINELLI Fabio Lucio.
  9. CHALONS Christophe.
  L'INSMI avait affiché deux postes réservés à des personnes extérieures au CNRS.

Parmi les 121 dossiers, 52 candidats étaient CR1 au CNRS et 57% dossiers provenaient de personnes travaillant à l'étranger, d'enseignants-chercheurs ou de chercheurs INRIA.

– 1 CR1 (concours 01/02)
  1. ARMSTRONG Scott,
  2. BRUGALLE Erwan, 3. CHIODO Alessandro.
  Cette année, la compétition a été très forte sur ce concours, notamment avec de très bons dossiers provenant de l'étranger avec un bon programme d'intégation en France. L'an dernier, il n'y avait eu que 29 candidats sur un tel poste contre 46 cette année.
– 8 CR2 (concours 01/03)
  1. CURIEN Nicolas, DUDAS Olivier, MUNOZ Claudio, PIRUTKA Alena, YALKINOGLU Bora, 6. MAZZUCCHELLI Marco, MIRRAHIMI Sepideh, VERTESI Vera.
  9. BENOIST Olivier, 10. MALE Camille, 11. DEYA Aurélien, 12. GUTMAN Yonatan, 13. SIMON Pierre.
– 4 CR2 sur des thématiques d'interactions des mathématiques avec d'autres disciplines (concours 01/04)
  1. BETTINELLI Jérémie, BRINI Andrea, DUCHENE Vincent, METIVIER Ludovic.
  5. BENZEKRY Sébastien, 6. DE CASTRO Yohann, 7. HAN-KWAN Daniel, 8. EHRHARDT Caroline.
– 1 CR2 affecté dans un laboratoire relevant de la section 07 : mathématiques pour les sciences de l'information et la communication (concours 01/05)
  1. AUBRUN Nathalie.
  2. SALEZ Justin.
– 1 CR2 : mathématiques et diversité génétique, affecté dans un laboratoire à Lyon (concours 01/06)
  1. JACOB Laurent.
  2. ROQUAIN Etienne.
– 1 CR2 : modélisation et analyse d'images de matériaux anciens, affecté au laboratoire IPANEMA à Gif-sur-Yvette (concours 01/07)
  1. COHEN Serge.
  La section déplore un double fléchage thématique et géographique tel qu'il n'y a eu que 6 dossiers admis à concourir ; parmi ces dossiers, un seul a été retenu pour l'audition.

Mentionnons également les résultats d'admissibilité d'un poste CR2 de la section 7 (sciences et technologies de l'information - informatique, automatique, signal et communication) affecté dans un laboratoire relevant de la section 1 et de postes de la CID 43 (modélisation des systèmes biologiques, bioinformatique) :

– 1 CR2 affecté dans un laboratoire de mathématiques prioritairement sur les thématiques "image et/ou algorithmique parallèle" (concours 07/06 dont la phase d'admissibilité est gérée par la section 7),

1. DELEDALLE Charles Alban.
2. AUBRUN Nathalie, 3. XIA Gui Song.

– 4 DR2 : concours ouvert sur les thèmes scientifiques relevant de la CID 43 (concours 43/01 dont la phase d'admissibilité est gérée par la CID 43)
1. BAADEN Marc, 2. LOPES NEVES DE ALMEIDA Luis Manuel, 3. MATIAS Catherine, 4. STOTE Roland.
5. DAUBIN Vincent, 5. NOTREDAME Cédric.
– 1 CR2 : modélisation mathématique du vivant préférentiellement en lien avec l'imagerie médicale et biologique (concours 43/05 dont la phase d'admissibilité est gérée par la CID 43)
1. WEISS Pierre,. 2. LAGACHE Thibault, 3. BENZEKRY Sébastien.

**Motion.** Voici la motion que le comité national a adressé à Alain Fuchs, président du CNRS, Joël Bertrand, DG délégué à la science, Christophe Coudroy, DRH, Guy Métivier, directeur de l'INSMI, ainsi qu'aux directeurs de tous les instituts, et à Christian Kassel, président du conseil scientifique de l'INSMI, Etienne Bustarret, président de la CPCN, Bruno Chaudret, président du conseil scientifique du CNRS.
*La section 01 (future 41) du comité national est sollicitée pour recruter des chargés de recherche sur des postes issus d'autres instituts. Cela reflète le besoin croissant de mathématiques dans les autres sciences.*
*Ces postes issus d'autres instituts devraient être déclarés au concours après une large consultation et une vraie concertation impliquant les partenaires concernés :*
– *directions d'institut,*
– *conseils scientifiques d'institut,*
– *sections du comité national (CID comprises).*
*En particulier, le jury d'admissibilité serait ainsi clairement associé à la section ou à la CID la plus pertinente.*

**Affectation** Les affectations des chercheurs admissibles sont en cours de discussion entre Patrick Dehornoy, les candidats admissibles et les directeurs de laboratoires.
La section a donné un avis sur les vœux d'affectation proposés par le candidat et a parfois suggéré d'autres affectations quand cela semblait pertinent. Ceci a été proposé dans le but de laisser un choix le plus large possible aux candidats, et par ce choix, de permettre de répartir les chercheurs dans un maximum de laboratoires. La section donne un avis mais la décision finale revient à l'INSMI.
Comme le CNRS promeut, avec beaucoup de force parfois, la mobilité dans ses unités lors du recrutement des MCF et PR, l'INSMI souhaite appliquer cette règle de "non recrutement local" à ses propres chercheurs lors des concours CR et DR.

**Concours handicap** Dans le cadre de sa campagne de recrutement de chercheurs pour l'année 2012, le CNRS ouvre des possibilités d'intégration par la voie

contractuelle prise en application de l'article 27 de la loi n$^o$ 84-16 modifiée relative à certaines modalités de recrutement des personnes handicapées dans la fonction publique de l'état. Les conditions générales d'accès préalables au recrutement sont précisées dans le décret n$^o$ 95-979 du 25 août 1995 modifié relatif au recrutement des travailleurs handicapés dans la fonction publique.
La procédure d'intégration par voie de contrat a vocation à faciliter le recrutement de jeunes scientifiques handicapés en tant que chercheurs au CNRS puisqu'elle permet d'être recruté sur la base d'un contrat d'une période d'un an renouvelable une fois donnant lieu à titularisation. Elle constitue une voie d'accès complémentaire et dérogatoire à la fonction publique mais ne se substitue pas à la voie d'accès par concours qui reste le mode de recrutement normal et privilégié.
Par conformité avec les concours chercheurs de droit commun, l'appréciation des candidats par la voie contractuelle relèvera des sections concernées du comité national.
L'institut Elie Cartan à Nancy a été identifié comme un laboratoire susceptible d'accueillir un chercheur handicapé, sur la thématique *calcul stochastique*. Le candidat Aurélien Deya a été auditionné par la section 1 le 14 mai 2012, lors de la session de printemps. Ce candidat a été proposé à la commission d'interclassement qui se réunira le 28 juin.

## 3 Chaires CNRS-universités

En 2012, 3 chaires CNRS-université sont ouvertes au concours :

| | |
|---|---|
| Université de Dijon | Physique-Mathématique |
| Université Paris 6 | Calcul scientifique haute performance |
| Université Versailles-Saint Quentin | Algèbre et géométrie |

Sur chaque poste, de 5 à 7 candidats sont auditionnés. Les résultats ne sont pas connus au moment de la rédaction de ce texte.

## 4 Session de printemps 2012

La session de printemps a lieu les 14 et 15 mai 2012. À cause du passage à l'évaluation quinquennale, peu d'unités sont concernées par cette évaluation. Seules les universités de Strabsourg, Nancy et Metz ont été évaluées par l'AERES cette année.
Notons qu'une partie des chercheurs qui avaient déposé leur rapport quadriennal l'an dernier (les chercheurs de Nice, Marseille, Orléans, Poitiers et Tours) ont dû déposer un nouveau rapport cette année. Cela vient du fait qu'ils font partie de la vague dont l'évaluation aura lieu dans 5 ans. Les numéros des UMR associées ont également été modifiés. Lorsque l'avis était favorable, la section 1 a décidé de reprendre les rapports établis à la session du printemps 2011 pour ces

chercheurs.
Les demandes de création ou de renouvellement de GDR sont désormais évaluées au printemps. Lors de cette session, il y a 3 demandes de création et 6 de renouvellement.

## 5 Mandat 2012-2016

Les élections pour élire 14 des membres de la future section 41 du comité national pour le mandat 2012-2016 ont lieu en ce moment. Le premier tour des élections a eu lieu en avril. Le détail des résultats est consultable à l'adresse

http ://www.dgdr.cnrs.fr/elections/scn/Résultats 2012/resultats_cn2012.htm

La majorité a été obtenue dès le premier tour pour les candidats représentant les collèges A1 (DR CNRS), B1 (CR CNRS), B2 (rang B non CNRS). Les résultats partiels figurent dans le tableau suivant

| Collège | Nombre d'inscrits | Taux de participation | Élus |
|---|---|---|---|
| A1 | 156 | 48.08% | S. Cantat, R. Carles, E. Saada |
| A2 | 1166 | 30.62% | |
| B1 | 230 | 38.70% | X. Caruso, Y. De Cornulier, Y. Privat |
| B2 | 1596 | 20.98% | H. Bierme, M. Gutnic |

Un deuxième tour est nécessaire pour élire les représentants du collège A2. Sont candidats : Fatiha Alabau-Boussouira, Christophe Berthon, Ahmad El Soufi, Xiaonan Ma, Yvan Martel.
Les électeurs du collège A2 recevront le matériel de vote courant juin. Les résultats seront affichés à l'issue du scrutin du 27 juin 2012.
Les résultats pour les élections des trois représentants du collège C (ITA) seront affichés à l'issue du scrutin du 28 juin 2012.
Des informations plus précises sont disponibles sur le site du CNRS :
`http ://www.dgdr.cnrs.fr/elections/scn/dispositif/modescrutin.htm`
À l'issue de ces élections, 7 personnes seront nommées par le ministère chargé de la recherche.

# Vie de la communauté

*par* Stéphane Descombes

## INVITÉS

*Laboratoire Manceau de Mathématiques, Université du Maine, Le Mans*

**Pavel CHIGANSKY**,
Department of Statistics, University of Jerusalem, Israel,
Du 08 mai 2012 au 06 juin 2012.
*Contacts :* Alexandre Popier `Alexandre.Popier@univ-lemans.fr`.

## HOMMAGES À DOMINIQUE BLANCHARD (1955-2012)

Communiqué par Olivier Guibé
Lab. de Mathématique R. Salem, Université de Rouen.

Dominique Blanchard est décédé subitement le 12 février 2012. La communauté mathématique, ses collègues et ses amis sont bouleversés.

Rigueur, précision et clarté éclairaient sa pratique des mathématiques. Conviction et tolérance animaient ses idées, bonne humeur et humour son rapport aux autres.

Il débute sa carrière par une thèse de troisième cycle soutenue en 1981 portant sur la justification de modèles de plaques en élasticité linéaire et non linéaire. L'environnement de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées le conduit à travailler sur d'autres sujets liés à la mécanique : transition de phase, milieu poreux, visco-élasticité.
Devenu chercheur au Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, Dominique soutient sa thèse d'Etat en 1986. Son travail porte sur l'étude de problèmes d'évolution en mécanique des milieux dissipatifs. Il est nommé professeur à l'Université de Rouen en 1990 et est à l'origine de la thématique "Analyse Complexe et Equations aux Dérivées Partielles" au sein de l'URA CNRS 1378 (aujourd'hui devenue Laboratoire de Mathématique Raphaël Salem).
Alors qu'il travaille sur les modèles de transition de phase dans les milieux poreux et sur des modèles de matériaux à mémoire de forme, il commence à étudier à la fin des années 80 les solutions renormalisées pour les problèmes paraboliques, sujet très nouveau. Il développe avec F. Murat les méthodes qui permettent de traiter de façon satisfaisante les problèmes paraboliques non linéaires à données seulement intégrables. Plusieurs thèses dans ce domaine seront soutenues à Rouen (H. Redwane, O. Guibé, M. Ben Cheikh, A. Attaoui et N. Bruyère). Durant une vingtaine d'années, les contributions de Dominique, seul et avec ses collaborateurs, notamment H. Redwane et A. Porretta, font avancer de façon essentielle à la compréhension des problèmes paraboliques à données peu régulières.
Dans les années 2000 il s'intéresse, avec A. Gaudiello et G. Griso, à des techniques de décomposition de champ, spécialement dans le cadre de l'élasticité des domaines minces (poutre, plaque, coque). Les méthodes qu'il emploie demandent une grande habileté de calcul et, comme toujours dans les travaux de Dominique, mêlent aspects mathématiques et mécaniques. Les applications en sont par exemple la résolution de questions d'homogénéisation de frontières oscillantes ainsi que des problèmes de jonction entre domaines minces et domaines tridimensionnels. Récemment Dominique aborde avec G. Griso une étude de modèles de coques minces en grandes déformations.

Dominique aura laissé son empreinte personnelle et scientifique sur notre laboratoire et nous ressentons douloureusement son absence. Nous adressons nos condoléances à sa famille. Nous pensons très fort à ses enfants.

Communiqué par Georges Griso
Chercheur associé au Laboratoire Jacques-Louis Lions (Paris 6).

Plus qu'un collègue, Dominique Blanchard était mon meilleur ami. Nous étions frères de science. Parler de lui ici, c'est aussi parler de moi, voilà pourquoi cette note sans sa signature est bien difficile et douloureuse.

Tout avait commencé il y a sept ans à Chevaleret. Devant nos steaks–aligots ou andouillettes–frites des vendredis (il avait un féroce appétit) il me parlait de

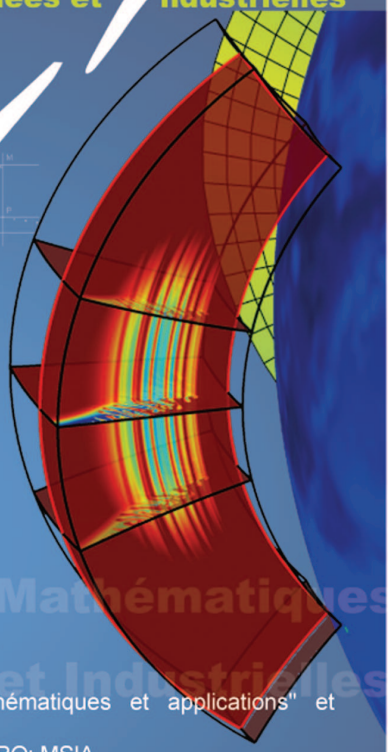
Louise, Camille et Grégoire. Pour ses enfants il pouvait annuler, écourter, interrompre une séance de travail. Il ne m'en avait pas voulu à nos débuts de mon manque de disponibilité. Il m'avait été d'un grand soutien, quant tout s'écroulait autour de moi. Nous parlions de nos vies. Avec un bon verre de vin ou une bière, les déboires de l'un finissaient en rigolades. L'expérience, les avis de l'autre éclairaient et aidaient l'un.

Nous partions ensuite, explorateurs statiques, à la découverte des contrées asymptotiques. Des forêts de poutres, plaques, coques élastiques, inhospitalières pour d'autres, nous avions fait nos terrains de jeu, nos compagnons étaient les Korn, Poincaré et Wirtinger. Nulles structures, des plus fines aux plus subtiles, nulles jonctions ne résistaient aux puissants outils que nous avions patiemment forgés. Et c'est ainsi que, presque sûrement, mêlant efforts et contraintes, nous parcourions des territoires aux lointaines frontières ; à chacun de nos pas celles–ci s'éloignaient, et de limites faibles en convergences fortes nous avions entrepris à quatre doigts sur notre clavier d'en relater les aventures. Un périple à peine fini, le ou les projets suivants étaient déjà bien avancés ; malgré nos hésitations nous finissions toujours par choisir les plus belles destinations. On était heureux, on s'amusait bien, fiers du travail accompli.

Vendredi 10 février 2012, sans le savoir nous avons mis un double point final au bas de notre dernier récit ; le lundi suivant nous devions le relire et le déposer. Les précipices, les *game over* nous étaient familiers, on ne gagne pas à tous les coups. On repartait toujours plus forts. La vraie vie est plus impitoyable. Mince consolation, il doit maintenant savoir si l'infimum est un minimum.

Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles

SMAI

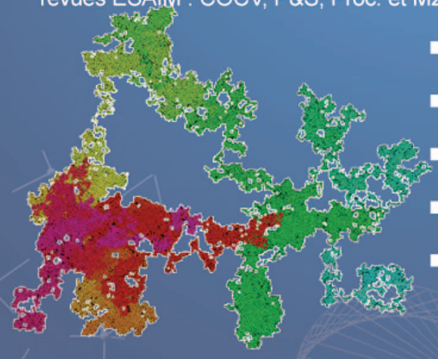


**Nos objectifs :**

- promouvoir la recherche en mathématiques appliquées
- contribuer à la réflexion sur l'enseignement des mathématiques à tous les niveaux
- améliorer les interfaces entre la recherche, l'université et l'entreprise
- intensifier les symbioses entre diverses branches des mathématiques appliquées et les interactions avec d'autres disciplines scientifiques ou technologiques

**Nos activités principales :**

- édition scientifique : collection de livres "Mathématiques et applications" et "Mathématiques appliquées pour le Master/SMAI";
revues ESAIM : COCV, P&S, Proc. et M2AN; RAIRO:RO; MSIA



- organisation de congrès et de journées industrielles
- en liaison avec le monde industriel, l'école d'été du CEMRACS
- bulletin de liaison Matapli pour nos adhérents
- participation à des actions vers la communauté mathématique et vers le grand public
- actions communes avec des sociétés étrangères de mathématiques appliquées

SMAI

http://smai.emath.fr

SMAI Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris cedex 05
Tel : 01 44 27 66 61

# Comptes rendus de manifestations

## COMPTE-RENDU DE LA RENCONTRE SMAI MATH-INDUSTRIE "INNOVATION ÉNERGÉTIQUE ET MATHÉMATIQUES"

*par* Marie Postel
LJLL-UPMC et SMAI

L'énergie est un domaine socio-économique très important en tant que domaine applicatif pour les sciences, qui fait appel à plusieurs disciplines. Pour les mathématiques, plusieurs branches sont concernées, à la fois déterministes et stochastiques, comprenant entre autre la modélisation des ressources, et l'optimisation de leur exploitation.

La rencontre SMAI Math-industrie *"Innovation énergétique et mathématiques"* qui s'est tenue à l'IHP le 10 avril 2012 a mis en lumière le besoin de faire interagir les acteurs du secteur avec les chercheurs mathématiciens en invitant des "start-ups" et PME spécialisées en innovation énergétique à venir présenter leurs problématiques devant un public composé à parts égales d'universitaires et d'industriels (plus de quatre-vingt présents). La rencontre a commencé par un exposé introductif mené conjointement par Alain Bensoussan (Académie des Sciences et University of Texas at Dallas) et Michael Salomon (Clean Horizon). Trois ateliers d'une heure se sont ensuite succédés. L'étude de l'impact de la prévision météorologique sur la consommation d'énergie est le coeur de métier de METNEXT qui propose aux entreprises des outils logiciels basés sur des modèles complexes dont Sophie Morel a présenté quelques aspects. Dorian Tourin-Lebret, co-fondateur de Smart-Impulse, a ensuite présenté l'innovation technologique à l'origine de son entreprise, un compteur intelligent permettant d'identifier les postes plus gourmands en énergie dans une installation. Enfin, Thierry Bourrillon a développé sur un exemple mis en oeuvre par EMBIX le concept du pilotage énergétique en milieu urbain où les mots clefs "smart-grid" et "éco-quartier" ont pris un sens concret, permettant d'optimiser les ressources en s'appuyant sur une modélisation fine de la demande et de sa flexibilité. Après chaque exposé d'une vingtaine de minutes, un échange prolongé avec l'auditoire et certains spécialistes invités spécifiquement a été animé successivement par Pierre Bertrand (Université de Clermont-Ferrand), Gérard Biau (UPMC) et Étienne de Rocquigny (ECP et SMAI). Ces débats ont permis de creuser des directions où les mathématiques pourraient apporter une valeur ajoutée à ces innovations technologiques ou méthodologiques.

Une table ronde animée par Étienne de Rocquigny (ECP et SMAI), David Dornbusch (Clean Tuesday), Alain Bensoussan (University of Texas at Dallas), Michel Bercovier (Hebrew University of Jerusalem) et D. Moity (Pôle Systematic) a permis d'identifier quelques secteurs de recherche en energie, ressources et technologies propres (ENR Clean-Tech) où les mathématiques devraient intervenir davantage et prioritairement.

Cette rencontre était organisée par Étienne de Rocquigny (ECP et SMAI), Pierre Bertrand (Clermont-Ferrand), David Dornbusch (Clean Tuesday), Marie Postel (LJLL-UPMC et SMAI). Nous remercions les sponsors de la rencontre, AMIES et Systematic, et notre hôte l'Institut Henri Poincaré.

Les diaporamas des exposés sont disponibles sur le site web de la SMAI
http ://smai.emath.fr/congres/journees/ER/

## COMPTE RENDU DE LA CONFÉRENCE TOPICS FROM THE THEORY OF NAVIER-STOKES SYSTEM

Les 22 et 23 mars 2012 s'est déroulée la conférence "Topics from the theory of Navier-Stokes system" à l'Université du Littoral à Calais, organisée par Paul Deuring (Université du Littoral), Serge Nicaise (Université de Valenciennes) et Werner Varnhorn (Université de Kassel, Allemagne). Des chercheurs français, allemands et tchèques ont exposé leurs travaux portant sur des modèles mathématiques des écoulements de fluide. Plus précisément, faisaient partie des orateurs : C. Amrouche (Pau), J. Bemelmans (Aachen), P. Kucera (Praha), D. Medkovà (Praha), V. Milisic (Paris), J. Naumann (Berlin), Š. Necasová (Praha), J. Neustupa (Praha), J. Saal (Darmstadt), N. Seloula (Bordeaux), M. Specovius (Kassel), G. Thäter (Karlsruhe) et J. Wolf (Magdeburg).

# Hommage à Henri Poincaré

*par* Jean-Michel Coron
Laboratoire Jacques-Louis Lions,
Université Pierre et Marie Curie,
4 place Jussieu, 75005 Paris,
coron@ann.jussieu.fr

Henri Poincaré est un mathématicien d'exception et il est considéré comme l'un des derniers mathématiciens universels. Il a apporté des contributions considérables à des branches très variées des mathématiques, comme, par exemple, les systèmes dynamiques, la topologie algébrique, la théorie des fonctions automorphes et la géométrie hyperbolique. C'est aussi un astronome, un physicien et un philosophe accompli.

Pour commémorer le centenaire de la disparition de Poincaré, Matapli a demandé à quatre mathématiciens de parler de quelques facettes de ce géant. Grégoire Allaire a choisi de nous parler de la célèbre inégalité de Poincaré. Ivar Ekeland nous donne des points bibliographiques importants et s'interroge sur l'évolution des institutions et de la recherche scientifique. Jean Mawhin se concentre sur l'équation des télégraphistes. Thierry Paul commente l'attitude de Poincaré face aux résultats "négatifs". Nous les remercions pour ces quatre textes passionnants.

De nombreuses manifestations se déroulent pendant cette année Poincaré, en particulier une exposition itinérante, un cycle de conférences hebdomadaires en octobre et novembre, une journée grand public le 17 novembre, un colloque scientifique du 19 au 23 novembre et un séminaire Poincaré le 24 novembre. Pour plus de renseignements sur ces manifestations et d'autres, voir le site web à www.poincare.fr

# Poincaré a-t-il existé ?

*par* Ivar Ekeland
CEREMADE, Université Paris-Dauphine
ekeland@ceremade.dauphine.fr

Il était une fois un petit garçon qui s'appelait Henri. Il naquit à Nancy en 1854, sous le Second Empire, et il eut la douleur de connaître les horreurs de la guerre, l'occupation allemande et finalement l'annexion. Comme beaucoup de Lorrains sa famille choisit la France, et Henri quitta Nancy en 1873.

Il devint un grand citoyen. Il obtint son bac en 1871, et fit Math Sup et Math Spé au Lycée de Nancy. Il obtint deux fois le prix d'honneur au Concours Général, et en 1873 il fut reçu major à l'Ecole Polytechnique et 5ème à l'Ecole Normale Supérieure. Il choisit la première, en sortit second en 1875 et rentra donc à l'Ecole des Mines, dont il sortit en 1878 comme ingénieur des mines. La même année il passa sa thèse de mathématiques, et fut nommé chargé du cours d'analyse mathématique à Caen. Dès lors sa carrière universitaire fut météorique. Maître de conférences d'analyse à Paris en 1881, titulaire de la chaire de mécanique physique et expérimentale en 1885, titulaire de la chaire de physique mathématique et calcul de probabilités en 1886, élu à l'Académie des Sciences en 1887, ingénieur en chef des mines en 1893, titulaire de la chaire d'astronomie mathématique et de mécanique céleste à la Sorbonne en 1896, président du Bureau des Longitudes en 1899, professeur d'électricité théorique à l'Ecole Professionnelle Supérieure des Postes et des Télégraphes en 1902, commandeur de la Légion d'Honneur en 1903, professeur honoraire d'astronomie générale à l'Ecole Polytechnique en 1904, élu à l'Académie Française en 1908 sur le fauteuil de Sully Prudhomme.

Il devint un grand patriote. Il avait été profondément marqué par le désastre de 1870. Invité à présider le dix-neuvième banquet annuel de l'Association Générale des Etudiants de Paris, le 13 mai 1903, il déclarait : "Cruellement frappés au moment d'arriver à l'âge d'homme, mes contemporains se sont mis à l'ouvrage pour réparer le désastre. Les Français avaient beau s'entre-déchirer, ils avaient du moins un espoir commun. Les années ont passé, et la délivrance n'est pas venue. Et alors nous nous demandons si vous avez hérité de ce rêve, sans quoi tous nos sacrifices auraient été inutiles. Peut-être regardez-vous d'un oeil presque indifférent ce qui nous paraissait l'intolérable injustice, peut-être ce qui était pour nous une plaie saignante n'est-il pour vous qu'un fâcheux souvenir historique, comme les lointains désatres d'Azincourt ou de Pavie."[1] Aussi était-il sans illusion sur l'Allemagne, et mettait-il sa confiance dans l'armée : "Le jour ou la France n'aura

[1]Poincaré, "Discours au banquet du 11 mai", in "L'université de Paris" , 18ème année, numéro 4 (117), 1 juin 1903

plus de soldats, mais seulement des raisonneurs, Guillaume II sera le maître de l'Europe... Ne vous imaginez pas que ce que les Allemands appellent droit ou liberté, ce soit la même chose que ce que nous appelons des mêmes noms. Et quand même tous les peuples marcheraient vers un même idéal, cela ne nous dispenserait pas d'être forts. Si cela est vrai, et si cet idéal est le nôtre, c'est nous qui marchons en tête. Il faut alors que les autres nous suivent. Ils nous suivrons si nous sommes forts. Ils ne nous suivrons pas si nous sommes faibles. Oublier la patrie, ce serait donc aussi trahir l'idéal et la vérité. Sans les soldats de l'an II, que serait-il resté de la Révolution ?"[2]

Il devint un grand détective. Jeune ingénieur des mines, il fut chargé de l'enquête après la catastrophe du puits de Magny, le 1 Septembre 1879, où un coup de grisou avait causé la mort de 16 mineurs. Au terme d'une analyse minutieuse, qui fut considérée comme un modèle du genre, et non sans avoir fait montre d'un certain courage personnel, il identifie la lampe 476, qui avait été endommagée par un coup de pic, comme la cause du désastre. Mais cette lampe, qui avait été remise au mineur Pautot, avait été trouvée près du corps du mineur Perroz, qui était chargé de remplir les wagonnets et n'avait pas de pic. Et Poincaré de conclure dans son rapport que Pautot avait endommagé sa lampe sans s'en apercevoir, puis avait été parler à Perroz, et s'était trompé de lampe en repartant, un moment d'inattention qui devait coûter très cher ! Devenu une personnalité importante, il apporta une contribution décisive au rétablissement de la vérité dans l'affaire Dreyfus, où par deux fois il servit de témoin à décharge. Comme on le sait, toute l'accusation tournait autour du "bordereau", document manuscrit trouvé dans la corbeille de l'attaché militaire allemand. Bertillon, l'inventeur des empreintes digitales, avait voulu démontrer que Dreyfus en était l'auteur ; sa démonstration combinait une analyse graphologique avec le calcul des probabilités. Dans un volumineux et méticuleux rapport de 100 pages, élaboré avec Paul Appell et Gaston Darboux, et remis en 1904 à la Cour de Cassation, Henri montra que les arguments de Bertillon n'avaient pas de valeur probante, et qu'il n'en subsistait aucun élément susceptible d'incriminer l'accusé, conclusions qui furent reprises par la Cour dans son arrêt définitif réhabilitant le capitaine Dreyfus.

Il devint un grand ingénieur. Il fut pendant de longues années au comité de rédaction de la revue "*L'éclairage électrique*", devenue en 1908 "*La Lumière électrique*", dont le titre indique bien les préoccupations très concrètes, et il y contribua très régulièrement. C'était l'époque où l'on découvrait les possibilités qu'offrait le signal électrique pour la communication à distance, avec ou sans fil. Henri en comprit l'importance scientifique, industrielle et stratégique. Scientifique, car on pouvait désormais, grâce aux cables sous-marins, synchroniser presque instantanément les horloges en Europe et en Amérique, au lieu d'embarquer des chronomètres sur les navires transatlantiques et de leur faire subir les aléas d'une

[2] ibidem

traversée de plusieurs jours. Industrielle, car cette technologie nouvelle nécessitait des investissements importants : il fallait construire des câbles capables de résister aux grandes profondeurs et de transmettre le signal sur des milliers de kilomètres, et il fallait aussi construire des navires pour les poser. Stratégiques, car l'opérateur du câble peut écouter, voire même interrompre, les communications, comme les Français en firent l'amère expérience : lors de la crise de Fachoda, le cable Paris-Dakar cessa mystérieusement de fonctionner. Dans ses articles, et dans les leçons professées à l'Ecole de Télégraphie, Henri résolut l'équation dite des télégraphistes, qui décrit la propagation du signal électrique dans un fil, et étudia également le récepteur téléphonique, mettant notamment en evidence le rôle des courants de Foucault dans la masse de l'aimant. Mais il étudia aussi la télégraphie sans fil, motivé par une expérience de Marconi, qui, en 1901, avait capté à Terre-Neuve un signal émis d'Angleterre. Il montra qu'il ne pouvait s'agir d'un phénomène de diffraction, et que si l'onde suivait la courbure de la Terre c'était pour une autre raison (la surface de l'océan et l'ionosphère, toutes deux conductrices, fonctionnant en guide d'ondes).

Il devint un grand astronome. Son livre "*Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*" est resté un des grands classiques de la littérature scientifique, et est considéré comme l'acte de naissance de la théorie du chaos. Il devint un grand physicien. Il montra le premier que les transformations de Lorentz forment un groupe, laissa son nom au groupe de Poincaré, et d'aucuns le considèrent comme le véritable père de la théorie de la relativité restreinte. Il rata de peu le prix Nobel de physique en 1910 (au profit de Van der Waals) et 1911 (au profit de Wien), et il l'aurait sans doute obtenu sans sa mort prématurée ; Einstein lui-même ne l'obtiendra qu'en 1922, non pour la relativité restreinte, mais pour l'analyse quantique de l'effet photoéléctrique. Il devint un grand mathématicien. Il découvrit les fonctions fuchsiennes, devenues depuis les formes automorphes, et il fonda l'*analysis situs*, devenue depuis la topologie algébrique. Il transforma la théorie des équations différentielles ordinaires : au lieu de chercher à les résoudre explicitement, il étudia les propriétés qualitatives des solutions, comme la stabilité ou la récurrence, fondant ainsi la théorie des systèmes dynamiques. Il devint un grand philosophe, bénéficiant à la fois de la reconnaissance critique et du succès populaire. Ses livres sur la connaissance scientifique se vendirent à des milliers d'exemplaires, et sont encore édités et étudiés aujourd'hui. Bref, il devint un grand savant [3]

Sa mort, en 1912, eut un retentissement national, dont la presse se fit largement l'écho. Le président de la République et le président de la Chambre se firent représenter aux obsèques, le président du Sénat et nombre de ministres étaient présents, et une foule immense, où se mêlaient des personnalités du monde scien-

[3]Je renvoie à l'excellent ouvrage collectif "L'héritage scientifique de Poincaré" (Charpentier, Ghys, Lesne ed. ), chez Belin, pour une analyse précise et moderne de l'oeuvre scientifique d'Henri Poincaré

tifique et culturel, suivirent la bière. L'inhumation fut précédée d'une série de discours prononcés par les représentants des nombreuses institutions qu'il avait présidées ou dont il état membre. En dépit de ce que dirent, et pensèrent, toutes ces éloquentes personnalités, ce n'était pas un adieu. L'année même de sa mort, il avait publié un article où il indiquait un problème sur lequel il avait réfléchi, mais qu'il n'avait pu résoudre : on se donne dans le plan un anneau (région comprise entre deux cercles concentriques), et une transformation continue qui préserve l'aire, qui préserve chacun des bords, mais qui fait tourner ceux-ci dans des sens opposés ; montrer qu'elle a deux points fixes au moins. Henri indiquait une démonstration magnifique, mais incomplète, et exprimait l'espoir qu'un mathématicien plus jeune réussisse là où il avait échoué. L'année suivante, 1913, George D. Birkhoff publiait une démonstration de ce qui est désormais connu comme le "dernier théorème de Poincaré". Mais l'histoire ne devait pas en rester là. Dans un commentaire des œuvres complètes de Poincaré, Vladimir Arnold conjectura que ce théorème se généralisait en dimension supérieure sous la forme suivante : toute transformation symplectique du tore $T^2n$, homologue à l'identité, possède au moins 2n+1 points fixes. Ce fut démontré en 1983 par Charlie Conley et Eduard Zehnder. Henri continue donc à inspirer les jeunes générations, et poursuit une existence posthume.

Ceci est bien évidemment un conte de fées : on ne peut guère concevoir un être humain aussi complet et aussi parfait. Et un conte de fées qui finit bien : le héros vit longtemps et a beaucoup de fils et de filles spirituels. Il ne faut pas croire qu'il en est toujours ainsi ! A titre d'exemple, voici un conte de fées qui finit mal. Il était une fois un petit garçon qui s'appelait Evariste. Il eut une scolarité agitée, en dépit de dons évidents pour les mathématiques : dès l'âge de 17 ans, il publia dans les Annales de Mathématiques Pures et Appliquées un article sur les fonctions continues périodiques, et à 18 ans il envoya à l'Académie des Sciences un mémoire sur la résolubilité par radicaux des équations algébriques. Ce mémoire fut perdu par Fourier, qui en était le rapporteur, et le jeune Evariste en conçut une grande amertume. Il fut collé deux fois à l'Ecole Polytechnique, mais fut finalement reçu à l'Ecole Normale Supérieure. Cela ne dura pas longtemps : il en fut expulsé dès l'année suivante pour avoir publié dans la Gazette des Ecoles un article attaquant l'engagement politique à droite du directeur de l'Ecole. Malheureusement ce directeur avait bien senti le vent, c'est la réaction louis-philipparde qui s'installe, et ce républicain d'Evariste, qui s'était mis en tête de réformer la société au lieu de se consacrer tranquillement à la science, passa le plus clair de l'année suivante en prison ou en maison de santé. Il y trouva les loisirs nécessaires pour faire des mathématiques, pas trop longtemps hélas, car il fut tué en duel à vingt et un ans dans des circonstances mal éclaircies. Il fut inhumé à la fosse commune du cimetière Montparnasse devant un imposant déploiement de police, déployé non pas pour l'honorer, mais pour prévenir une éventuelle émeute. Après sa mort, son génie fut reconnu : c'est le père des mathématiques modernes, le premier qui a

compris que la structure prend le pas sur le calcul. Mais cela, il ne le saura jamais. Dans sa dernière lettre, il écrit : "Gardez mon souvenir, puisque le sort ne m'a pas donné assez de vie pour que la patrie sache mon nom."

Pourquoi certains contes se terminent-ils bien et d'autres mal ? Comme chacun sait, cela dépend des fées qui se sont penchées sur le berceau du nouveau-né. Dans le cas de Poincaré, c'étaient toutes de bonnes fées. Il y avait la bonne fée Gracieuse, de qui il tint son génie scientifique, mais il y avait aussi la bonne fée Troisième République. Celle-ci avait une revanche à prendre sur la vilaine fée Allemagne, et avait décidé d'y mettre les moyens. Pour pouvoir reprendre l'Alsace-Lorraine et effacer l'humiliation de 1870, il fallait construire une puissance industrielle capable de battre militairement l'Empire Allemand. Mais la puissance industrielle suppose aussi une puissance intellectuelle : il faut des ingénieurs capables de diriger les mines et les usines, et des chercheurs capables de développer de nouvelles technologies. D'où l'importance accordée par les gouvernements successifs aux problèmes d'éducation. Il suffit de se promener dans le Quartier Latin pour voir la trace des investissements énormes de la Troisième République dans l'enseignement et la recherche : les bâtiments de la Sorbonne (à l'exception de la chapelle), le lycée Fénelon, l'Ecole des Mines, et tant d'autres, datent tous de cette époque. La considération accordée aux professeurs est à la mesure des efforts consentis. Poincaré en est un illustre exemple, mais Pasteur encore plus, qui terminera grand-croix de la Légion d'Honneur. Pour encourager la jeunesse à s'engager dans certaines voies, la République a besoin de héros à proposer en exemple, et elle n'hésite donc pas à les couvrir d'honneurs, afin de marquer par ces distinctions visibles l'importance qu'elle attache à des exploits trop éloignés de l'expérience commune pour que les non-initiés s'en apercoivent d'eux-mêmes.

La Troisème République, comme l'Eglise Catholique, a ses saints. Autour de Poincaré il s'est constitué une véritable hagiographie. Cela commence, comme d'habitude, par les évangiles de l'enfance, où l'on relate les épisodes où le futur saint laisse pressentir sa grandeur future. Lorsque Gaston Darboux, secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, prononce l'éloge de Poincaré en séance publique [4], un an aprés sa mort, il commence par établir sa généalogie, comme il est d'usage, puis il passe à l'intéressé lui-même, rapporte qu'il parla très tôt, qu'il lisait beaucoup, qu'il se rappelait tout ce qu'il lisait, qu'il fut retardé à l'âge de cinq ans par une diphtérie qui le laissa faible et timide, et qu'il fuyait la compagnie des garçons de son âge dont il redoutait les brutalités. Puis il relate ses exploits en classe de neuvième, raconte qu'il faillit être collé au bac scientifique parce qu'il n'avait pas su sommer une série géométrique, parle longuement des deux oraux de mathématiques qu'il passa au concours de l'Ecole Polytechnique devant un grand public, attiré par sa réputation déjà établie, décrit les réactions émerveillées des examinateurs. De nos jours encore, les étudiants de classe pré-

[4] http ://www.annales.org/archives/x/hpoincar.html

paratoire se racontent les exploits, réels ou supposés, du thaumaturge, comment il avait résolu analytiquement un problème de géométrie descriptive, mais s'était trompé de sens en reportant la solution sur l'épure, ou comment il avait été reçu malgré une note éliminatoire en gymnastique. Le reste de la carrière de Poincaré confirme les promesses de ses jeunes années, les honneurs et les responsabilités pleuvent sur lui, et la célébrité suit. Le prix du roi Oscar II bénéficie d'une couverture médiatique très importante, et le couronnement de Poincaré est présenté comme un succès majeur de la science française. Sa réputation est internationale : quand il va rendre visite à Mittag-Leffler en Suède en 1908, les journaux consacrent à l'événement plus de 60 articles !

Il a bien fallu un petit coup de pouce de temps en temps. On pardonnait beaucoup de choses à Poincaré, et on effaçait ses erreurs. Dans son éloge, cité ci-dessus, Darboux explique déjà qu'il avait failli être collé au bac à cause des mathématiques : Il paraît qu'il était arrivé en retard et avait mal compris le sujet. Heureusement, il avait déjà sa petite réputation. "Tout autre élève que lui, dit le Président du jury en proclamant le nom des admissibles, aurait été refusé pour sa composition de Mathématiques". Quant Mittag-Leffler apprend que le mémoire qui avait gagné le prix du roi Oscar II contenait une erreur, il lui écrit ceci [5] : "Je ne vous cache point que j'ai été extrêmement perplexe en apprenant hier de M. Phragmén les nouvelles que vous lui avez communiqué[es]. Ce n'est pas que je doute que votre mémoire sera dans tous les cas regardé [comme] un ouvrage de génie par la pluralité des géomètres et qu'il sera le point de départ de tous les efforts qu'on fera dorénavant dans la mécanique céleste. Ne croyez pas donc que je regrette le prix qui a été bien dignement placé. Mais voici le plus grand malheur. Votre dépêche est arrivée trop tard et le mémoire était déjà distribué". En d'autres termes, le point de vue de Mittag-Leffler est que tout ce qu'écrit Poincaré est génial par définition, et que le seul problème est que les grincheux qui ne le reconnaitraient pas d'emblée risquent d'avoir entre les mains de quoi étayer leurs soupçons. Il va donc faire tout ce qu'il est humainement possible de faire pour couvrir Poincaré, en récupérant les exemplaires déjà distribués sous des prétextes fallacieux, et en les détruisant [6]. On ne peut que sympathiser avec ce mauvais coucheur de Weierstrass, qui se permit d'écrire qu'en Allemagne, la coutume était de publier les mémoires couronnés dans l'état même où ils étaient lorsqu'ils avaient été jugés dignes du prix.

Bien sûr, on s'attend en échange à ce que l'intéressé joue le jeu. C'est un jeu complexe de dons et de contre-dons implicites, la République contribuant à la construction de l'image publique du savant, et celui-ci légitimant par son action les valeurs et les institutions de celle-ci. Nul mieux que Poincaré ne sut incarner les valeurs de la Troisième République, et des diverses institutions auxquelles il appartint. Polytechnicien, académicien, membre du Bureau des Longitudes, il ac-

[5] http ://www.univ-nancy2.fr/poincare/chp/hpcochron.xml. Lettre du 12/04/1889

[6] june Barrow-Green, Poincaré and the Three Body Problem, AMS, 1996

cepta toutes les responsabilités qui venaient avec ces titres prestigieux, il alla sur le terrain comme ingénieur des mines, il participa à une multitude de jurys de thèse et de prix, et écrivit les rapports correspondants, il fit les éloges des morts, il fit des discours patriotiques aux étudiants, il travailla dans des commissions très techniques chargées de synchroniser les heures et d'établir la différence de longitude entre Paris et Londres ou New-York, il prit la responsabilité scientifique de l'expédition qui alla sur les traces de La Condamine mesurer l'arc de méridien en Equateur, et on ne compte plus les cours qu'il fit ni les livres qu'il publia.

Le pauvre Galois, par contre, eut moins de chance. La fée Gracieuse était là, mais la fée Carabosse s'était invitée, en la personne de la Restauration : il naquit sous Louis XVIII et il mourut sous Louis-Philippe, période peu propice au développement des sciences, ou même à l'avancement des jeunes gens pauvres. C'est l'époque décrite par Stendhal dans "*Le Rouge et le Noir*", où Julien Sorel, en dépit de ses qualités, ne trouve aucune issue digne de son ambition. La formule de Guizot , "Enrichissez-vous", ne résume pas complètement cette époque : pour réussir, il ne fallait pas seulement être riche, il fallait aussi avoir le sang bleu. Tout le reste était valetaille. Pas d'encouragement pour les sciences donc, bien au contraire, pas d'enthousiasme pour les professeurs, encore moins pour les étudiants, soupçonnés d'être républicains, pas de grand projet collectif pour le pays, qui depuis le Congrès de Vienne avait trouvé sa place définitive en Europe. Galois n'avait pas sa place dans le monde de la Sainte-Alliance.

Et si le petit Henri, ou le petit Evariste, naissaient aujourd'hui, quelles fées se pencheraient sur leur berceau ? La fée Gracieuse serait toujours là, certes, mais qui d'autre ? La Troisième République a encore quelques beaux restes : tout notre système éducatif, collèges, lycées, universités et grandes écoles, est celui qu'elle nous a légué, et Poincaré ne s'y sentirait guère dépaysé. Il serait sans doute étonné par le nombre des élèves et des étudiants, et par l'importance prise par les écoles de commerce. Il regretterait la disparition de la Sorbonne, mais il retrouverait l'Ecole Polytechnique avec plaisir. Mais tout cela est une coquille qui se vide peu à peu. L'état se désintéresse de l'enseignement supérieur et de la recherche, et pousse universités et centres de recherche à trouver leur propre financement. De leur côté professeurs d'université et chercheurs regardent au-delà des frontières de la France : leur références sont internationales. La reconnaissance en mathématiques, c'est la médaille Fields ou le prix Abel, ce n'est plus la Légion d'Honneur ou une place à l'Académie Française. Dans de nombreuses disciplines, en économie par exemple, les carrières deviennent internationales : on prend un poste aux Etats-Unis, quitte à revenir en Europe si on a atteint une stature suffisante pour avoir une proposition intéressante de la LSE oud'un établissement analogue, ou

au contraire à partir pour Hong-Kong ou la Corée si l'on juge la vie là-bas plus intéressante.

Tout cela est très bon pour le petit Evariste, qui pourra toujours chercher fortune ailleurs si l'Ecole Normale Supérieure l'expulse pour insulte au directeur, mais moins pour le petit Henri, qui se sentira un peu abandonné à lui-même, en bon élève qui ne sait pas trop à quel saint se vouer : la voie n'est plus toute tracée, il ne suffit pas d'impressioner les examinateurs à l'Ecole Polytechnique pour que votre réputation soit faite à New-York ou à Pékin. Dois-je même lui souhaiter de faire de la science ? De nos jours, on a beaucoup plus d'influence, et on gagne beaucoup plus d'argent, en étant dirigeant d'une grande entreprise, comme Total, et il n'est pas sûr que ce soit plus difficile que d'être professeur au Collège de France. Et si le petit Henri fait de la science, doit-il faire des mathématiques ?

Poincaré a vécu à une époque où la science avait atteint une certaine maturité. Les industries principales étaient les industries mécaniques de la révolution industrielle, et la physique était basée sur la mécanique classique. Il se situe dans la continuité de Galilée et de Newton, et les travaux des grands mathématiciens du dix-huitième et du dix-neuvième siècle, Euler, Lagrange, Jacobi, Hamilton, sont toujours d'actualité. Il meurt au moment d'une rupture épistémologique : la mécanique quantique supplante la mécanique classique, l'univers relativiste supplante l'univers galiléen. Au siècle suivant, les sciences du vivant et les sciences sociales supplanteront les sciences physiques : la grande révolution scientifique du vingtième siècle est sans conteste la découverte de la double hélice et des mécanismes de l'hérédité. A toutes ces transformations, il faut ajouter l'apparition d'outils entièrement nouveaux, l'informatique et l'internet, qui nous annoncent peut-être une révolution épistémologique analoque à celle dont Poincaré a vu l'aube. Non, décidément je n'ai pas de conseil à donner au petit Henri. Bonne chance, mon gars !

# Poincaré face au négatif : une méthodologie ?

*par* Thierry Paul
CNRS et CMLS
Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau cedex
paul@math.polytechnique.fr

**Résumé**

Poincaré a eu au début de sa carrière lors de l'*erreur* du prix du Roi de Suède, et à la fin de sa vie dans un passionnant article sur les quanta, l'occasion de se confronter à des résultats négatifs. Il a d'ailleurs lourdement insisté sur cette (prétendue) négativité dans plusieurs écrits. Nous essayons dans ce court article de cibler ce qui suscite l'intérêt du négatif chez Poincaré. Nous évoquons comment il se pourrait qu'il y ait chez lui une véritable méthodologie de la dynamique du négatif, plutôt qu'une vision classique de la dualité positif/négatif.

## 1 Introduction

Poincaré termine l'introduction de son mémoire sur les trois corps par la phrase sibylline suivante

*"J'attire l'attention du lecteur sur les résultats négatifs présents dans ce mémoire...".*

Sibylline, cette phrase l'est assurément si l'on songe aux deux cents pages qui suivent cette introduction. Mais cette phrase est aussi et surtout énigmatique. Énigmatique car placée à la fin de l'introduction d'un second mémoire succédant à un premier, positif celui-là, et incorrect, ou au moins incomplet.
Qu'est-ce qu'un résultat négatif pour Poincaré ? Nous reviendrons sur cette question dans la dernière partie du présent texte, mais signalons dès à présent que LE résultat négatif du mémoire en question, celui qui s'opposerait au résultat positif du premier mémoire, serait la non intégrabilité du problème des trois corps. Un fait que l'on peut voir comme négatif, mais aussi comme positif : c'est tout simplement un énoncé. Or Poincaré n'attire pas notre attention sur UN résultat négatif, mais plutôt sur LES résultats négatifs présents dans le mémoire. C'est-à-dire sur un ensemble de faits qui, bien que vus comme négatifs par rapport à une problématique laplacienne préétablie et confortable pour une certaine vision du monde, vont déboucher sur un changement de paradigme aux immenses possibilités. Il est donc bien question ici, plus que d'une ontologie du positif et du négatif, d'une méthodologie d'étude de la flèche qui va de l'un à l'autre.

A l'autre extrémité de sa vie scientifique, et à la fin de sa vie tout court, se situent deux articles sur la théorie des quanta où Poincaré procède de la même attitude. Il s'agit pour lui d'essayer de dériver la formule de Planck à partir d'échanges d'énergie conduits seulement par des équations différentielles, c'est-à-dire sans utiliser l'hypothèse des quanta qui ne retient que des valeurs discrètes. Ici aussi la dérivation de la formule de Planck dans le paradigme continu est réconfortante et se voudrait rassurante vis-à-vis d'un certain conservatisme dont nous reparlerons plus loin. Mais Poincaré va "faillir à la tache" selon lui, et va échouer dans cette tentative : il va effectivement montrer que le résultat est négatif dans le sens que les seuls échanges énergétiques conduisant à la formule de Planck.... sont précisément ceux qui implémentent l'hypothèse des quanta.
La mort l'a empêché d'aller plus loin et de nous livrer, peut-être, un nouveau paradigme qu'il pressent néanmoins dans l'introduction de l'un des deux articles

[Si l'hypothèse de M. Planck était vraie,] "*les phénomènes physiques cesseraient d'obéir à des lois exprimables par des équations différentielles, et ce serait là, sans doute, la plus grande révolution et la plus profonde que la philosophie naturelle ait subie depuis Newton*".

Cette révolution naitra véritablement quatorze ans plus tard dans le discret tout d'abord (Heisenberg), puis un an après dans le continu (Schrödinger). En 1913 Niels Bohr donnait son modèle planétaire de l'atome d'hydrogène et la non-intégrabilité de l'atome d'hélium, les trois corps quantiques, allait tracer la (longue) voie vers la mécanique des matrices. Poincaré était mort depuis un an. Parions qu'il se serait passionné pour cette superposition de deux problèmes qui occupèrent sa jeunesse pour l'un et sa maturité pour le second.
Mais si l'on veut vraiment comprendre le rapport de Poincaré au négatif, si l'on veut comprendre, par exemple, pourquoi il affuble de ce qualificatif généralement teinté d'insatisfaction les résultat du mémoire d'Acta -200 pages- et de l'article -30 pages- du Journal de Physique Théorique et Appliquée, il faut penser que, dans ces articles et d'autres sur les mêmes sujets, Poincaré s'intéresse plus à la dynamique de la preuve d'un résultat qu'au résultat lui-même. La dynamique (positive elle) qui amène une série à diverger, de même que le calcul (positif lui aussi) de la loi guidant les échanges énergétiques entre molécules et résonateurs sont plus importants aux yeux de Poincaré que la divergence de la série elle-même, qui détruit l'intégrabilité, et la forme même de la loi d'échange, qui valide l'hypothèse des quanta refusée a priori. Poincaré semble rester distant par rapport au résultat afin de pouvoir le qualifier de négatif sans aucune connotation dépréciative. Et s'il ne voit pas en négatif le négatif, c'est qu'il a su développer une méthodologie de déconstruction de l'erreur, du faux, qui ne s'appuie pas sur la perspective (morale en fait) de corriger.

Une méthodologie du négatif intrinsèque, en somme.

## 2 Mathématicien face à la physique

La physique a eu, on le sait, une importance considérable pour Poincaré. Dans son magnifique texte de Saint-Louis [20], lu lors du "Congrès d'Art et de Sciences", Poincaré aborde l'histoire récente de ce qu'il appelle la physique mathématique et qui est en fait ce que nous appelons de nos jours la physique théorique, la physique mathématisée livrée par la culture classique. Et il l'aborde sous l'angle de la crise, crise dont il envisage patiemment différentes issues, mais aussi pour laquelle il n'exclut pas une "fatal error".
Je ne discuterai bien sûr pas ici la valeur épistémologique de ce texte, mais je vais seulement essayer d'en souligner quelques irisations qui vont dans le sens du "négatif". Poincaré y parle dès la première page de crise qu'il souhaite analyser et pour laquelle, s'il *"répugne à donner un pronostic"*, il ne peut se *"dispenser d'[établir] un petit diagnostic"*. On voit bien là la distance qu'il prend avec la physique, et son gout pour la compréhension de l'erreur, du négatif.
Il me semble y avoir dans le choix du terme "physique mathématique", qu'il faut encore une fois comprendre dans le vocabulaire de notre époque par "physique théorique", la clé même de la méthodologie du négatif de Poincaré. Pour lui "physique mathématique" veut bien dire "physique mathématisée", exprimable dans le langage mathématique. Et c'est bien précisément de ce langage (divergence, séries, etc.) que sortira le nouveau paradigme des systèmes dynamiques. Ce langage, Poincaré s'autorisera, si nécessaire, à le déconnecter de l'idée de rigueur. Nous le verrons clairement plus loin, lors de la discussion invoquant la masse de Dirac. Il s'agit pour lui d'une écriture de la physique (en crise vis-à-vis de ses principes) en termes mathématiques, en termes de mathématicien, qu'il va alors pouvoir analyser, décortiquer, déconstruire même, afin de comprendre les raisons du malaise. Mais le but sera non pas de corriger un tel malaise, mais plutôt de lui donner un sens réel dans un nouveau paradigme : la divergences des séries perturbatives ne sont plus un obstacle à l'intégrabilité, elles sont la source de la sensibilité aux conditions initiales. Le négatif mathématique se projette dans un nouvel espace où il devient créatif.
Dans l'article de Saint-Louis [20], Poincaré passe en revue les principes de la physique théorique classique et dresse un certain bilan alarmant. Il se montre aussi assez critique à l'égard de certaines solutions à la crise évoquée, ou de certaines possibilités de solutions.
Parlant d'une extension du principe de relativité invoquant un rôle important donné à l'éther, il conclut

*Mais, s'il peut tout expliquer, c'est qu'il nous permet de ne rien prévoir…*

Plus loin, à propos d'un rôle aussi avantageux attribué au radium

*Quelle explication avantageuse et combien elle est commode ! D'abord elle est invérifiable et par là même irréfutable…*

Ne croit-on pas entendre là la critique d'une théorie à la mode de la physique fondamentale contemporaine ?
Mais il me semble que si Poincaré, encore une fois, consacre quelques vingt-deux pages à une description méticuleuse et négative de la physique du début du XX$^e$ siècle, c'est qu'il se place là aussi à une certaine distance de la physique théorique. Bien sûr il dit *nous* en parlant des acteurs d'une possible sortie de crise, mais, au fond, il ne prend pas vraiment parti concernant la physique, il reste en dehors. Et cette distance me semble de la même nature que celle que j'évoquais à la fin du paragraphe précédent.
Je vais me restreindre dans ce petit texte à deux exemples que l'on pourrait faire relever des mathématiques appliquées au sens moderne du terme. Mais l'attitude de Poincaré vis-à-vis du négatif que je viens de décrire me semble être tout à fait présente dans son rapport à la géométrie, et surtout aux fondements des mathématiques, en particulier lors de ses échanges avec Hilbert. Mais c'est là une tout autre histoire.

# 3 Deux problèmes qui hantent Henri Poincaré

Poincaré s'est préoccupé de physique tout au long de sa vie. De physique fondamentale on le sait, mais aussi de physique plus appliquée, comme le gros volume sur la théorie des marées en témoigne.
Mais il est deux sujets que, aux deux extrémités de sa carrière, il va prendre à bras le corps dans une volonté, a posteriori pour la première et délibérément a priori pour la seconde, d'investigation de deux paradigmes physiques emblématiquement "à problèmes" : la mécanique céleste (face au principe laplacien de stabilité) et la théorie quantique (face à l'hypothèse de discrétisation des échanges d'énergie proposée par Planck).

## 3.1 La Mécanique Céleste

Le problème des trois corps "réduit", planaire, était, à l'époque où Poincaré s'y intéresse, un défi scientifique important : il s'agissait de savoir si une petite perturbation d'un système stable allait entamer cette stabilité. Il s'agissait même de démontrer le contraire, ce dont très peu doutaient.
Les astronomes avaient depuis longtemps abordé ce problème perturbatif par une grande virtuosité dans l'établissement de développements en série, baignant dans un paradigme de l'analytique. La convergence de telles séries non seulement n'était même pas évoquée par eux, mais la difficulté résidait déjà dans l'obtention explicite de telles séries, des termes de ces séries. On sait que Poincaré pensa tout d'abord avoir montré leur convergence, et obtint le fameux prix du roi de Suède, puis que l'on s'aperçut d'une erreur, et on connait l'issue et l'attitude qu'adopta le grand mathématicien. Mais l'une des choses les plus remarquables

lors de cette prise en charge du problème par Poincaré fut de comprendre le sens même d'une série perturbative.

*Ainsi pour prendre un exemple simple, considérons les deux séries qui ont pour terme général :*

$$\frac{1000^n}{1.2.3...n} \quad et \quad \frac{1.2.3...n}{1000^n}.$$

*Les géomètres [mathématiciens] diront que la première série converge, et même qu'elle converge rapidement, parce que le millionième terme est beaucoup plus petit que le 999 999ème ; mais regarderont la seconde comme divergente, parce que le terme général peut croître au delà de toute limite.*
*Les astronomes [physiciens], au contraire, regarderont la première série comme divergente, parce que les 1000 premiers termes vont en croissant, et la seconde comme convergente, parce que les 1000 premiers termes vont en décroissant et que cette décroissance est d'abord très rapide.*

On voit tout de suite comment Poincaré, au fond, présente sans distinction de valeur la dualité convergent/divergent et place la discussion immédiatement dans une vision dynamique : une série n'est pas isomorphe au résultat numérique que sa convergence autorise, elle est un processus, un algorithme en mouvement et la convergence "à l'infini" n'est pas plus positive que la convergence des premiers termes, à l'efficacité reconnue.
Il me semble que l'on trouve là, déjà, une attitude que l'on peut faire relever d'une certaine vision du pragmatisme et qui sera tellement présente, plus tard, dans la contribution de Poincaré aux débats fondationnels.

## 3.2 La Mécanique Quantique

La Théorie Quantique est née en 1900, dans l'article fondateur de Planck. Elle mettra 25 ans à devenir la "Mécanique Quantique" lors de son acquisition d'une forme dynamique.
Poincaré s'intéresse très tard à la théorie des quanta. Invité au Congrès Solvay de 1911, il découvrit la problématique quantique et écrivit alors coup sur coup plusieurs articles sur le sujet. Certains de "vulgarisation" [16], et deux articles scientifiques [17, 18] dans lesquels il va s'efforcer de montrer que l'hypothèse de Planck peut être contournée et remplacée par une théorie "continue". Il s'agît pour lui de démontrer que la formule de Planck donnant la densité d'énergie du corps noir, et dérivée sous l'hypothèse des quanta (qui consiste, pour dire vite, à remplacer dans un calcul une intégrale par une somme mais sans passer à la limite comme dans l'intégrale de Riemann, c'est-à-dire à faire exactement ce que font nos ordinateurs) peut être déduite d'un modèle continu d'interaction entre rayonnement et molécules, c'est-à-dire gouverné par des équations différentielles. Le résultat que Poincaré lui-même présentera comme négatif validera en fait la théorie de Planck.
Ces deux articles sont peu cités de nos jours, mais ont eu un retentissement important à l'époque. En est la preuve le fait que deux articles [9, 14] dans le

Volume 38 d'Acta Mathematica en hommage à Poincaré y sont consacrés. De plus l'argument de Poincaré sera repris et d'une certaine manière rendu plus rigoureux dans le célèbre traité de Mécanique Statistique de Fowler en 1929 [3]. Leur (re)lecture après plus d'un siècle de Mécanique Quantique est intéressante à plusieurs égards. En particulier ils montrent, à travers une discussion parfaitement technique, l'affrontement entre discret et continu, en ce début de XX$^e$ siècle où la problématique fondationnelle des mathématiques fait rage.

# 4 Solutions négatives I : de la non-convergence à la divergence

L'incidence des travaux de Poincaré sur la théorie des systèmes dynamiques a été énormément étudiée (contrairement à celle sur la théorie des quanta sur laquelle je m'étendrai donc plus longuement), je ne vais y consacrer que quelques lignes. On trouvera en particulier dans [21] une magnifique description de l'erreur "scandinave" de Poincaré.
Je voudrais simplement insister un peu sur l'énergie que met Poincaré à présenter, en particulier dans le Tome 2 des "Méthodes Nouvelles", les aspects pratiques, techniques, pédestres même et négatifs des séries qu'il attribue, très généreusement il me semble, aux astronomes. Nombre de titres de chapitre font référence au négatif.
"Preuve de la divergence de la série de Linsted", voila bien un titre peu habituel. Montrer qu'une série diverge est difficile, souvent plus que sa convergence comme nous le savons tous. Il est bien plus facile de montrer la divergence des estimations, ce qui donne souvent peu d'information sur la divergence effective de ladite série, en raison du fait que, comme me l'a dit un jour un ami italien, la théorie des perturbations repose entièrement sur l'inégalité fondamentale

$$|1 - 1| \leq 2.$$

Comprendre pourquoi une série diverge non pas afin de la "rendre" convergente mais plutôt pour entrevoir un nouveau cadre dans lequel elle, en particulier son écriture, aurait un sens, est bien la démarche que Poincaré a érigé au niveau d'une méthode. Etudier les divergences des séries des astronomes pendant des centaines de pages comme Poincaré le fait dans le Tome 2 des "Méthodes Nouvelles", ce n'est pas chercher l'erreur, détecter la faille, le négatif dans l'expression analytique des termes d'une série pour les corriger.

C'est exhiber l'écriture du non.

# 5 Solutions négatives II : une preuve de la nécessité de l'hypothèse de Planck

Dans les deux articles [17] de 1911 (note aux CRAS) et [18] de 1912, Poincaré va donc essayer de se (nous, eux ?) rassurer en tentant de dériver la loi de Planck d'un modèle différentiel. Il va échouer (je le cite) et va présenter comme négatif,

*"je dois prévenir le lecteur que je suis arrivé à un résultat négatif"*,

ce que Lorentz lui-même, dans la conclusion de [9], résume par

*"On peut donc dire que la probabilité $\omega$ [dont je vais parler plus bas] est entièrement déterminée dès qu'on connaît la distribution de l'énergie pour toutes les températures. Il n'y a qu'une fonction $\omega$ pour une distribution qui est donnée en fonction de la température. Par conséquent, les hypothèses que nous avons faites sur $\omega$ et qui conduisent à la loi de Planck sont les seules qu'on puisse admettre.*
*Voilà le raisonnement par lequel Poincaré a établi la nécessité de l'hypothèse des quanta."*

*"Ce nouvel examen conduit à la conclusion que l'énergie totale du rayonnement sera infinie à moins que l'intégrale $\int_0^{\eta_0} \omega \, d\eta$ ne tende pas vers zéro avec $\eta_0$. La fonction $\omega$ doit donc présenter au moins une discontinuité (pour $\eta = 0$), analogue à celles que donne la théorie des quanta."*

Nous reviendrons bientôt sur cette "fonction" $\omega$ dont l'intégrale, non nulle, ne dépend pas des bornes d'intégration.

## 5.1 L'article de Planck de 1900

Nous n'allons pas ici rappeler la théorie du corps noir ni présenter en détail la contribution de Planck.
Disons seulement que le problème consiste à trouver une formule d'interpolation pour la densité d'énergie $u$ d'un corps "noir", exprimée par rapport à la fréquence du rayonnement $\nu$, telle que

$$u(\nu) \sim \nu^2, \ \nu \to 0$$

et

$$u(\nu) \sim e^{-cte\nu}, \ \nu \to \infty.$$

Une formule simple est celle imaginée préalablement par Planck :

$$u(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}.$$

Et c'est cette loi qu'il dérive lui-même en 1900 sous l'hypothèse des quanta. Plus exactement il montre que, si l'on suppose que l'énergie de chaque oscillateur est un multiple entier d'une certaine quantité $\epsilon$, donc de la forme $P\epsilon$, $P$ entier, un calcul combinatoire donne que l'entropie $S$ de chaque oscillateur est une fonction (explicite) de $\frac{U}{\epsilon}$, où $U$ est l'énergie de chaque oscillateur. Plus précisément

$$S = k\left(\left(1+\frac{U}{\epsilon}\right) log\left(1+\frac{U}{\epsilon}\right) - \frac{U}{\epsilon} log \frac{U}{\epsilon}\right). \tag{5.1}$$

Utilisant la loi de Wien concernant la température

$$\frac{1}{kT} = \frac{dS}{dU},$$

où $k$ est la constante de Boltzmann et un peu d'analyse dimensionnelle qui donne que $\epsilon = h.\nu$, où $h$ a la dimension d'une action et $\nu$ est l'inverse d'un temps, on peut intégrer (5.1). On obtient :

$$u := \frac{8\pi\nu^2}{c^3}U = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\frac{h\nu}{e^{h\nu/kT}-1}.$$

C'est la loi de Planck.

## 5.2 Le calcul "négatif" de Poincaré

Nous allons examiner brièvement la stratégie de Poincaré visant à dériver la loi de Planck d'un modèle continu (voir [12] pour plus de détails). Poincaré va reprendre le calcul en partant d'une densité d'énergie $w$ et montrer tout d'abord que si $w$ est ce que l'on appellerait aujourd'hui un "peigne de Dirac" sur les entiers ($\times h$), il retrouve la loi de Planck. C'est donc en quelque sorte une vision plus mathématique, ou plutôt moins thermodynamique, que Planck ; mais il va surtout faire le chemin inverse, et "montrer" que la forme de la fonction $u$ détermine $w$ de façon univoque et donc que seule l'hypothèse des quanta donne le bon résultat.
Poincaré commence par montrer que la densité d'énergie

$$W(\eta_1, \ldots, \eta_n; \xi_1, \ldots, \xi_p)$$

(il écrit à l'époque $W(\eta_1, \ldots, \eta_n; \xi_1, \ldots, \xi_p)d\eta_1 ... d\eta_n d\xi_1 ... d\xi_p$ pour une densité) de $n$ oscillateurs (identiques) d'énergies $\eta_1 \ldots \eta_n$ et $p$ molécules (identiques) d'énergie $\xi_1 \ldots \xi_p$ peut prendre la forme :

$$W(\eta_1, \ldots, \eta_n; \xi_1, \ldots, \xi_p) = \Pi_{i=1}^{n} w(\eta_i) = w(\eta_1)...w(\eta_n)$$

pour une certaine fonction $w(\eta)$. C'est cette fonction $w$ qu'il va montrer devoir avoir une primitive discontinue.
Pour cela il considère tout d'abord la surface d'énergie

$$S_h = \{(\eta_1, \ldots, \eta_n; \xi_1, \ldots, \xi_p)/\eta_1 + \cdots + \eta_n + \xi_1 + \cdots + \xi_p = h\},$$

puis les 3 intégrales

$$\begin{aligned} I &= \int_S w(\eta_1)...w(\eta_n)d\eta_1...d\eta_n d\xi_1...d\xi_p, \\ I' &= \int_S (\eta_1 + \cdots + \eta_n)w(\eta_1)...w(\eta_n)d\eta_1...d\eta_n d\xi_1...d\xi_p, \\ I" &= \int_S (\xi_1 + \cdots + \xi_p)w(\eta_1)...w(\eta_n)d\eta_1...d\eta_n d\xi_1...d\xi_p. \end{aligned}$$

Il définit alors les énergies moyennes des résonateurs et des molécules, $X$ et $Y$, par :

$$nYI = I' \text{ et } pXI = I''.$$

Si l'on pose maintenant

$$\int_{\eta_1+\cdots+\eta_n=x} w(\eta_1)...w(\eta_n)d\eta_1...d\eta_n = \phi(x), \tag{5.2}$$

un calcul simple donne

$$I = \frac{1}{(p-1)!}\int_0^h (h-x)^{p-1}\phi(x)dx.$$

De la même façon

$$I' = \frac{1}{(p-1)!}\int_0^h x(h-x)^{p-1}\phi(x)dx,$$

et

$$I'' = \frac{1}{(p-1)!}\int_0^h (h-x)(h-x)^{p-1}\phi(x)dx,$$

et finalement

$$nY = \frac{\int_0^h x(h-x)^{p-1}\phi(x)dx}{\int_0^h (h-x)^{p-1}\phi(x)dx} \text{ et } pX = \frac{\int_0^h (h-x)^p\phi(x)dx}{\int_0^h (h-x)^{p-1}\phi(x)dx}.$$

Poincaré montre alors que l'on obtient la formule de Planck si l'on choisit pour $w$ la "fonction" définie, à partir de $\epsilon > 0$, de la façon suivante :

$$w(\eta) = 0 \quad \text{si} \quad k\epsilon < \eta < k\epsilon + \mu, \ \forall k \in \mathbb{N}, \ 0 < \mu < \epsilon,$$

et

$$\int_{k\epsilon}^{k\epsilon+\mu} w(\eta)d\eta = 1, \ \forall \mu, 0 < \mu < \epsilon.$$

Mais Poincaré de s'arrête pas là. Comme il l'a dit dans l'introduction de son article [18], il veut absolument s'assurer que ce choix de $w$ est le seul qui donne la loi de Planck, et surtout qu'aucun choix "continu" ne redonne le même résultat. Nous

allons présenter en même temps la dérivation directe et la solution du problème inverse.
Poincaré va montrer que le rapport $\frac{Y}{X}$ détermine $w$. Puisqu'il a montré que le choix discontinu donne la bonne formule il aura gagné (mais dira qu'il aura perdu).
L'argument utilise l'analyse complexe et nous allons le décrire rapidement. On introduit tout d'abord la transformée de Laplace (que Poincaré appelle "intégrale de Fourier") de $w$

$$\Phi(\alpha) = \int_0^\infty w(\eta) e^{-\alpha\eta} d\eta.$$

La fonction $w$ (et donc $\phi$) est déterminée par $\Phi$ grâce à la formule d'inversion de la transformé de Laplace

$$w(\eta) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \Phi(\alpha) e^{\alpha\eta} d\alpha,$$

où $L$ est une droite complexe qui est parallèle à l'axe imaginaire dans le demi-plan $\{\Re\alpha > 0\}$.
D'autre part, par la définition de $\phi$ (5.2), on a

$$(\Phi(\alpha))^n = \int_0^\infty \phi(x) e^{-\alpha x} dx,$$

puisque

$$\begin{aligned}
(\Phi(\alpha))^n &= \left( \int_0^\infty w(\eta) e^{-\alpha\eta} d\eta \right)^n \\
&= \int w(\eta_1) \dots w(\eta_n) e^{-\alpha(\eta_1 + \dots + \eta_n)} d\eta_1 \dots d\eta_n \\
&= \int_{x=0}^\infty \left( \int_{\eta_1 + \dots + \eta_n = x} w(\eta_1) \dots w(\eta_n) d\eta_1 \dots d\eta_n \right) e^{-\alpha x} dx \\
&= \int_0^\infty \phi(x) e^{-\alpha x} dx.
\end{aligned}$$

D'où

$$\phi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_L (\Phi(\alpha))^n e^{\alpha\eta} d\alpha,$$

et donc, après la renormalisation $x = n\omega,\ h = n\beta$, et avoir posé

$$\Theta(\alpha, \omega) = \Phi(\alpha) e^{\alpha\omega} (\beta - \omega)^{\frac{p}{n}},$$

on obtient

$$nY = \frac{\frac{n^{p+1}}{2\pi i} \int_0^\beta \int_L \frac{\omega}{\beta - \omega} \Theta^n d\omega d\alpha}{\int_0^h (h - x)^{p-1} \phi(x) dx},$$

et

$$pX = \frac{\frac{n^{p+1}}{2\pi i}\int_0^\beta \int_L \Theta^n d\omega d\alpha}{\int_0^h (h-x)^{p-1}\phi(x)dx}\ . \tag{5.3}$$

Vient ensuite l'utilisation du fait que le système physique contient un grand nombre d'oscillateurs (on a un champ de rayonnement). Poincaré fait tout d'abord l'hypothèse que $\Theta$ atteint un maximum à $\omega = \omega_0$ et $\alpha = \alpha_0$.
Puisque $n$ est très grand et que les intégrales précédentes font intervenir $\Theta^n$, il en déduit, en choisissant $L = \{\Re z = \alpha_0\}$, que

$$\frac{nY}{pX} \sim \frac{\omega_0}{\beta - \omega_0}, \tag{5.4}$$

mais puisque, par ailleurs, $nY + pX = h = n\beta$, on déduit que

$$Y = \omega_0 \quad \text{et} \quad X = \frac{\beta - \omega_0}{k}.$$

En fait Poincaré utilise le théorème de la phase stationnaire qui s'applique ici, puisque, à une constante près, les intégrales précédentes font intervenir la quantité $\Theta(\alpha,\omega)^n = e^{n\log(\Theta(\alpha,\omega)}$. En effet le numérateur de (5.3), par exemple, s'écrit :

$$\frac{n^{p+1}}{2\pi i}\int_0^\beta \int_L e^{n\log(\Theta(\alpha,\omega)} d\omega d\alpha.$$

Le théorème de la phase stationnaire dit alors que l'intégrale précédente se ramène, dans la limite $n \to \infty$, à la contribution de l'intégrant aux "points critiques" $\alpha_0$ et $\omega_0$ solutions des équations

$$\frac{\partial \log(\Theta(\alpha,\omega)}{\partial \alpha} = \frac{\partial \log(\Theta(\alpha,\omega)}{\partial \omega} = 0,$$

ce qui donne

$$\frac{\Phi'(\alpha_0)}{\Phi(\alpha_0)} + \omega_0 = 0,$$

et

$$\alpha_0 - \frac{k}{\beta - \omega_o} = 0,$$

d'où (5.4).
On voit donc que $X = \frac{1}{\alpha_0}$.
Utilisant le fait (dans la théorie de Boltzmann) que l'énergie moyenne d'une molécule est proportionnelle à la température (absolue) $T$ on en déduit que

$$\alpha_0 = \frac{C}{T} = \frac{1}{kT}$$

où $C$ est une constante, et donc $Y = \omega_0 = -\frac{\Phi'(\alpha_0}{\Phi(\alpha_0)}$ donne l'énergie moyenne d'un résonateur en fonction de la température (qui d'ailleurs sera indépendante du

rapport $\frac{n}{p}$). Il suffit alors de remarquer que, si la fonction $w$ satisfait l'hypothèse de Planck, alors

$$\begin{aligned}\Phi(\alpha) &= \int \sum_k \delta(\eta - k\epsilon) e^{-\alpha\eta} d\eta \\ &= \sum_k e^{-k\epsilon\alpha} \\ &= \frac{e^{-\epsilon\alpha}}{1 - e^{-\epsilon\alpha}} \\ &= \frac{1}{e^{\epsilon\alpha} - 1},\end{aligned}$$

et donc que, pour la densité $U$ de la section précédente,

$$U = Y = -\frac{\Phi'(\alpha_0}{\Phi(\alpha_0)} = \frac{\epsilon}{e^{\frac{\epsilon}{kT}} - 1} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1},$$

ce qui est la loi de Planck.
Mais supposons maintenant que l'on connaisse, *pour toutes les températures*, l'énergie moyenne d'un résonateur. Alors on en déduira les valeurs de la fonction $\frac{d\log_{\Phi(\alpha)}}{d\alpha}$ pour tous les $\alpha > 0$, soit, à une constante multiplicative près, les valeurs de $\Phi$ sur l'axe réel, et par continuation analytique (nous dit Poincaré) dans tout le demi-plan. Et donc, par la formule d'inversion précédemment énoncée, la fonction $w$ sera déterminée (toujours à une constante multiplicative près).
Poincaré déduit alors de ce résultat d'unicité la nécessité de l'hypothèse des quanta.
Finalement Poincaré montre encore sans se servir de la loi de Planck et en confrontant sa formule donnant l'énergie d'un résonateur avec celle du rayonnement du corps noir, que $w$ doit vérifier, sous peine que l'énergie totale diverge, la condition

$$\lim_{\eta_0 \to 0} \int_0^{\eta_0} w(\eta) d\eta \neq 0.$$

C'est à dire que $w$ doit être singulière. C'est cette singularité que Lorentz voyait comme une simple "discontinuité", probablement influencé par la fonction de Heaviside utilisée depuis bien longtemps par les électriciens.
La condition que $w$ soit "choisie" égale à 0 sauf pour $k\epsilon < \eta < k\epsilon + \delta$, où "$\delta$ est un infiniment petit", et telle que :

$$\int_{k\epsilon}^{k\epsilon+\delta} w(\eta) d\eta = 1,$$

s'exprime en langage moderne en disant que $w$ est une distribution, somme de masses de Dirac sur le réseau $\{k\epsilon,\ k = 1,\ 2\ \ldots\}$ (bien sûr, pour être rigoureux, la condition intégrale devrait être $\int_{k\epsilon-\delta}^{k\epsilon+\delta} w(\eta) d\eta = 1$).
Ceci n'est jusque là qu'une redérivation de la formule de Planck. Mais c'est une dérivation sous forme intégrale et non plus combinatoire, donc plongée a priori dans le continu.

Cette fonction, mal définie mais bien "choisie", a-t-elle gêné Poinacré au point qu'il présente son résultat comme négatif ? Ces infiniment petits ambigus brouillent-ils les cartes mathématiques de la rigueur au point d'entamer aux yeux de Poincaré la valeur de son résultat ?
Je ne le pense pas. Tout d'abord parce que l'usage de ce terme était tout à fait fréquente à l'époque, et même plus tard si l'on de souvient de Goursat [4]

*"On dit qu'un nombre variable $x$ a pour limite un nombre fixe $a$, ou tend vers $a$, lorsque la valeur absolue de la différence $x - a$ finit par devenir et "rester" plus petite que n'importe quel nombre positif donné à l'avance. Lorsque $a = 0$, le nombre x est dit "un infiniment petit"."*

Je pense plutôt, encore une fois, que pour Poincaré le terme négatif n'a pas de valeur négative mais se place dans une dynamique "positif ↔ négatif", dynamique ayant quant à elle une valeur positive.

# 6 Solutions négatives III : des "Méthodes Nouvelles" à Heisenberg

Il est une autre incidence des travaux de Poincaré sur la physique quantique, absolument fondamentale et trop peu souvent évoquée, à mon gout, comme pierre constituante de la genèse de la Mécanique Quantique. C'est aussi un merveilleux lien entre les deux études de Poincaré dont nous venons de parler.
Entre le modèle de Bohr (1913), qui unifie l'hypothèse de Planck et le système planétaire à deux corps, et la mécanique des matrices de Heisenberg (1925), qui change drastiquement le paradigme de la dynamique, s'écoulent de nombreuses années pendant lesquelles on cherche à quantifier, au sens de Planck-Einstein-Bohr, les systèmes non-intégrables, au premier lieu desquels se trouve l'atome d'hélium, système des trois corps atomique. Sans succès éclatant.
A Göttingen, Max Born a l'idée d'implémenter le processus de quantification des actions sur les séries de perturbation de la mécanique céleste dans la formulation de Poincaré. Dans [2] il consacre un chapitre aux Méthodes Nouvelles, chapitre qui constitue d'ailleurs un magnifique manuel de théorie des perturbations. C'est ce sujet qu'il propose à l'un de ses assistants, le très jeune Werner Heisenberg (l'autre assistant s'appelle Wolfgang Pauli...). Mais ce programme se conclut par un échec, comme Born le reconnait dans l'introduction de [2], datée de décembre 1924 et dans laquelle, prémonitoirement, il dit s'attendre bientôt à de profonds développements. La confrontation des calculs perturbatifs avec les valeurs expérimentales (ou plutôt les formules empiriques dérivées par les physiciens) s'avère non satisfaisante. Ici aucun problème de souci de convergence de séries, seuls les premiers termes comptent, dans l'esprit des séries asymptotiques évoquées plus haut. Mais ces premiers termes ne peuvent pas donner de bons résultats pour la simple raison que, contrairement aux masses des planètes et du soleil, les charges

des électrons et celle du noyau (double) ont un rapport trop grand pour rendre significatifs les premiers termes de l'asymptotique.
Cependant Max Born est pugnace et consacre une grande partie de son livre à ces calculs, tout comme Poincaré était obsédé par ces séries quelques trente ans plus tôt. Ces séries ne donneront rien pour l'hélium pour les raisons juste évoquées, mais, tout comme pour les séries de Linsted appréhendées par Poincaré, leur étude "en négatif" permettra au jeune Heisenberg d'inventer un nouveau paradigme en "tournant" simplement le signe "$-$" des séries de Fourier $\hat{f}_{j-k}$, présentes dans les nombreuses convolutions des calculs perturbatifs de la mécanique céleste, en une virgule ",".

Celle des éléments de matrice $F_{j,k}$ d'un opérateur.

# 7 Entre conservatisme et obsession du négatif : une dynamique de pensée de Poincaré ?

Poincaré a la réputation d'avoir été conservateur. Comment cela se marie-t-il avec son goût du résultat négatif ? Il me semble que l'on peut rapprocher cette question de celle qui consiste à se demander s'il était mathématicien ou physicien.
En effet, son conservatisme n'a-t-il pas été à la fois le garde-fou le maintenant à distance d'une implication directe dans les bouleversements "révolutionnaires" de la physique au début du XX$^e$ siècle, et le moteur de sa démarche obstinée à déconstruire les résultats négatifs auxquels il a été confronté ? Que ce soit les siens propres (mécanique céleste ou mécanique quantique) ou ceux des autres, en particulier des physiciens, comme dans l'article de Saint-Louis ?
Car il s'agit bien, je trouve, d'une attitude de déconstruction : déconstruction de la notion de série en 1882 et déconstruction de la notion de fonction en 1912.
Série -pierre de touche du paradigme analytique- et fonction -élément central de l'analyse-, deux notions-clé du XIX$^e$ siècle que le XX$^e$ va profondément interpeller : théorème KAM pour les séries perturbatives de la dynamique, et, à la même époque d'ailleurs, théorie des distributions qui va enfin donner un sens précis à la fonction $\omega$ vue plus haut, et si poétiquement définie par Henri Poincaré.

# Annexe
# Quelques citations "en négatif" de Poincaré

*"J'attire l'attention du lecteur sur les résultats négatifs présents dans ce mémoire..."*

*"Je suis arrivé à un résultat négatif..."*

*"Preuve de la divergence de la série"*

*"Divergence des séries de M. Linstedt"*

*"La divergence de ces développements n'aurait d'inconvénient que si l'on voulait s'en servir pour établir rigoureusement certains résultats, par exemple la stabilité du système solaire"*

*"...Je cherche à expliquer en quoi consiste ce malentendu entre les géomètres et les astronomes ; comment certaines séries que les premiers appellent divergentes peuvent rendre des services à ces derniers ..."*

## Références

[1] G. Bachelard, "Essai sur la connaissance approchée", Vrin, Paris, 1969.

[2] M. Born, "Vorlesungen über Atommechanik", Springer, Berlin, 1925. English translation : "The mechanics of the atom", Ungar, New-York, 1927.

[3] R. H. Fowler, "Statistical mechanics", Cambridge, 134-137, 1929.

[4] É. Goursat, " Cours d'analyse mathématique", Gauthier-Villars, Paris, 1933.

[5] V. Jankélévitch, "Philosophie première. Introduction à une philosophie du presque", Gallimard, Paris, 1954.

[6] N. Kolmogorov, "The general theory of dynamical systems and classical mechanics", Proceedings of the International Comgres of Mathematicians", (Amsterdam 1954), North-Holland, 1957.

[7] G. Longo, "Savoir critique et savoir positif : l'importance des résultats négatifs", Intellectica, 40, n.1, 2005. English translation : "Information Technology and Media", web-page of the European Commission.

[8] G. Longo et T. Paul, "Le monde et le calcul : réflexions sur calculabilité, mathématiques et physique", "Logique & Interaction : Géométrie de la cognition", Actes du colloque et école thématique du CNRS "Logique, Sciences, Philosophie" à Cerisy, Hermann, 2009.

[9] H. A. Lorentz, "Deux mémoires de Henri Poincaré sur la physique mathématique", Acta Mathematica, 38, 293-308, 1921.

[10] T. Paul, "Discrete-continuous and classical-quantum", "Mathematical Structures in Computer Science", 17, 177-183, 2007.

[11] T. Paul, "On the status of perturbation theory", "Mathematical Structures in Computer Science", 17, 277-288, 2007.

[12] T. Paul, "Poincaré et les quanta", Noésis, 17, 175-185, 2010.

[13] T. Paul, "Poincaré et la deconstruction du négatif", "Les mutations de l'écriture", Presse de la Sorbonne, 2012.

[14] M. Planck, "Henri Poincaré und die Quantentheorie, Acta Mathematica, Vol. 38, 387-397, 1921.

[15] H. Poincaré, "Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste", Volume 2, Blanchard, Paris, 1987.

[16] H. Poincaré, Œuvres, Gauthier-Villars, Paris 1954.

[17] H. Poincaré, "Sur la théorie des quanta", CRAS 153, 1103-1108, 1911.

[18] H. Poincaré, "Sur la théorie des quanta", J. de Physique théorique et appliquée, 5ème série, 2, 5-34, 1912.

[19] H. Poincaré, "Sur le problèmes des trois corps et les équations de la dynamique", Acta Mathematica, 13, 5-165, 1890.

[20] H. Poincaré, "L'état actuel et l'avenir de la physique mathématique", Conférence lue le 24 septembre 1904 au Congrès d'Art et de Sciences de Saint-Louis, Bull. Sc. Math., 22, 302-324, 1904.

[21] J.M Yoccoz, "Une erreur féconde du mathématicien Henri Poincaré, Conférence à la BNF, 13 avril 2005, SMF, Gazette des mathématiciens, 107, 2006.

# A la recherche de l'inégalité perdue

*par* Grégoire Allaire
CMAP, Ecole Polytechnique, Route de Saclay
91128 Palaiseau Cedex
gregoire.allaire@polytechnique.fr

**Résumé**

A l'occasion du centenaire de la disparition d'Henri Poincaré, on s'intéresse à l'origine de la célèbre inégalité de Poincaré, si utile dans l'analyse de certaines équations aux dérivées partielles. Comme souvent en mathématiques les bons résultats ne sont pas attribués aux bonnes personnes... En fait, cette inégalité est probablement due à Neumann, Schwarz ou Scheeffer, et on doit plutôt à Henri Poincaré une variante, appelée communément inégalité de Poincaré-Wirtinger. Sa démonstration originale est très intéressante car elle est constructive, au contraire d'une démonstration ultérieure par contradiction, utilisant le théorème de compacité de Rellich, que l'on trouve désormais dans la plupart des ouvrages sur les équations aux dérivées partielles. La motivation de cette inégalité est l'étude des valeurs propres et fonctions propres du Laplacien.

## 1 Introduction

Il existe une multitude d'articles et de livres présentant et discutant les nombreux travaux mathématiques de Henri Poincaré[1] et il est fort difficile d'apporter une contribution originale à la connaissance de l'oeuvre de Poincaré, surtout pour un modeste amateur en histoire des mathématiques comme je le suis... Néanmoins, puisque l'Ecole Polytechnique, où fut formé Henri Poincaré, se doit de participer aux célébrations du centenaire de son décès, je me suis laissé aller à un élan de curiosité et j'ai voulu en savoir plus sur ses travaux dans le domaine des équations aux dérivées partielles et plus spécifiquement sur l'origine de sa célèbre inégalité, enseignée à tous les étudiants s'intéressant aux équations aux dérivées partielles. S'il n'est pas forcément facile d'avoir accès aux publications originales de Poincaré, on peut cependant les découvrir dans l'édition des oeuvres de Poincaré [15], entreprise par la section de géométrie de l'Académie des Sciences de 1916 à... 1956 ! Notons d'ailleurs que ces oeuvres ont été récemment rééditées en fac-similé par les éditions Jacques Gabay. Les tomes IX et X des oeuvres de Poincaré [15] regroupent ses articles sur les équations aux dérivées partielles et la

[1] Henri Poincaré, mathématicien français, né le 29 avril 1854, décédé le 17 juillet 1912, polytechnicien de la promotion 1873.

physique mathématique. Ses travaux en physique mathématique couvrent principalement l'électromagnétisme, la théorie cinétique des gaz, la physique statistique et la thermodynamique ainsi que la physique des quanta. Les articles de Poincaré ne sont pas toujours très faciles à lire sur ces sujets, en partie parce que le formalisme de ces théories, très récentes à l'époque, a beaucoup changé. Par exemple, il n'est pas toujours facile de reconnaitre les équations de Maxwell de l'électromagnétisme dans certains écrits... Fort heureusement, certains y sont arrivés mieux que moi et je renvoie à l'analyse de l'équation des télégraphistes par Jean Mawhin [10] ou à l'étude d'Yves Pomeau dans le chapitre 18 de [5]. Il est bien plus aisé de lire les articles de Poincaré consacrés aux équations aux dérivées partielles. Bien que plusieurs auteurs, notamment et encore Jean Mawhin [8], [9], les aient déjà analysés avec beaucoup de pertinence, c'est néanmoins ce que je vais faire ici de manière plus modeste et un peu anecdotique. Suivant un exposé remarquable de Laurent Schwartz[2] en 1954 lors des cérémonies du centenaire de la naissance de Poincaré [17], je vais me concentrer sur trois articles fondamentaux de Poincaré [12], [13], [14], parus entre 1890 et 1897. Notons que Poincaré a écrit une analyse de ses propres travaux sur le sujet [16] qui permet de s'y retrouver plus facilement dans la progression de ses idées.
Ces trois articles sont consacrés principalement à deux problèmes importants : d'une part le problème de Dirichlet[3], d'autre part l'existence de valeurs propres et de fonctions propres pour le Laplacien. Dans tout ce qui suit on désigne par $\Omega$ un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$ (supposé connexe pour simplifier). Dans le problème de Dirichlet, étant donnée une fonction $g(x)$ définie sur le bord de $\partial\Omega$, il s'agit de trouver la solution $u(x)$ dans $\Omega$ du problème aux limites

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.1}$$

On sait que Riemann[4] proposa de trouver la solution de (1.1) en cherchant la solution du problème de minimisation

$$\inf \left\{ \int_\Omega |\nabla v|^2 dx \text{ avec } v \text{ tel que } v = g \text{ sur } \partial\Omega \right\}. \tag{1.2}$$

Malheureusement, Weierstrass[5] fit rapidement remarquer qu'il y avait une difficulté essentielle dans le raisonnement de Riemann, à savoir qu'il fallait montrer la continuité (ou, à tout le moins, la semi-continuité inférieure) de la fonctionnelle dans (1.2). On sait depuis que la démonstration rigoureuse de l'existence

[2]Laurent Schwartz, mathématicien français, né le 5 mars 1915 et mort le 4 juillet 2002, lauréat de la médaille Fields en 1950.

[3]Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, mathématicien allemand, né le 13 février 1805 et décédé le 5 mai 1859, célèbre pour ses travaux en analyse et en théorie des nombres.

[4]Georg Friedrich Bernhard Riemann, mathématicien allemand, né le 17 septembre 1826 et mort le 20 juillet 1866, spécialiste d'analyse et de géométrie différentielle.

[5]Karl Weierstrass, mathématicien allemand, né le 31 octobre 1815 et mort le 19 février 1897, un des pères de l'analyse.

d'un minimisateur de (1.2) nécessite des outils d'analyse fonctionnelle inconnus à l'époque. Les premières démonstrations de l'existence d'une solution de (1.1) sont dues à Neumann[6] en utilisant la notion de potentiel de double couche et à Schwarz[7] qui proposa une méthode itérative de construction de la solution à partir de deux solutions connues sur deux sous-domaines. Poincaré proposa une nouvelle méthode pour résoudre (1.1), dite méthode du balayage, qui généralisait les résultats de Neumann, alors restreints au cas de domaines $\Omega$ convexes, à tout domaine connexe. Nous renvoyons à [9] pour plus de détails sur la technique du balayage de Poincaré qui n'a pas eu la fécondité et la postérité qu'a eu la méthode de Neumann, à l'origine de la théorie du potentiel et des équations intégrales, développées notamment par Fredholm[8] [6].
Le deuxième problème étudié par Poincaré est le problème spectral

$$\begin{cases} -\Delta u_j = k_j u_j & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u_j}{\partial n} + h u_j = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.3}$$

où $k_j \in \mathbb{R}$ est une valeur propre et $u_j(x)$ une fonction propre non nulle (dans certains de ses articles Poincaré appelle les fonctions propres "fonctions fondamentales", et dans d'autres, comme [13], "fonctions harmoniques" à cause des harmoniques d'un son). Le paramètre $h$ est donné dans $\mathbb{R}^+$ et les deux valeurs extrêmes $h = 0$ et $h = +\infty$ permettent de retrouver les conditions aux limites de Neumann et de Dirichlet, respectivement. Nous étudierons ce problème spectral un peu plus en détails dans la section 4. Pour l'instant, contentons nous de remarquer qu'en multipliant l'équation de (1.3) par $u_j$ et en intégrant par parties, on obtient une formule pour la valeur propre

$$k_j = \frac{\int_\Omega |\nabla u_j|^2 dx + h \int_{\partial\Omega} |u_j|^2 ds}{\int_\Omega |u_j|^2 dx}. \tag{1.4}$$

En étudiant le quotient de Rayleigh[9] défini par (1.4), Poincaré va introduire des inégalités entre numérateur et dénominateur pour des fonctions quelconques, afin de donner des bornes aux valeurs propres. Ces inégalités portent désormais le nom de Poincaré et c'est à celles-ci que je voudrais consacrer la majeure partie de mon exposé. De manière surprenante, l'inégalité "classique" de Poincaré ne se trouve pas dans les travaux de Poincaré ! C'est plutôt une variante de celle-ci, l'inégalité de Poincaré-Wirtinger que l'on trouve dans [12], [13]. Il semblerait que l'inégalité de Poincaré soit peut-être due à Neumann ou, plus certainement, à Schwarz. En tout cas, on la trouve de manière certaine, en dimension un d'espace,

[6]Carl Gottfried Neumann, mathématicien allemand, né le 7 mai 1832 et mort le 27 mars 1925, pionnier de la théorie des équations intégrales.

[7]Hermann Amandus Schwarz, mathématicien allemand, né le 25 janvier 1843 et mort le 30 ovembre 1921, spécialiste d'analyse et de géométrie.

[8]Ivar Fredholm, mathématicien suédois, né le 7 avril 1866 et mort le 17 août 1927, père de la théorie des équations intégrales et de la théorie spectrale.

[9]John William Strutt, Lord Rayleigh, physicien anglais, né le 12 novembre 1842 et décédé le 30 juin 1919, prix Nobel de physique en 1904.

dans un article postume de 1886 de Scheeffer[10] [19]. Il arrive souvent en mathématiques que des résultats ne soient pas attribués à ceux qui les ont découverts mais à ceux qui les ont propagés...

## 2 Inégalité de Poincaré

Commençons par rappeler ce qu'il est convenu d'appeler l'inégalité de Poincaré [4], [18]. On rappelle que $H^1(\Omega)$ désigne l'espace de Sobolev[11] des fonctions de carré sommable ainsi que toutes leurs dérivées premières. De même, $H^1_0(\Omega)$ désigne le sous-espace de $H^1(\Omega)$ constitué des fonctions qui s'annulent sur le bord $\partial\Omega$. Bien entendu, ces espaces étaient inconnus à l'époque de Poincaré...

**Lemme 1.** *Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^N$ borné dans au moins une direction de l'espace. Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute fonction $v \in H^1_0(\Omega)$,*

$$\int_\Omega |v(x)|^2 dx \leq C \int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx. \tag{2.1}$$

*Démonstration.* Par un argument standard de densité il suffit de démontrer (2.1) pour une fonction régulière $v \in C^1(\overline{\Omega})$ s'annulant sur le bord $\partial\Omega$. On peut l'étendre par continuité par zéro en dehors de $\Omega$. L'hypothèse sur le caractère borné de $\Omega$ dit (après une éventuelle rotation) que pour tout $x \in \Omega$ la première composante $x_1$ est bornée, $-\infty < a \leq x_1 \leq b < +\infty$. Pour tout $x \in \Omega$ on a

$$v(x) = \int_a^{x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1}(t, x_2, ..., x_N)\, dt,$$

d'où l'on déduit par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|v(x)|^2 \leq (b-a) \int_a^b \left| \frac{\partial v}{\partial x_1}(t, x_2, ..., x_N) \right|^2 dt.$$

Intégrant sur $\Omega$ on obtient

$$\int_\Omega |v(x)|^2 dx \leq (b-a) \int_\Omega \int_a^b \left| \frac{\partial v}{\partial x_1}(t, x_2, ..., x_N) \right|^2 dt\, dx,$$

et permutant les deux intégrations par rapport à $t$ et $x_1$, on conclut que

$$\int_\Omega |v(x)|^2 dx \leq (b-a)^2 \int_\Omega \left| \frac{\partial v}{\partial x_1}(x) \right|^2 dx \leq (b-a)^2 \int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx.$$

On remarque au passage que la constante $C$ dans l'inégalité de Poincaré (2.1) est plus petite que $d(\Omega)^2$, le carré du diamètre de $\Omega$. □

[10] Ludwig Scheeffer, mathématicien allemand, né le 1er juin 1859 et disparu prématurément le 11 juin 1885, célèbre pour une version du théorème des accroissements finis valable pour des fonctions continues non dérivables sur un ensemble dénombrable.

[11] Sergueï Lvovitch Sobolev, mathématicien russe, né le 6 octobre 1908 et mort le 3 janvier 1989, spécialiste d'analyse fonctionnelle et d'équations aux dérivées partielles.

Une conséquence immédiate de (2.1) est l'obtention d'une borne inférieure pour la première valeur propre $k_1$ de (1.3) dans le cas des conditions aux limites de Dirichlet ($h = +\infty$), à savoir $k_1 \geq 1/C$. En fait, si on cherche la meilleure constante (c'est-à-dire la plus petite telle que (2.1) ait lieu), il est facile de voir qu'il s'agit justement de l'inverse de la première valeur propre $k_1$ du Laplacien avec condition aux limites de Dirichlet dans $\Omega$. Comme nous le verrons dans la section 4, Poincaré s'est intéressé à l'existence des valeurs propres du Laplacien, mais il reconnait que c'est Schwarz qui a démontré l'existence de la première valeur propre. On peut donc sans doute attribuer à Schwarz l'inégalité de Poincaré (2.1) (mais je n'ai pas pu vérifier ce fait dans ses articles originaux).
Dans l'approche moderne des équations aux dérivées partielles le rôle premier de l'inégalité de Poincaré est de permettre de résoudre le problème de Poisson[12]

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.2}$$

On passe du problème de Dirichlet (1.1) à celui de Poisson (2.2) par un relèvement de la condition aux limites. Pour montrer l'existence d'une solution de (2.2), par exemple par le théorème de représentation de Riesz[13], il faut prouver que le produit scalaire issu de la formulation variationnelle de (2.2), à savoir

$$\langle u, v \rangle = \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\, dx,$$

est équivalent au produit scalaire canonique de l'espace $H^1(\Omega)$,

$$\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega \Big( \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) + u(x)\, v(x) \Big) dx,$$

et l'inégalité de Poincaré (2.1) est la clé de cette équivalence. Nous renvoyons aux bons ouvrages pour les détails [4], [18].

## 3 Inégalité de Poincaré-Wirtinger

Si Poincaré n'est pas à l'origine de l'inégalité de Poincaré, il a par contre établi une autre inégalité célèbre, appelée maintenant inégalité de Poincaré-Wirtinger. Dans les deux articles [12], [13] il propose une démonstration constructive, reproduite ci-dessous, de cette inégalité de Poincaré-Wirtinger. Elle fut indépendemment découverte par Wilhelm Wirtinger[14], sans référence précise dans la littérature, mais elle est mentionnée à la page 105 du livre de Blaschke[15] [3]. Elle est aussi utilisée

[12] Siméon Denis Poisson, mathématicien français, né le 21 juin 1781 et décédé le 25 avril 1840, célèbre pour ses contributions en géomètrie et en physique.

[13] Frigyes Riesz, mathématicien hongrois, né le 22 juin 1880 et mort le 28 février 1956, un des fondateurs de l'analyse fonctionnelle.

[14] Wilhelm Wirtinger, mathématicien autrichien, né le 15 juillet 1865 et mort le 15 janvier 1945, connu pour ses contributions en géométrie différentielle.

[15] Wilhelm Blaschke, mathématicien autrichien, né le 13 septembre 1885 et mort le 17 mars 1962, spécialiste de géométrie différentielle.

implicitement par Adolf Hurwitz[16] pour démontrer un théorème isopérimétrique [7]. On la trouve à la même époque, indépendemment, dans un article de Emilio Almansi[17] [1]. Comme me l'a fait remarquer Jean Mawhin, la différence entre l'inégalité de Wirtinger et celle de Poincaré, que nous allons voir ci-dessous, est que la première est établie pour des fonctions définies sur la sphère unité alors que la deuxième l'est pour des domaines convexes (elles ne coincident qu'en dimension d'espace $N = 1$). En dimension $N = 1$ la démonstration usuelle de l'inégalité de Wirtinger est constructive et relativement facile en utilisant l'analyse de Fourier[18]. L'énoncé proposé par Poincaré est le suivant. Notons qu'il suppose le domaine convexe alors que le résultat reste vrai pour un domaine connexe (avec une autre démonstration).

**Lemme 2.** *Soit $\Omega$ un ouvert borné, régulier et convexe de $\mathbb{R}^N$. On désigne par $V$ l'espace*

$$V = \{\phi \in H^1(\Omega) \text{ tel que } \int_\Omega \phi(x)\,dx = 0\}.$$

*Il existe une constante $0 < C \leq 2^{N-1} d(\Omega)^2$ telle que, pour toute fonction $v \in V$,*

$$\int_\Omega |v(x)|^2 dx \leq C \int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx. \tag{3.1}$$

*Démonstration.* Encore une fois, par un argument standard de densité il suffit de démontrer (3.1) pour une fonction régulière $v \in V \cap C^1(\overline{\Omega})$. L'idée ingénieuse de Poincaré est de remarquer tout d'abord que, pour tout $v \in V$, on a

$$\int_\Omega \int_\Omega \big(v(x) - v(x')\big)^2\,dx\,dx' = 2|\Omega| \int_\Omega v^2(x)\,dx \tag{3.2}$$

puisque $v$ est d'intégrale nulle sur $\Omega$. Ensuite, grâce à la convexité de $\Omega$, il remarque que, pour tout couple de points $x, x' \in \Omega$, le segment $(x, x')$ est inclus dans $\Omega$ et qu'on a

$$v(x) - v(x') = \int_0^1 (x - x') \cdot \nabla v(tx + (1-t)x')\,dt.$$

En élevant au carré, l'inégalité de Cauchy-Schwarz conduit à

$$|v(x) - v(x')|^2 \leq d(\Omega)^2 \int_0^1 |\nabla v(tx + (1-t)x')|^2 dt,$$

[16] Adolf Hurwitz, mathématicien allemand, né le 26 mars 1859 et mort le 18 novembre 1919, spécialiste de géométrie et de théorie des nombres.

[17] Emilio Almansi, ingénieur et mathématicien italien, né le 15 avril 1869 et mort le 10 août 1948, spécialiste de géométrie différentielle et d'applications aux problèmes d'élasticité en grandes déformations.

[18] Joseph Fourier, mathématicien et physicien français, né le 21 mars 1768 et mort le 16 mai 1830, inventeur de l'analyse de Fourier pour étudier la propagation de la chaleur.

où $d(\Omega) = \sup_{x,x' \in \Omega} |x - x'|$ désigne le diamètre de $\Omega$. On en déduit que

$$\int_\Omega \int_\Omega |v(x)-v(x')|^2 \, dx \, dx' \leq d(\Omega)^2 \int_\Omega \int_\Omega \left( \int_0^{1/2} + \int_{1/2}^1 \right) |\nabla v(tx+(1-t)x')|^2 dt \, dx \, dx'.$$

Par symétrie on a

$$\int_\Omega \int_\Omega \int_0^{1/2} |\nabla v(tx+(1-t)x')|^2 dt \, dx \, dx' = \int_\Omega \int_\Omega \int_{1/2}^1 |\nabla v(tx+(1-t)x')|^2 dt \, dx \, dx',$$

et donc

$$\int_\Omega \int_\Omega |v(x) - v(x')|^2 \, dx \, dx' \leq 2d(\Omega)^2 \int_\Omega \int_\Omega \int_{1/2}^1 |\nabla v(tx + (1-t)x')|^2 dt \, dx \, dx'.$$

Par Fubini on peut échanger l'ordre des intégrales en $t$ et $x$. Pour $t$ fixé dans $[1/2, 1]$, le changement de variable $\tilde{x} = tx + (1-t)x'$ conduit à

$$\int_\Omega |\nabla v(tx + (1-t)x')|^2 \, dx = \frac{1}{t^N} \int_\omega |\nabla v(\tilde{x})|^2 \, d\tilde{x}$$

où $\omega = t\Omega + (1-t)x'$ est un sous-ensemble de $\Omega$ (car $\Omega$ est convexe). On peut donc majorer, pour $t \geq 1/2$,

$$\int_\Omega |\nabla v(tx + (1-t)x')|^2 \, dx \leq 2^N \int_\Omega |\nabla v(\tilde{x})|^2 \, d\tilde{x}.$$

Au total, on a obtenu

$$\begin{aligned} \int_\Omega \int_\Omega |v(x) - v(x')|^2 \, dx \, dx' &\leq 2^N d(\Omega)^2 2 \int_{1/2}^1 \int_\Omega \int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dt \, dx \, dx' \\ &\leq 2^N d(\Omega)^2 |\Omega| \int_\Omega |\nabla v(x)|^2 \, dx, \end{aligned}$$

ce qui conduit, par combinaison avec (3.2), à l'inégalité de Poincaré-Wirtinger (3.1). □

En vérité la démonstration de Poincaré dans [12] est un peu plus complexe car il utilise un autre changement de variables à base de coordonnées sphériques.
La démonstration du Lemme 2 fournit dans l'inégalité (3.1) une constante $C = 2^{N-1} d(\Omega)^2$ qui n'est pas optimale. On peut légèrement l'améliorer en calculant une primitive de $t^{-N}$, ce qui donne $C = (2^{N-1} - 1) d(\Omega)^2/(N-1)$. C'est toujours moins bien que les constantes trouvées par Poincaré dans [13], $C = 7d(\Omega)^2/24$ en dimension $N = 2$ et $C = 9d(\Omega)^2/16$ en dimension $N = 3$. C'est encore loin de la constante trouvée par Payne et Weinberger [11], avec une démonstration corrigée par Bebendorf [2], qui est $C = d(\Omega)^2/\pi^2$ en toute dimension (pour un domaine convexe). Cette dernière constante est optimale si on souhaite qu'elle ne dépende que du diamètre $d(\Omega)$.

Bien sûr, pour chaque domaine $\Omega$ il existe une constante optimale (c'est-à-dire la plus petite possible) dans (3.1) qui est encore l'inverse d'une valeur propre de (1.3). Mais cette fois, il s'agit de la seconde valeur propre $k_2$ du Laplacien avec condition aux limites de Neumann dans $\Omega$, c'est-à-dire quand $h = 0$ (la première valeur propre $k_1 = 0$ est nulle avec la fonction propre associée constante).
Le Lemme 2 est énoncé pour des ouverts convexes uniquement (et la démonstration utilise fortement cette hypothèse). La démonstration usuelle de l'inégalité de Poincaré-Wirtinger (3.1), est valable pour tout ouvert borné *connexe* (mais pas forcément convexe), n'est pas constructive (au sens où elle ne donne aucune estimation sur la taille de la constante $C$) et repose sur un argument de compacité. Décrivons brièvement cette preuve par contradiction. Supposons que l'inégalité (3.1) soit fausse : il existe donc une suite de fonctions $v_n \in V$ telle que

$$\int_\Omega |v_n(x)|^2 dx = 1 \quad \text{et} \quad \int_\Omega |\nabla v_n(x)|^2 dx = 1/n.$$

La suite $v_n$ étant bornée dans $H^1(\Omega)$, par application du théorème de compacité de Rellich [19] [4], on peut en extraire une sous-suite $v_{n'}$ qui converge (fortement) vers une limite $v_\infty$ dans $L^2(\Omega)$. Comme $\nabla v_n$ converge manifestement vers zéro dans $L^2(\Omega)^N$, on en déduite que $\nabla v_\infty = 0$ et, $\Omega$ étant connexe, que $v_\infty$ est une fonction constante. Comme elle appartient à l'espace $V$ puisque $v_n \in V$, $v_\infty$ doit être nulle ce qui est en contradiction avec le fait que

$$\int_\Omega |v_\infty(x)|^2 dx = \lim_{n' \to +\infty} \int_\Omega |v_{n'}(x)|^2 dx = 1.$$

Dans le chapitre IV de [14] Poincaré propose une généralisation du Lemme 2 qui anticipe les théorèmes de trace pour les espaces de Sobolev. Nous nous contentons d'énoncer ce résultat ci-dessous.

**Lemme 3.** *Soit $\Omega$ un ouvert borné, régulier et simplement connexe de $\mathbb{R}^N$. On désigne par $W$ l'espace*

$$W = \{\phi \in H^1(\Omega) \text{ tel que } \int_{\partial\Omega} \phi(x)\, ds = 0\}.$$

*Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute fonction $v \in W$,*

$$\int_{\partial\Omega} |v(x)|^2 ds \leq C \int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx.$$

# 4 Valeurs propres et fonctions propres du Laplacien

La motivation de Poincaré pour démontrer le Lemme 2 est l'étude des valeurs propres et des fonctions propres du Laplacien, solutions de (1.3). Dans [12] il appelle le problème spectral (1.3) "problème de Fourier" (ou refroidissement d'un

[19] Franz Rellich, mathématicien autrichien, né le 14 septembre 1906 et mort le 25 septembre 1955, spécialiste d'équations aux dérivées partielles.

corps solide) car, par séparation des variables temps et espace, il permet de résoudre l'équation de la chaleur avec la condition aux limites de Fourier qui lie le flux de chaleur sortant à la différence des températures interne et externe (cette dernière supposée nulle). Dans [13] il remarque que ce même problème spectral se rencontre dans l'étude des vibrations d'une membrane (dans le cas des conditions aux limites de Dirichlet) ou d'un gaz (dans le cas des conditions aux limites de Neumann).
La méthode utilisée par Poincaré dans [12] pour démontrer l'existence des valeurs propres $k_j$ et fonctions propres $u_j$ est basée sur le principe de minimisation que Riemann propose pour "démontrer" le principe de Dirichlet. Comme le savait déjà Poincaré, ce principe de minimisation n'est pas rigoureux tant que l'on n'a pas introduit toute l'artillerie des espaces de Hilbert[20] et de l'analyse fonctionnelle. Ainsi à la page 244 de [12] il écrit "ce raisonnement est sujet aux mêmes objections que celui par lequel Riemann établit le principe de Dirichlet".
Voyons comment il procède en pratique. Tout d'abord, Poincaré se persuade que

$$k_1 = \min_v \frac{\int_\Omega |\nabla v|^2 dx + h \int_{\partial\Omega} |v|^2 ds}{\int_\Omega |v|^2 dx}. \tag{4.1}$$

Son argument est le suivant. Notons

$$D = \int_\Omega |v|^2 dx \quad \text{et} \quad N = \int_\Omega |\nabla v|^2 dx + h \int_{\partial\Omega} |v|^2 ds,$$

si on normalise la fonction $v$ par $D = 1$, alors le numérateur $N$ ne peut s'annuler. Il conclut alors faussement "$N$ admettra donc un minimum absolu". Il appelle $u_1$ la fonction $v$ qui réalise le minimum dans (4.1) (sans se soucier au passage de savoir si cette fonction propre est simple ou multiple). Evidemment, une conséquence de (4.1), lorsque $h = +\infty$, est l'inégalité de Poincaré du Lemme 1. Il est aisé de se convaincre que l'argument ci-dessus est faux car on peut inverser les rôles de $D$ et $N$ : si on normalise la fonction $v$ par $N = 1$, le dénominateur $D$ ne peut pas non plus s'annuler mais il n'admet pas de minimum absolu car on peut construire une suite minimisante pour laquelle $D$ tend vers zéro (par exemple, en dimension $N = 1$, prendre la suite $v_n(x) = \sin(nx)/n$).
Poincaré construit ensuite par récurrence les autres valeurs et fonctions propres : pour $j \geq 1$,

$$k_{j+1} = \min_{v \in E_j} \frac{\int_\Omega |\nabla v|^2 dx + h \int_{\partial\Omega} |v|^2 ds}{\int_\Omega |v|^2 dx}, \tag{4.2}$$

où $E_j$ est l'espace des fonctions orthogonales aux $j$ premières fonctions propres

$$E_j = \left\{ v \text{ tel que } \int_\Omega v u_i \, dx = 0 \text{ pour tout } 1 \leq i \leq j \right\}.$$

La question de l'existence d'un minimum pour (4.2) n'est pas plus résolue que pour (4.1). Néanmoins, par un calcul des variations, devenu standard, Poincaré

[20] David Hilbert, mathématicien allemand, né le 23 janvier 1862 et mort le 14 février 1943, auteur des célèbres 23 problèmes qui portent son nom, contemporain et, dit-on, concurrent de Poincaré.

montre que les fonctions propres obtenues par minimisation de (4.2) vérifient bien l'équation spectrale (1.3). De plus la suite des valeurs propres $k_j$ est automatiquement croissante. Ce procédé ne permet néanmoins pas de prouver que l'on construit ainsi toutes les solutions de (1.3), autrement dit que les $(u_i)$ forment une base hilbertienne.
La difficulté suivante est de montrer que la suite $k_j$ tends vers l'infini quand $j$ tend vers l'infini. Poincaré remarque tout d'abord que, à $j$ fixé, la valeur propre $k_j$ est une fonction croissante de $h$. Il suffit donc de calculer pour $h = 0$ la limite de $k_j$ quand $j$ tend vers l'infini. Pour cela, Poincaré propose de découper le domaine $\Omega$ en $(j-1)$ sous-domaines *convexes* $\Omega_i$, $1 \leq i \leq j-1$ (c'est possible pour $j$ suffisamment grand) et de considérer la deuxième valeur propre $k_{2,i}$ du Laplacien avec condition aux limites de Neumann sur $\Omega_i$ à laquelle on peut appliquer l'inégalité de Poincaré-Wirtinger du Lemme 2 (la première valeur propre est nulle avec une première fonction propre constante). Il introduit la fonction test

$$v(x) = \sum_{i=1}^{j} \alpha_i u_i(x),$$

où $u_i$ est la $i$-ème fonction propre du Laplacien avec condition aux limites de Neumann sur $\Omega$ et o˘ $\alpha_i$ est un coefficient réel. Il contraint la fonction $v$ à vérifier

$$\int_{\Omega_i} v(x)\, dx = 0 \text{ pour tout } 1 \leq i \leq j-1,$$

ce qui revient à imposer $(j-1)$ contraintes linéaires sur les $j$ coefficients $\alpha_i$ (il ne dit pas pourquoi ces contraintes sont qualifiées). En utilisant l'orthogonalité des fonctions propres et la croissance des valeurs propres, il montre que

$$\frac{\int_\Omega |\nabla v|^2 dx}{\int_\Omega |v|^2 dx} = \frac{\sum_{i=1}^{j} k_i |\alpha_i|^2}{\sum_{i=1}^{j} |\alpha_i|^2} \leq k_j,$$

tandis que

$$\frac{\int_\Omega |\nabla v|^2 dx}{\int_\Omega |v|^2 dx} = \frac{\sum_{i=1}^{j-1} \int_{\Omega_i} |\nabla v|^2 dx}{\sum_{i=1}^{j-1} \int_{\Omega_i} |v|^2 dx} \geq \min_{1\leq i\leq j-1} \frac{\int_{\Omega_i} |\nabla v|^2 dx}{\int_{\Omega_i} |v|^2 dx} \geq \min_{1\leq i\leq j-1} k_{2,i},$$

puisque la fonction $v$ est orthogonale à chacune des premières fonctions propres (constantes) des sous-domaines $\Omega_i$. Grâce à l'inégalité de Poincaré-Wirtinger (3.1) (puisque $\Omega_i$ est convexe) et à l'estimation explicite de sa constante, il en déduit

$$k_j \geq \min_{1\leq i\leq j-1} k_{2,i} \geq \min_{1\leq i\leq j-1} \frac{1}{2^{N-1} d(\Omega_i)^2}, \tag{4.3}$$

qui tend vers l'infini avec $j$ si on découpe $\Omega$ en $(j-1)$ sous-domaines de diamètres comparables, donc tendant vers zéro. C'est ainsi que l'inégalité de Poincaré-Wirtinger joue un rôle-clé pour démontrer que la suite des valeurs propres tend vers l'infini.

Si (4.3) donne une borne inférieure à la valeur propre $k_j$, Poincaré cherche aussi à obtenir une borne supérieure. Pour cela il va proposer une méthode d'approximation des valeurs propres connue maintenant sous le nom de méthode de Rayleigh-Ritz[21] (fréquemment utilisée en calcul numérique) et il va démontrer un résultat qui anticipe le célèbre principe du min-max de Courant[22]-Fisher [23]. Il se donne une famille de fonctions quelconques $\phi_i$, $1 \leq i \leq j$, et il construit une nouvelle fonction test

$$v(x) = \sum_{i=1}^{j} \alpha_i \phi_i(x),$$

avec des coefficients réels $\alpha_i$. Pour n'importe quel paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$ il introduit la forme quadratique en $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_i)$

$$\int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \lambda \int_\Omega |v|^2 dx = \langle (N - \lambda D)\alpha, \alpha \rangle$$

où les matrices $N$ et $D$ sont symétrique définies positives. Il appelle $\lambda_1 \leq ... \leq \lambda_j$ les valeurs propres de cette forme quadratique (ou plus exactement du problème spectral $(N - \lambda D)\alpha = 0$) et il démontre l'inégalité entre ces valeurs propres et celles de (1.3)

$$k_i \leq \lambda_i \text{ pour } 1 \leq i \leq j.$$

Plus étonnante encore est la section 5 de [12] où Poincaré va justifier par "l'hypothèse moléculaire" son théorème (mathématiquement douteux) qui affirme l'existence des valeurs propres et fonctions propres, solutions de (1.3). En termes modernes, familiers en analyse numérique, "l'hypothèse moléculaire" est simplement la discrétisation de l'équation aux dérivées partielles (1.3). On peut voir ainsi en Poincaré un précurseur (méconnu ?) de l'analyse numérique. Il remplace l'opérateur Laplacien par des différences finies et il réduit (1.3) à un problème de valeurs propres pour des matrices, comme dans l'approximation ci-dessus "à la Rayleigh-Ritz". Bien sûr, dans ce cas discret (en dimension finie), l'existence des valeurs propres et vecteurs propres est évidente. Je ne résiste pas au plaisir de citer la conclusion de Poincaré :
«Le nombre immense des équations [discrètes] s'opposerait absolument aux calculs. Mais cette solution purement théorique peut mettre sur la voie de la solution véritable. Passons à la limite et abandonnons l'hypothèse moléculaire pour celle de la matière continue. Nos équations [discrètes] deviendront des équations aux dérivées partielles ; nos formes quadratiques [...] deviendront des intégrales.»
Ne sourions pas ! Soyons plutôt pleins de respect et d'admiration pour nos grands ancêtres qui, sans ordinateurs ni autres moyens de calcul, et sans outils d'analyse

[21] Walter Ritz, physicien suisse, né le 22 février 1878 et mort le 7 juillet 1909, spécialiste de physique théorique.

[22] Richard Courant, mathématicien germano-américain, né le 8 janvier 1888 et mort le 27 janvier 1972, spécialiste de physique mathématique et d'équations aux dérivées partielles, un des fondateurs de l'analyse numérique.

[23] Sir Ronald Aylmer Fisher, biologiste et statisticien britannique, né le 17 février 1890 et mort le 29 juillet 1962.

fonctionnelle comme les espaces de Hilbert et la convergence faible, n'hésitaient pas à s'engager sur les terrains escarpés et dangereux de la discrétisation et du passage à la limite. Respect, comme on dit de nos jours...
Pour conclure, rassurons le lecteur soucieux de la réputation de Poincaré : dans [13] il démontre rigoureusement l'existence des valeurs propres et fonctions propres, solutions de (1.3), par un argument de fonctions méromorphes, en représentant la solution d'un problème auxiliaire de Poisson comme une série entière dont les pôles sont les valeurs propres (voir [9] pour plus de détails).

**Remerciements.** L'auteur remercie Jean Mawhin pour ses commentaires sur une première version de cet article et pour lui avoir indiqué les références [1], [3], et [19].

## Références

[1] E. Almansi, *Sopra una delle esperienze del Plateau*, Annali di Matematica, Serie III, tomo XII (1906), 1-17.

[2] M. Bebendorf, *A note on the Poincaré inequality for convex domains*, Z. Anal. Anwendungen 22 (2003), no. 4, 751-756.

[3] W. Blaschke, *Kreis und Kugel*, Chelsea Publishing Co., New York, 1949.

[4] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle*, Masson, Paris (1983).

[5] E. Charpentier, E. Ghys, A. Lesne (sous la direction de), *L'héritage scientifique de Poincaré*, Belin, Paris (2006).

[6] I. Fredholm, *Sur une classe d'équations fonctionnelles*, Acta Math. 27 (1903), no. 1, 365-390.

[7] A. Hurwitz, *Über die Fourierschen Konstanten integrierbarer Funktionen*, Math. Ann. 59 (1904), no. 4, 553.

[8] J. Mawhin, *Henri Poincaré. A life in the service of science.* Notices Amer. Math. Soc. 52 (2005), no. 9, 1036-1044.

[9] J. Mawhin, *Henri Poincaré et les équations aux dérivées partielles de la physique mathématique*, dans [5] (2006), 278-301.

[10] J. Mawhin, *Henri Poincaré et l'équation des télégraphistes*, Matapli 98 (2012), 66-83.

[11] L. Payne, H. Weinberger, *An optimal Poincaré inequality for convex domains*, Arch. Rational Mech. Anal. 5 (1960), 286-292.

[12] H. Poincaré, *Sur les équations aux dérivées partielles de la physique mathématique*, American J. Math. 12 (1890), 211-294.

[13] H. Poincaré, *Sur les équations de la physique mathématique*, Rend. Circolo Mat. Palermo 8 (1894), 57-155.

[14] H. Poincaré, *La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet*, Acta mathematica 20 (1896-1897), 59-142.

[15] H. Poincaré, *Oeuvres,* publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences par la section de géométrie en 11 tomes, Gauthier-Villars, Paris (1916-1956).

[16] H. Poincaré, *Analyse de ses travaux scientifiques faite par H. Poincaré,* Acta mathematica 38 (1921), 116-125.

[17] *Le livre du centenaire de la naissance de Henri Poincaré,* Gauthier-Villars, Paris (1955).

[18] P.-A. Raviart, J.-M. Thomas, *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles,* Masson, Paris (1983).

[19] L. Scheeffer, *Ueber die Bedeutung der Begriffe "Maximum und Minimum" in der Variationsrechnung,* Math. Ann. 26 (1886), no. 2, 197-208.

# Henri Poincaré et l'équation des télégraphistes

*par* Jean Mawhin
Institut de Recherche en Mathématique et Physique
Université Catholique de Louvain
B-1348 Louvain-la-Neuve, Belgique
jean.mawhin@uclouvain.be

## 1 Introduction

La télégraphie électrique est l'une des plus grandes aventures techniques et humaines du XIX$^e$ siècle. De la construction des télégraphes jusqu'à la pose des réseaux de câbles, en passant par l'invention d'alphabets compatibles avec la transmission des signaux, elle constitue un exemple d'activité interdisciplinaire où science et technique se prêtent une aide mutuelle [47].
L'histoire commence par un télégraphiste inconnu, qui envoie le 1$^{er}$ février 1753 au *Scott's Magazine*, une lettre prémonitoire signée d'une seule initiale :

> Tous ceux qui s'y connaissent en expériences électriques savent que l'énergie électrique peut être transportée d'un lieu à un autre par des conducteurs... Tendons donc horizontalement, entre deux endroits donnés, une rangée de fils de métal en nombre égal à celui des lettres de l'alphabet parallèles entre eux...

De nombreux inventeurs et savants, comme LESAGE en Suisse (1774), LHOMOND (1787) et AMPÈRE (1823) en France, BETTANCOURT (1787) et SALVA (1796) en Espagne, REISER, SOEMMERING (1811), WEBER et GAUSS (1833) en Allemagne (1794), HENRY (1831) et MORSE (1825-1832) aux États-Unis, conçurent ou mirent en pratique en laboratoire différents systèmes. Les premières réalisations concrètes apparurent en Angleterre, aux États-Unis et en Allemagne aux environs de 1840. Environ dix ans plus tard, le premier télégraphe sous-marin reliait Douvres et Calais et 1858 vit le premier câble sous-marin transatlantique entre l'Irlande et l'île de Terre-Neuve.
Toutes ces réalisations furent d'abord empiriques et expérimentales et il fallut attendre la seconde moitié du XIX$^e$ siècle pour que les théoriciens modélisent la propagation du courant dans un fil conducteur. Le premier à le faire fut William THOMSON (1824-1907), qui deviendra SIR WILLIAM THOMSON et finira LORD KELVIN en récompense de ses contributions, expérimentales, théoriques et industrielles à la télégraphie.

## 2 Un premier modèle : William Thomson

L'année de la naissance d'HENRI POINCARÉ (1854-1912), dans des lettres à GEORGES STOKES (1819-1903) publiées dans [57], THOMSON a modélisé comme

suit la propagation d'un signal télégraphique à longue distance dans un câble sous-marin. Soit $c$ la capacité électrostatique du fil par unité de longueur, $k$ sa résistance galvanique en mesure électrostatique absolue, $i(t,x)$ la force (intensité) du courant à l'instant $t$ et en un point $P$ du fil distant de $x$ d'une extrémité $0$, $V(t,x)$ le potentiel électrique au même point $P$ à l'instant $t$. Le potentiel à l'extérieur du gutta percha du fil peut être pris égal à zéro à chaque instant. A l'instant $t$, la quantité d'électricité sur une longueur $dx$ du fil en $P$ vaut $V c\, dx$. La quantité qui le quitte en un temps $dt$ vaut $dt\, \frac{\partial i}{\partial x}\, dx$. Dès lors, on a

$$-c\, dx \frac{\partial V}{\partial t}\, dt = dt\, \frac{\partial i}{\partial x}\, dx. \tag{2.1}$$

Mais la force électromotrice, en unités électrostatiques, au point $P$, étant $-\frac{\partial V}{\partial x}$, on a

$$ki = -\frac{\partial V}{\partial x}. \tag{2.2}$$

En éliminant $i$ dans (2.1) au moyen de (2.2), on obtient

$$ck \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \tag{2.3}$$

qui est l'équation de l'excitation électrique dans un fil télégraphique sous-marin, parfaitement isolé par son enveloppe en gutta percha. On reconnaît l'équation de la chaleur donnée par FOURIER. Dans ce modèle, l'influence de la self-induction est négligée.

# 3 Un deuxième modèle : Gustav Kirchhoff et Oliver Heaviside

En 1857, GUSTAV KIRCHHOFF (1824-1887) utilise la théorie électromagnétique de WEBER pour modéliser la propagation de l'électricité dans des fils conducteurs homogènes infinis de section circulaire [27]. Après utilisation des coordonnées cylindriques $(x,\rho,\theta)$, séparation des variables et des considérations compliquées tirées de la théorie électromagnétique de WEBER, KIRCHHOFF arrive au système d'équations

$$i = -4\gamma \frac{l}{r}\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{4}{c^2}\frac{\partial i}{\partial t}\right), \tag{3.1}$$

$$2\frac{\partial i}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial t}. \tag{3.2}$$

où $l, \gamma, r, c$ sont des constantes. On peut alors (mais KIRCHHOFF ne le fait pas) déduire de (3.1) l'équation

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -4\gamma \frac{l}{r}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{4}{c^2}\frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t}\right),$$

ce qui donne, en remplaçant $\frac{\partial i}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 i}{\partial t \partial x}$ par leurs valeurs respectives $-(1/2)\frac{\partial V}{\partial t}$ et $-(1/2)\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$ tirée de (3.2), l'équation du second ordre en $V$

$$\frac{r}{8\gamma l}\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{2}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}. \tag{3.3}$$

Sans connaître le travail de KIRCHHOFF (il en reconnaîtra la priorité dans la version reprise dans ses *Electrical Papers I* [26]), et après avoir adapté en 1874 l'approche et l'équation (2.3) de THOMSON au cas d'une ligne se terminant par un condensateur [23], OLIVER HEAVISIDE (1850-1925) propose en 1876 une équation semblable à (3.3) dans laquelle il tient compte de la self-induction [24]. En appelant $l$ la longueur du fil, $kl$ sa résistance, $cl$ sa capacité, $sl$ son coefficient de self-induction, $x$ la distance à l'origine de la ligne, $Q(t,x)$ la quantité d'électricité qui a passé par ce point depuis $t = 0$, de telle sorte que $i = \frac{\partial Q}{\partial t}$,

> l'équation différentielle du potentiel du fil peut se déduire des deux équations suivantes
>
> $$-\frac{\partial Q}{\partial x} = cV, \quad -\frac{\partial V}{\partial x} = k\frac{\partial Q}{\partial t} + s\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}.$$
>
> La première exprime le fait que la quantité d'électricité existant sur la surface du fil entre les sections en $x$ et $x + dx$ à chaque instant est le produit du potentiel et de la capacité de la portion de fil considérée. La seconde exprime que la force électromotrice au point $x$ et à chaque instant est la somme de la force électromotrice produisant le courant $\frac{\partial Q}{\partial t}$ et le taux de croissance du moment de ce courant.

En éliminant $Q$, HEAVISIDE obtient l'équation

$$k\frac{\partial V}{\partial t} + s\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{1}{c}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2},$$

équivalente à celle de KIRCHHOFF, et qui sera baptisée en anglais *telegraph equation*, en allemand *Telegraphen Gleichung*, mais en français *équation des télégraphistes*.

# 4 La motivation de Poincaré

C'est en complétant le texte de son cours du premier semestre 1892-93 à la Faculté des Sciences de Paris, consacré aux "Oscillations électriques" (essentiellement la théorie des ondes hertziennes) et publié en 1894 [49], qu'HENRI POINCARÉ (1854-1912) aborde pour la première fois l'équation des télégraphistes. Contrairement aux auteurs précédents, sa motivation n'est pas la télégraphie en elle-même, mais l'interprétation des résultats expérimentaux sur la mesure de la vitesse de propagation de l'électricité dans des conducteurs, liés à l'étude des excitateurs hertziens.
Le chapitre IV "Phénomènes de résonance – Propagation le long d'un fil", qui décrit des méthodes indirectes pour étudier expérimentalement la période d'un excitateur de HERTZ (à partir de techniques de résonance), est suivi d'un "Complément au Chapitre IV" qui débute comme suit :

> Depuis que ce cours a été professé, diverses expériences ont été faites et je serai obligé d'ajouter de temps en temps quelques lignes complémentaires pour faire connaître au lecteur l'état actuel de la science.

La question porte sur la vitesse de propagation de l'électricité dans un fil conducteur. POINCARÉ signale que WHEATSTONE avait trouvé, en 1834, 460.000 km par seconde, tandis que WALKER obtenait, en 1849, 30.000 km par seconde (ce résultat est discuté dans [17]). En 1850, adaptant la méthode utilisée pour la vitesse de la lumière (l'appareil est actuellement conservé au Musée des Arts et Métiers), HIPPOLYTE FIZEAU (1819-1896) et EUGÈNE GOUNELLE (1821-1864) [18] avaient obtenu 100.000 km par seconde pour un fil de fer et 180.000 km par seconde pour un fil de cuivre. Ces physiciens observèrent en outre que le courant dans une partie du circuit de mesure ne s'annulait jamais, contrairement à ce qui était prévu si l'électricité se propageait à une vitesse bien déterminée. On peut lire, parmi les conclusions de [18] :

> Lorsque les courants discontinus se propagent dans un conducteur, ils éprouvent une diffusion en vertu de laquelle ils occupent un espace plus grand au point d'arrivée qu'au point de départ.

POINCARÉ la reprend :

> tout se passe comme si la perturbation s'estompait en se propageant de façon à occuper plus d'étendue sur le fil à l'arrivée qu'au départ. Ce phénomène, mis hors de doute par les expériences de M. Fizeau, a été appelé par ce physicien la diffusion du courant

et va tenter de l'expliquer en modélisant la propagation de l'électricité dans un fil conducteur :

> il est probable que cette diffusion est due à la résistance ohmique dont nous n'avons pas tenu compte jusqu'ici. Voyons comment nos équations sont modifiées par cette résistance.

La théorie de MAXWELL, dans sa version donnée par HERTZ, mais présentée différemment, est à la base de l'ouvrage [49]. POINCARÉ a montré précédemment, à partir de l'équation de continuité, que, dans un fil indéfini, rectiligne, de section constante, dont on prend la direction comme axe des $x$, existe la relation

$$A\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \tag{4.1}$$

où $H$ désigne l'énergie magnétique. Par ailleurs, à la force électrique à l'intérieur du conducteur, formée de deux termes, $A\frac{\partial H}{\partial t}$ représentant l'induction et $\frac{\partial V}{\partial x}$ représentant la force d'origine électrostatique, il faut adjoindre une autre force représentant la résistance ohmique, proportionnelle à l'intensité du courant, ou, sensiblement, à $H$ si le rayon du fil est assez petit. On obtient ainsi l'équation suivante, exprimant que la force électrique est nulle à l'intérieur du conducteur

$$A\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} = \beta H \quad (\beta < 0). \tag{4.2}$$

Les équations (4.1) et (4.2) entraînent respectivement

$$A\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial t\partial x}=0,\quad A\frac{\partial^2 H}{\partial x\partial t}+\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=\beta\frac{\partial H}{\partial x},$$

d'où, en soustrayant membre à membre et en réutilisant (2.1),

$$A\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}-A\beta\frac{\partial V}{\partial t}=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}.$$

POINCARÉ conclut :

> Nous pouvons donc représenter les variations du potentiel électrique dans un fil qui transmet une perturbation électrique par l'équation
>
> $$A\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}+2B\frac{\partial V}{\partial t}=C\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \tag{4.3}$$
>
> qui est connue sous le nom d'*équation des télégraphistes*. $A$, $B$, $C$ sont des constantes ; le premier terme provient de la self-induction, le second de la résistance ohmique, le second membre de la capacité du fil.

Dans l'équation (4.3) de POINCARÉ, $A$ correspond au $s$ d'HEAVISIDE, $2B$ au $k$ d'HEAVISIDE et $C$ au $\frac{1}{c}$ d'HEAVISIDE.

## 5 La solution de Poincaré

Si KIRCHHOFF et HEAVISIDE se sont contentés de discuter des solutions particulières de l'équation des télégraphistes, POINCARÉ est le premier à considérer une solution générale dans le cas d'un fil de longueur infinie. Il observe qu'en choisissant convenablement les unités (en particulier l'unité de vitesse comme vitesse de la lumière), on peut réduire l'équation (4.3) à la forme

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}+2\frac{\partial V}{\partial t}=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

qui devient, en posant $V=Ue^{-t}$,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+U. \tag{5.1}$$

Les conditions initiales $U(0,x)=f(x)$ et $\frac{\partial U}{\partial t}(0,x)=f_1(x)$ étant données sous forme d'intégrales de Fourier

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\theta(q)e^{iqx}\,dq,\quad f_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\theta_1(q)e^{iqx}\,dq,$$

POINCARÉ recherche la solution $U(x,t)$ sous forme d'une intégrale de Fourier et arrive classiquement à l'expression

$$U(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{iqx}\left[\theta(q)\cos(t\sqrt{q^2-1})+\theta_1(q)\frac{\sin(t\sqrt{q^2-1})}{\sqrt{q^2-1}}\right]dq$$

ou encore, sous forme complexe

$$U(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\alpha(q)e^{i[qx+t\sqrt{q^2-1}]}\,dq+\int_{-\infty}^{+\infty}\beta(q)e^{i[qx-t\sqrt{q^2-1}]}\,dq,$$

avec

$$\alpha(q)=\frac{\theta(q)}{2}+\frac{\theta_1(q)}{2i\sqrt{q^2-1}},\quad \beta(q)=\frac{\theta(q)}{2}-\frac{\theta_1(q)}{2i\sqrt{q^2-1}}..$$

Dans le cas des conditions initiales $\theta\equiv 0$ et $\theta_1\equiv 1$, la solution est

$$\begin{aligned}U(x,t) &= \int_{-\infty}^{+\infty}e^{iqx}\,\frac{\sin(t\sqrt{q^2-1})}{\sqrt{q^2-1}},dq\\ &= \int\frac{e^{i[qx+t\sqrt{q^2-1}]}}{2i\sqrt{q^2-1}}\,dq-\int\frac{e^{i[qx-t\sqrt{q^2-1}]}}{2i\sqrt{q^2-1}}\,dq,\end{aligned}$$

où les deux dernières intégrales se font suivant un contour fermé situé dans le demi-plan complexe supérieur évitant les points singuliers $q=\pm 1$. Le théorème de CAUCHY permet de calculer ces intégrales et fournit le résultat

$$U(x,t)=\begin{cases}0 & \text{si}\quad x>t\\ \Lambda(x,t) & \text{si}\quad -t<x<t\\ 0 & \text{si}\quad x<-t\end{cases}$$

avec

$$\Lambda(x,t)=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}e^{ix\cos\varphi}e^{i\sin\varphi}\,d\varphi=\pi J_0(\sqrt{x^2-t^2}),$$

et $J_0$ la fonction de Bessel d'indice $0$.
POINCARÉ considère ensuite le cas où $f\equiv 0$ et $f_1(x)\neq 0$ si $b\leq x\leq a$, $f_1(x)=0$ si $x<b$ ou si $x>a$. Dans ce cas, il trouve, pour $t>\frac{a-b}{2}$,

$$U(x,t)=\begin{cases}0 & \text{si}\quad x>a+t,\\ \frac{1}{2}\int_{x-t}^{a}f_1(z)\,J_0(\sqrt{(x-z)^2-t^2})\,dz & \text{si}\quad a+t>x>b+t,\\ \frac{1}{2}\int_{a}^{b}f_1(z)\,J_0(\sqrt{(x-z)^2-t^2})\,dz & \text{si}\quad b+t>x>a-t,\\ \frac{1}{2}\int_{b}^{x+t}f_1(z)\,J_0(\sqrt{(x-z)^2-t^2})\,dz & \text{si}\quad a-t>x>b-t,\\ 0 & \text{si}\quad b-t>x.\end{cases}$$

Enfin, lorsque $f_1\equiv 0$ et $f(x)\neq 0$ si $b\leq x\leq a$, $f(x)=0$ si $x<b$ ou si $x>a$, POINCARÉ obtient la solution

$$U(x,t)=$$

$$\begin{cases}0 & \text{si}\quad x>a+t,\\ \frac{1}{2}\int_{x-t}^{a}f(z)\,\frac{d}{dt}J_0(\sqrt{(x-z)^2-t^2})\,dz+\frac{f(x-t)}{2} & \text{si}\quad a+t>x>b+t,\\ \frac{1}{2}\int_{a}^{b}f(z)\,\frac{d}{dt}J_0(\sqrt{(x-z)^2-t^2})\,dz & \text{si}\quad b+t>x>a-t,\\ \frac{1}{2}\int_{b}^{x+t}f(z)\,\frac{d}{dt}J_0(\sqrt{(x-z)^2-t^2})\,dz+\frac{f(x+t)}{2} & \text{si}\quad a-t>x>b-t,\\ 0 & \text{si}\quad b-t>x.\end{cases}$$

La combinaison des deux solutions permet d'obtenir la solution générale lorsque $f$ et $f_1$ sont à support compact. POINCARÉ compare ce résultat avec les situations correspondantes pour l'équation de la chaleur ou l'équation des ondes et observe que

> la *tête* de la perturbation se propage avec une certaine vitesse, de telle sorte que, en avant de cette tête, la perturbation est nulle, contrairement à ce qui se passe dans la théorie de la chaleur de Fourier et conformément aux lois de la propagation de la lumière ou du son par ondes planes déduites de l'équation des cordes vibrantes. Mais il y a, avec ce dernier cas, une différence importante, car la perturbation en se propageant laisse derrière elle un résidu qui n'est pas nul ; car $U$ ne s'annule pas pour $b + t > x > a - t$.

POINCARÉ observe que si $a - b$ est très petit, ou si la perturbation se compose d'une suite de courants alternatifs de très grande fréquence, le résidu est négligeable devant la perturbation principale. Dans le cas des expériences de FIZEAU et GOUNELLE, les courants sont intermittents et de durée relativement longue, avec des intermittences plus courtes que les durées d'émissions. L'influence du résidu est considérable et explique le phénomène de diffusion. POINCARÉ conclut par une image militaire qu'il reprendra quelques fois :

> Tout doit, en somme, se passer comme si une partie de l'électricité se mouvait avec la vitesse même de la lumière, pendant que le reste suivrait avec une vitesse moindre et d'ailleurs variable. Nous aurions alors une forte tête de colonne s'avançant avec une vitesse de 300.000 km par seconde, mais en laissant en arrière des traînards qui s'éparpilleraient sur la route.

La motivation de POINCARÉ, dans son analyse de l'équation des télégraphistes, est donc bien d'expliquer les résultats expérimentaux sur la vitesse de propagation de l'électricité.

POINCARÉ revient sur la question dans son cours du premier semestre 1893-94 consacré à la "Théorie analytique de la propagation de la chaleur" et publié en 1895 [50]. Dans le chapitre VIII portant sur les "équations linéaires analogues à celles de la chaleur", il applique la méthode de la transformée de Fourier aux équations de la chaleur, des cordes vibrantes et des télégraphistes, et compare le comportement des solutions ainsi obtenues. Pour l'équation des télégraphistes, l'analyse est essentiellement celle de [48] et [49], mais des figures inédites éclairent d'une part les contours utilisés dans l'application du théorème des résidus à l'évaluation de certaines intégrales, et d'autre part le comportement différent, pour $t > 0$, des solutions des équations de la chaleur, des cordes vibrantes et des télégraphistes à partir d'une perturbation initiale à support compact en $t = 0$.

## 6 Une courte note qui en inspire d'autres

Lorsqu'il rédige ces compléments à son cours de 1892-93, probablement à la fin de l'année 1893, POINCARÉ publie son analyse de l'équation des télégraphistes

dans une note aux *Comptes rendus* [48] présentée le 26 décembre 1893. Sans reprendre les motivations, POINCARÉ y reproduit, avec les mêmes notations et un peu moins de détails, sa solution de l'équation des télégraphistes.
La trève des confiseurs n'existe décidément pas pour les mathématiciens parisiens puisque la semaine suivante, dans une note aux mêmes *Comptes rendus* présentée le 2 janvier 1894 [42], ÉMILE PICARD (1856-1941), après avoir rappelé que

> M. Poincaré vient de développer, dans le dernier numéro des *Comptes rendus*, des considérations extrêmement intéressantes sur l'équation des télégraphistes, qu'il ramène à la forme (5.1),

se propose de

> retrouver de la manière la plus simple [ses] résultats, en appliquant [...] une méthode célèbre de Riemann.

Le changement de variables

$$2u = x + t, \quad 2v = x - t$$

ramène (5.1) à la forme

$$\frac{\partial^2 U}{\partial u \partial v} + U = 0. \tag{6.1}$$

La généralisation de la méthode de RIEMANN [55] aux équations hyperboliques du second ordre, due à PAUL DU BOIS-REYMOND [15] et GASTON DARBOUX (1842-1917) [14], appliquée à (6.1), exprime sa solution en termes des conditions initiales et d'une solution particulière de l'équation adjointe, qui coïncide ici avec (6.1). PICARD exprime cette solution particulière en termes de la fonction de Bessel $J_0$ et retrouve ainsi le résultat de POINCARÉ. Les détails des calculs sont donnés dans [43] et repris dans [45], où l'on trouve aussi un bref exposé de la méthode de POINCARÉ.

Les 22 et 29 janvier 1894, Joseph BOUSSINESQ (1842-1929) présente aux *Comptes rendus* deux notes où il étend les résultats de POINCARÉ au cas de dimensions spatiales deux [5] et trois [6], en utilisant l'intégrale de POISSON pour l'équation des ondes associée à l'introduction d'une variable indépendante supplémentaire. Par l'introduction d'une variable supplémentaire $r$ telle que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

l'équation à résoudre, c'est-à-dire

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \pm 4k^2 u,$$

se ramène en effet au système

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \pm 4k^2 u, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2},$$

que BOUSSINESQ résoud en combinant les formules de POINCARÉ pour l'équation des télégraphistes en dimension un et de POISSON pour l'équation des ondes. BOUSSINESQ observe que les conclusions physiques tirées de cette formule, qu'il n'applique pas à la propagation de l'électricité, mais à celle du son, sont semblables à celles obtenues par POINCARÉ :

> comme l'a reconnu M. Poincaré, [...] les ondes élémentaires émanées de chaque point de la région d'ébranlement ont à leur avant un *front* nettement défini, animé de la vitesse ordinaire de propagation du son, mais, à leur arrière, une queue sans limite précise. Par suite, quand les ébranlements se répètent *à de très courts intervalles*, les mouvements successivement émis à partir d'un même endroit, ou par un même corps qui y vibre, se mêlent et se confondent en arrivant au point quelconque $(x, y, z)$ de l'espace, puisque chacun d'eux y trouve des restes de ceux qui l'y ont précédé.

Ces résultats seront complétés une semaine plus tard dans une note [7] où l'unicité de la solution du problème de Cauchy est prouvée. Neuf ans plus tard, BOUSSINESQ [8], après avoir rappelé que

> il y a neuf ans environ qu'une Note, très remarquée, de M. H. Poincaré, relative à l'intégration dite *des télégraphistes*, appela l'attention des géomètres sur une question qu'avaient déjà abordée LAPLACE et POISSON, savoir, la propagation des ondes dans un milieu élastique soumis à des résistances proportionnelles ou à la vitesse, ou au déplacement,

considère l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - bu,$$

qu'il ramène, par un changement d'inconnue classique, à la forme

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \pm 4k^2\varphi$$

suivant le signe de $\frac{a^2}{4} - b$. Après avoir rappelé que

> M. Poincaré en a déduit très simplement que, si la région d'ébranlement est limitée, la tête de l'onde se propage avec la même vitesse que dans le milieu soustrait aux résistances à coefficients $a$, $b$, mais que l'onde se prolonge indéfiniment, ou que le repos, à son arrière, n'est rétabli que pour $t$ infini.

Sa note prolonge celle de POINCARÉ

> en étudiant la manière dont se fait cette extinction graduelle du mouvement à la queue de l'onde, en tout point du milieu élastique.

D'autres prolongements seront donnés en 1903, pour le cas d'un conducteur cylindrique, dans deux notes aux *Comptes rendus* [10, 11] de MARCEL BRILLOUIN (1854-1948), qui a consacré son cours de 1901-1902 au Collège de France à la *Propagation de l'électricité : histoire et théorie* et le publie en 1904 [12]. Si la première note ne comporte aucune référence, la formule donnant la solution est appelée l'"intégrale de M. Poincaré" dans la seconde.

En 1895, une note de KRISTIAN BIRKELAND (1867-1917), présentée aux *Comptes rendus* par POINCARÉ [1], annonce la solution générale du problème de la propagation d'un ébranlement électromagnétique quelconque dans un milieu homogène et isotrope, à partir des équations de Maxwell. BIRKELAND invite le lecteur à comparer sa formule, assez compliquée, donnant les composantes du champ électrique, à celle de POINCARÉ dans [48]. Il montre que si la perturbation initiale est limitée à l'intérieur d'une surface $S$, l'ébranlement électromagnétique correspondant est limité extérieurement par une surface parallèle à la surface $S$ et séparé d'elle par un intervalle $vt$ ; en outre, il y a une autre surface remarquable, parallèle à $S$ à une distance $-vt$, formant comme la limite inférieure de l'ébranlement proprement dit et à l'intérieur de laquelle il n'y a plus qu'un *résidu*. Les détails sont contenus dans [2].

En 1894, JULES BLONDIN, qui a rédigé plusieurs ouvrages de physique mathématique de Poincaré, fait connaître aux ingénieurs en télégraphie, dans deux notes de *La Lumière électrique*, les résultats de POINCARÉ, PICARD et BOUSSINESQ. La première [3] détaille la méthode de BOUSSINESQ, et la seconde [4] (seulement signée de ses initiales) celle de POINCARÉ. Malgré cela, AIMÉ VASCHY (1857-1899), professeur d'électricité théorique à l'*École professionnelle des Postes et Télégraphes*, écrit encore en 1896, dans son cours de *Théorie de l'électricité* ([61], p. 319) :

> L'étude mathématique de la propagation d'une onde le long d'une ligne électrique est fort compliquée, et nous ne connaissons pas de solution rigoureuse de ce problème ; mais on en a des solutions approchées qui dans certains cas sont satisfaisantes.

Après avoir établi l'équation des télégraphistes, VASCHY mentionne qu'on

> sait intégrer cette équation en série

et renvoie le lecteur au livre de POINCARÉ [49] et à son propre traité [60]. Après s'être contenté de rechercher une solution particulière par séparation des variables, VASCHY termine son livre [60] en conseillant au lecteur de

> voir dans les *Oscillations électriques* de M. Poincaré, les nombreux et intéressants problèmes relatifs à la propagation des ondes électro-magnétiques.

## 7 Les leçons de Poincaré à l'École professionnelle des Postes et Télégraphes

En 1902, à l'invitation du directeur ÉDOUARD ESTAUNIÉ (1862-1942), POINCARÉ est nommé professeur d'électricité théorique à l'*École professionnelle des Postes et des Télégraphes (ESPT)* de Paris. Il y donnera régulièrement des séries de conférences sur des sujets variés, allant des oscillations hertziennes à la dynamique de l'électron, en passant par la théorie de la commutation et la téléphonie. En mai et juin 1904, il choisit comme sujet la propagation du courant en période variable

sur une ligne munie de récepteurs. Les conférences sont publiées en quatre parties dans le tome 40 de *L'éclairage électrique* [51].
POINCARÉ commence par rappeler comment JEAN-BAPTISTE POMEY (1861-1943), professeur d'électricité théorique à cette même école, dérive dans son cours l'équation des télégraphistes (quelques coquilles du texte sont corrigées ; voir [54], vol. 1, p. 371-377) :

> soit $dx$ la longueur d'un élément de fil, $\lambda\,dx$ sa self-induction, $\rho\,dx$ sa résistance, $\gamma\,dx$ sa capacité, $E\,dx$ la force électromotrice qui règne dans cet élément, $V$ le potentiel, $i$ l'intensité ; on aura (par l'équation de Ohm)
>
> $$\lambda\frac{\partial i}{\partial t}+\rho i=-E-\frac{\partial V}{\partial x}.$$
>
> D'autre part, la quantité d'électricité qui se trouve sur l'élément de fil est $\gamma V\,dx$ et l'équation de continuité nous donne
>
> $$-\frac{\partial i}{\partial x}=\gamma\frac{\partial V}{\partial t}.$$
>
> Cette dernière équation montre qu'il existe une fonction $\Phi$, telle que
>
> $$i=-\frac{\partial\Phi}{\partial t},\quad \gamma V=\frac{\partial\Phi}{\partial x}$$
>
> et en remplaçant $i$ et $V$ par ces valeurs, nous voulons :
>
> $$\lambda\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}+\rho\frac{\partial\Phi}{\partial t}-\frac{1}{\gamma}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}=E.$$
>
> C'est l'*équation des télégraphistes*. Si l'on suppose que la force électromotrice $E$ qui a donné naissance à la perturbation a cessé, l'équation devient

$$\gamma\lambda\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}+\rho\gamma\frac{\partial\Phi}{\partial t}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}=0. \tag{7.1}$$

POINCARÉ observe que si l'isolement de la ligne est imparfait, il faut ajouter un terme en $\Phi$ et montre que des changements simples d'inconnue permettent de faire disparaître le terme en $\frac{\partial\Phi}{\partial t}$ ou le terme en $\Phi$ dans l'équation.

POINCARÉ discute alors la validité du modèle obtenu en déduisant des équations de Maxwell l'équation (en trois dimensions d'espace cette fois)

$$4\pi C\frac{\partial\pi}{\partial t}+K\frac{\partial^2\pi}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\pi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\pi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\pi}{\partial z^2}=0.$$

Pour un champ de révolution, en passant aux coordonnées semi-polaires $y=r\cos\theta$, $z=r\sin\theta$, il obtient l'équation

$$4\pi C\frac{\partial\pi}{\partial t}+K\frac{\partial^2\pi}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\pi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\pi}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial\pi}{\partial r}=0,$$

Pour une solution de la forme $\pi(t,r,x) = f(r)e^{qt+px}$, $f$ vérifie l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{d^2f}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{df}{dr} = (4\pi Cq + Kq^2 - p^2)f,$$

la constante $4\pi Cq + Kq^2 - p^2$ prenant des valeurs différentes $a$ et $a'$ dans l'air ou dans le conducteur. POINCARÉ la rapproche de l'équation de BESSEL

$$J'' + \frac{1}{x}J' + J = 0,$$

et discute la solution à retenir, dans le conducteur et dans l'air, selon que $\sqrt{-a}$ ou $\sqrt{-a'}$ est réel ou imaginaire, ainsi que son comportement asymptotique. Il montre que l'équation des télégraphistes est applicable si $r\sqrt{-a'}$ est petit, mais ne l'est plus si ce nombre est grand. Il remarque aussi que, si la fréquence est élevée, l'équation des télégraphistes se réduit essentiellement à celle des cordes vibrantes, et que, dans les câbles sous-marins, la self-induction est à peu près nulle et l'équation des télégraphistes se réduit à celle de la chaleur considérée par Lord KELVIN.

POINCARÉ considère alors le cas d'une ligne indéfinie, sans fuite et avec une force électromotrice $f(t)$ à l'origine $x = 0$ seulement. Après avoir considéré le cas particulier où $f(t) = e^{iqt}$ est isochrone, il passe au cas général $f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Theta(q)e^{iqt}\,dq$ et, par transformée de Fourier, obtient la solution générale

$$\Phi(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Theta(q)\frac{1}{2ip}e^{i(qt+px)}\,dq = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\,d\tau \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{4i\pi p}e^{i(q(t-\tau)+px}\right].$$

Il considère d'abord le cas d'un "ébranlement élémentaire" où $f$ est nulle en dehors de $[0,\varepsilon]$ et telle que $\int_0^\varepsilon f(t)\,dt = 1$. On parlerait aujourd'hui d'une mesure de Dirac. En utilisant le calcul des résidus, il montre que si $q$ est très grand et $t < x$, alors $\Phi$ est nulle. Si au contraire $t > x$, $\Phi(x,t) = \frac{e^{-t}}{2}J_0(\sqrt{x^2-t^2})$, où $J_0$ est la fonction de Bessel. L'argument de $J_0$ étant imaginaire, $\Phi$ est positive et croît avec le module de son argument. Pour $x$ fini et $t$ très grand, $\Phi \simeq \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{t}}$, mais ses dérivées décroissent plus rapidement.
POINCARÉ étudie alors, par convolution, le cas d'un signal de faible durée $\varepsilon$ ($f$ est nul en dehors de $[0,\epsilon]$ et égal à 1 dans cet intervalle), et montre que si $i = \frac{\partial\Phi}{\partial t}$, on a $i = 0$ pour $t < x$, $i = \frac{e^{-t}}{2}J_0(\sqrt{x^2-t^2})$ (intensité utile) si $x < t < x+\varepsilon$ et $i = \frac{e^{-t}}{2}J_0(\sqrt{x^2-t^2}) - \frac{e^{-t-\varepsilon}}{2}J_0(\sqrt{x^2-(t-\varepsilon)^2})$ (intensité nuisible) si $t > x+\varepsilon$. Il observe, sur ces formules, l'avantage de signaux courts, encore meilleur d'ailleurs pour des signaux doubles tels que $f$ soit nul en dehors de $[0,2\varepsilon]$, égal à 1 sur $[0,\varepsilon]$ et à -1 sur $[\varepsilon,2\varepsilon]$.

Après avoir discuté rapidement le cas d'une ligne indéfinie dans un sens et limitée dans l'autre, avec extrémité isolée ou à la terre, celui d'une ligne fermée et celui d'une ligne limitée dans les deux sens, POINCARÉ passe au cas d'une

ligne indéfinie dans les deux sens en un point de laquelle on a placé un récepteur, assimilé à une self-induction accompagnée d'une résistance et d'une capacité. Il distingue deux cas selon que la capacité est en série ou en dérivation avec une armature à la terre.
Dans le premier cas, il reprend la structure de son étude de la ligne indéfinie sans récepteur : solution isochrone, solution générale par transformée de Fourier, ébranlement élémentaire, et utilise encore les propriétés des fonctions de Bessel et la théorie des résidus pour discuter les différences introduites par la présence du récepteur. Il conclut que les transmissions sont d'autant meilleures que la capacité du récepteur est grande, et examine aussi le cas où le récepteur est à la terre. POINCARÉ procède de la même manière lorsque les capacités sont en dérivation.

POINCARÉ considère alors cas d'une ligne affectée d'une perte uniforme, et redérive l'équation correspondante

$$\lambda\gamma\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}+(\lambda\alpha+\rho\gamma)\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\alpha\rho\Phi=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}. \tag{7.2}$$

En posant $\Phi=e^{kt}U$, on a l'équation équivalente

$$\left(\lambda\frac{\partial}{\partial t}+\lambda k+\rho\right)\left(\gamma\frac{\partial}{\partial t}+\gamma k+\alpha\right)U=\frac{\partial^2U}{\partial x^2},$$

qui, pour les deux valeurs

$$k=-\frac{\rho}{\lambda},\quad k=-\frac{\alpha}{\gamma},$$

se ramène à une équation des télégraphistes de type (7.1). POINCARÉ discute leur signification physique : la première définit la rapidité avec laquelle se perd la charge ; la seconde définit la rapidité avec laquelle disparaît un courant uniforme, quand la ligne n'a pris aucune charge. POINCARÉ observe alors que si les deux valeurs sont égales, c'est-à-dire si

$$\gamma\rho-\alpha\lambda=0,$$

l'équation (7.2) se réduit à l'équation des cordes vibrantes

$$\lambda\gamma\frac{\partial^2U}{\partial t^2}=\frac{\partial^2U}{\partial x^2}$$

et la valeur de $U$ se propage avec une vitesse uniforme, celle de la vitesse de la lumière, et sans altération. Par conséquent, $\Phi$ se propage avec la même vitesse et sans autre altération qu'un affaiblissement exponentiel. Ainsi,

> pour une certaine valeur de la perte, qu'on pourrait appeler *perte idéale*, les signaux s'affaiblissent avec la distance, mais *sans rien perdre de leur netteté*.

Ce résultat avait déjà été obtenu en 1887 par HEAVISIDE [25] et, indépendamment en 1888 par VASCHY [58], dans une note qui fut à l'origine d'une querelle de priorité avec L. WEILER décrite dans [65] et [59].

# 8 Conclusions

Motivée par le souci d'obtenir une explication théorique à des résultats expérimentaux sur la vitesse de propagation de l'électricité dans un fil, la note de POINCARÉ [48], on l'a vu, a eu le grand mérite d'avoir immédiatement attiré l'attention des mathématiciens sur l'équation des télégraphistes. Pourtant, c'est l'approche de PICARD qui sera retenue dans les traités d'analyse français de GOURSAT [20], HADAMARD [21] et FAVARD [16] par exemple. Dans la littérature anglo-saxonne sur les équations aux dérivées partielles de la physique mathématique, ARTHUR GORDON WEBSTER [64], qui a lui-même prolongé les recherches de PICARD [62, 63] en y joignant un excellent historique de l'équation, expose les méthodes de POINCARÉ et de PICARD dans son ouvrage posthume [64].

En Allemagne, au tournant des XIX$^e$ et $XX^e$ siècles, le tome II du traité de RIEMANN-WEBER [56] sur les équations aux dérivées partielles de la physique étudie l'équation des télégraphistes sous le nom d'équation des ondes amorties dans sa quatrième partie consacré aux oscillations électriques. L'approche de PICARD est donnée en détail et celle de POINCARÉ esquissée, avec des références à [48], [42] et aux travaux de BIRKELAND [1, 2]. L'équation est également étudiée dans l'ouvrage "Differentialgleichungen der Physik" de FRANK-MISES [19], sans mention des travaux pionniers de POINCARÉ ou de PICARD. Il en est de même dans le tome 2 des célèbres "Methoden der Mathematischen Physik" de COURANT-HILBERT publié en 1937, et dans sa traduction et adaptation anglaise [13]. Dès 1922, PICARD [47] s'était plaint, dans une lettre à l'éditeur suscitée par la publication d'un article de T. HAYASHI [22], du manque de reconnaissance de ses contributions et de celles de POINCARÉ et BOUSSINESQ :

> Il semble que les auteurs anglais ou américains, souvent cités au sujet de l'équation des télégraphistes, n'aient pas eu connaissance de ces travaux très anciens. C'est hélas ! ce qui arrive bien souvent dans les publications, et, comme je l'écrivais un jour à notre regretté ami GUCCIA dans les Rendiconti (t. 36, 1913, 277-278), rien n'est plus difficile à écrire que l'histoire des sciences.

Même si la plupart des auditeurs des leçons de POINCARÉ [51] à l'*École professionnelle des Télégraphes et Téléphones* sont d'anciens élèves de l'*École polytechnique*, peu d'entre eux ont sans doute été à même de suivre jusqu'au bout les techniques mathématiques avancées utilisées par le savant conférencier. Les retombées dans le monde des ingénieurs télégraphistes ne seront pourtant pas nulles. Entre 1909 et 1911, l'ingénieur en chef des Postes HENRI LAROSE (mort en 1937), à qui l'on doit aussi un rapport sur l'état actuel de la télégraphie sous-marine (1909), a publié aux *Comptes rendus* une série de notes [30]-[41], la plupart présentées par POINCARÉ, sur les solutions de l'équation de la chaleur et de l'équation des télégraphistes. En 1911, POINCARÉ a également présenté à l'Académie une note de POMEY [53] dans laquelle ce dernier étudie, par les méthodes de [51] fondées sur la théorie des résidus, les solutions de l'équation des télégraphistes avec perte uniforme (7.2) sur une ligne de longueur $l$ soumise à une force électromotrice constante.

On trouve une étude approfondie de l'équation des télégraphistes et de ses solutions, où l'influence de POINCARÉ est manifeste, dans le *Cours d'électricité théorique* [54] de POMEY (t. I, ch. IX ; t. II, ch. I à IV ; t. III, ch. XI), qui a longtemps fait autorité dans le domaine. Les résultats des leçons [51] sont également rappelés dans de célèbres encyclopédies allemandes sur la physique appliquée [9] et sur la physique [28].

La personnalité scientifique de POINCARÉ se retrouve entièrement dans ses contributions à l'équation des télégraphistes : une formidable puissance analytique, un souci d'explication théorique des résultats expérimentaux et une surprenante capacité d'assimilation de la technologie de son temps.

## Références

[1] K. Birkeland, Solution générale des équations de Maxwell pour un milieu absorbant homogène et isotrope. CRAS Paris 120 (1895), 1046-1049

[2] K. Birkeland, Solution générale des équations de Maxwell pour un milieu conducteur, Arch. Sci. Phys. Genève 34 (1905), 51 p.

[3] J. Blondin, Sur la propagation de l'électricité dans les conducteurs, La Lumière électrique 51 (1894), 401-406

[4] J. Blondin, Sur la propagation de l'électricité par M. Poincaré, La Lumière électrique 52 (1894), 44-46

[5] J. Boussinesq, Intégration de l'équation du son pour un fluide indéfini à une, deux ou trois dimensions, quand des résistances de natures diverses introduisent dans cette équation des termes respectivement proportionnels à la fonction caractéristique du mouvement ou à ses dérivées partielles premières, CRAS Paris 118 (1894), 162-166

[6] J. Boussinesq, Intégration de l'équation du son pour un fluide indéfini à une, deux ou trois dimensions quand il y a diverses résistances au mouvement : conséquences physiques de cette intégration, CRAS Paris 118 (1894), 223-227

[7] J. Boussinesq, Complément à une précédente Note 'Sur la propagation du son dans un fluide soumis à des résistances diverses" ; détermination analytique du problème, CRAS Paris 118 (1894), 271-276.

[8] J. Boussinesq, Sur l'extinction graduelle du mouvement à l'arrière d'une onde isolée dans un milieu élastique éprouvant une résistance proportionnelle ou à la vitesse, ou au déplacement, CRAS Paris 136 (1903), 337-342

[9] F. Breisig, Telegraphie und Telephonie auf Leitungen, in Handbuch der Physik, H. Geiger, K. Schnell eds., t. 17, Electroteknik, 1926, 4-6

[10] M. Brillouin, Propagation dans les milieux conducteurs, CRAS Paris 136 (1903), 667-669

[11] M. Brillouin, Propagation dans les milieux conducteurs. Sources, CRAS Paris 136 (1903), 746-749

[12] M. Brillouin, Propagation de l'électricité, histoire et théorie. Cours professé au Collège de France en 1901-02, Hermann, Paris, 1904

[13] R. Courant and D. Hilbert, Methods of Mathematical Physics, Interscience Publ. Wiley and Sons, New York, vol. I , 1953, vol. II, 1962

[14] G. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal, 4 vol., Gauthier-Villars, Paris, 1887-1896 (vol. 2, p. 71)

[15] P. Du Bois-Reymond, Ueber lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung, J. reine angew. Math. 104 (1889), 241-301

[16] J. Favard, Cours d'analyse de l'École polytechnique, vol. III.2, Gauthier-Villars, Paris, 1963 (ch. IX, 127-131)

[17] H. Fizeau, Remarques sur les expériences faites en 1848 et 1849 aux États-Unis, par M. S.-C. Walker et M. O.-M. Mitchel, pour déterminer la vitesse de propagation de l'électricité, CRAS Paris 32 (1851), 47-48.

[18] H. Fizeau et E. Gounelle, Recherches sur la vitesse de propagation de l'électricité, CRAS Paris 30 (1850), 437-440

[19] Ph. Frank und R. von Mises, Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, Vieweg, Braunschweig, 2 vol., 1925-1927

[20] E. Goursat, Cours d'analyse mathématique, 3 vol., Gauthier-Villars, Paris, 1905 (vol. 3, ch. 21, 152-155)

[21] J. Hadamard, Cours d'analyse de l'École polytechnique, 2 vol., Hermann, Paris, 1930 (vol. 2, ch. 2, 478-482)

[22] T. Hayashi, The Cauchy problem of the equation of telegraphy, Rend. Circ. Mat. Palermo 46 (1922), 117-121

[23] O. Heaviside, On telegraphic signalling with condensers, Phil. Mag. (4) 47 (1874), 426-452 (Electrical papers I, 47-53)

[24] O. Heaviside, On the extra current, Phil. Mag. (5) 2 (1876) (Electrical papers I, 53-61)

[25] O. Heaviside, Preliminary to investigations concerning long distance telephony and connected matters, The Electrician 19 (1887), 79-81 (Electrical papers II, 119-124)

[26] O. Heaviside, Electrical Papers, 2 vol., MacMillan, London, 1892

[27] G. Kirchhoff, Ueber die Bewegung der Elektrizität in Drähten, Pogg. Ann. der Phys. 100 (1857), 193-217

[28] K. Küpfmüller, Schwastromteknik. III. Telegraphie, in Handbook der Experimentalphysik, W. Wien-F. Harms ed., vol. 11, part 3, 452

[29] H. Larose, Rapport sur l'état actuel de la télégraphie sous-marine, La lumière électrique (2) 7 (1909), 183-186 ; 215-220 ; 243-247, et Gauthier-Villars, Paris, 1909

[30] H. Larose, Sur des solutions particulières de l'équation $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$, CRAS Paris 148 (1909), 770-773

[31] H. Larose, Sur le problème de l'armille de Fourier, CRAS Paris 148 (1909), 983-985

[32] H. Larose, Sur le problème de l'armille avec deux rupteurs, CRAS Paris 148 (1909), 1168-1170

[33] H. Larose, Sur une représentation physique des fonctions thêta, CRAS Paris 148 (1909), 1510-1512

[34] H. Larose, Sur l'équation des télégraphistes, CRAS Paris 150 (1910), 680-683

[35] H. Larose, Sur deux suites de solutions de l'équation des télégraphistes, CRAS Paris 150 (1910), 1418-1421

[36] H. Larose, Sur la propagation d'une discontinuité sur une ligne télégraphique munie d'un transmetteur, CRAS Paris 150 (1910), 1738-1740

[37] H. Larose, Sur le problème du câble avec transmetteur, CRAS Paris 151 (1910), 435-437

[38] H. Larose, Sur l'extinction des discontinuités par réflexion aux extrémités d'une ligne télégraphique, CRAS Paris 151 (1910), 747-749

[39] H. Larose, Sur le problème du câble limité dans les deux sens, CRAS Paris 152 (1911), 1051-1054

[40] H. Larose, Sur des développements trigonométriques à composantes non orthogonales, CRAS Paris 152 (1911), 1221-1223. Erratum 1540

[41] H. Larose, Sur la propagation d'une discontinuité sur une ligne télégraphique avec perte uniforme, CRAS Paris 152, 1468-1471

[42] E. Picard, Sur l'équation aux dérivées partielles qui se présente dans la théorie de la propagation de l'électricité, CRAS Paris 118, 16-17 (Oeuvres, II, 551-552)

[43] E. Picard, Sur une équation aux dérivées partielles de la théorie de la propagation de l'électricité, Bull. Soc. Math. France 22 (1894), 2-8 (Oeuvres, II, 553-559)

[44] E. Picard, À propos de l'équation des télégraphistes (Extrait d'une lettre au Directeur des Rendiconti), Rend. Circ. Mat. Palermo 46 (1922), 259-260

[45] E. Picard, Leçons sur quelques types simples d'équations aux dérivées partielles avec des applications à la physique mathématique, Gauthier-Villars, Paris, 1927

[46] E. Picard, Oeuvres de Ch.-E. Picard, 4 vol., Editions du CNRS, Paris, 1978-1981

[47] E. Picault, Les premiers travaux français relatifs à la propagation du courant électrique sur les lignes, Annales desTélécommunications 14 (1959), 85-90

[48] H. Poincaré, Sur la propagation de l'électricité, CRAS Paris 117 (1893), 1027-1032 (Oeuvres, IX, 278-283)

[49] H. Poincaré, Les oscillations électriques, Carré, Paris, 1894

[50] H. Poincaré, Théorie analytique de la propagation de la chaleur, Carré, Paris, 1895

[51] H. Poincaré, Étude de la propagation du courant en période variable sur une ligne munie de récepteur, L'Éclairage électrique 40 (1904), 121-228 ; 161-167 ; 201-212 ; 241-250 (Oeuvres, X, 445-486)

[52] H. Poincaré, Oeuvres de Henri Poincaré, Gauthier-Villars, Paris, 11 vol., 1916-1956

[53] J.B. Pomey, Propagation sur une ligne télégraphique du courant dû à une force électromotrice constante, CRAS Paris 152 (1911), 1163-1165

[54] J.B. Pomey, Cours d'électricité théorique, 3 vol., Gauthier-Villars, Paris, 1914-1931

[55] B. Riemann, Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungswelle, Abhandl. Königl. Gesells. Wiss. Göttingen 8 (1860)

[56] B. Riemann und H. Weber, Die partiellen Differential-Gleichungen der Mathematischen Physik, Vieweg, Braunschweig, I, 1900, II, 1901

[57] W. Thomson, On the theory of the electric telegraph, Proc. Roy. Soc. London 7 (1854-55), 382-399 (Math. Phys. Papers 2, 61)

[58] A. Vaschy, Propagation du courant sur une ligne télégraphique, CRAS Paris 107 (1888), 1145-1148

[59] A. Vaschy, Réponse à une revendication de M. L. Weiller, CRAS Paris 108 (1889), 216-218

[60] A. Vaschy, Traité d'électricité et de magnétisme, 2 vol., Librairie polytechnique, Paris, 1890

[61] A. Vaschy, Théorie de l'électricité, Librairie polytechnique, Paris, 1896

[62] A.G. Webster, Sur un nouveau problème mixte de l'équation des télégraphistes, CRAS Paris 153 (1911), 500-503

[63] A.G.Webster, On a new mixed problem of the partial differential equation of telegraphy, Bull. Amer. Math. Soc. (2) 18 (1912), 244-253

[64] A.G. Webster, Partial Differential Equations of Mathematical Physics, Stechert, New York and Teubner, Leipzig, 1927

[65] L. Weiller, Observations relatives à une Note récente de M. Vaschy "Sur la propagation du courant dans une ligne télégraphique", CRAS Paris 108 (1889), 128

# Mathématiciens originaires du Grand Sud-Ouest

*par* Jean-Baptiste Hiriart-Urruty

***Résumé***[1]

Nous passons en revue les mathématiciens, plus ou moins connus, de la période XVI$^{e}$-XX$^{e}$ siècles, et qui sont nés dans l'un des départements du "Grand Sud-Ouest" de la France (c'est-à-dire, en gros, les régions administratives Midi-Pyrénées, Aquitaine et Languedoc-Roussillon). La présentation est faite sous forme de "vignettes historiques »et est destinée à un public plus large que celui des mathématiciens professionnels.

[1]Article adapté d'une communication présentée à l'Académie des Sciences, Inscriptions et Belles-Lettres de Toulouse (mars 2012).

# 1 Introduction

Mathématiciens originaires du "Grand Sud-Ouest" est un titre vague, qui demande d'entrée qu'on en précise l'objectif visé. D'abord, le contour géographique : il s'agira, en gros, de la partie de la France constituée des trois régions administratives (historiquement récentes) dénommées Aquitaine, Midi-Pyrénées et Languedoc-Roussillon ; nous nous en écarterons un peu vers le Nord, occasionnellement. Ensuite, le vocable "mathématiciens" ; il recouvre des notions différentes suivant les siècles (en effet, à certaines époques, un scientifique pouvait être à la fois mathématicien, physicien, mécanicien, astronome,...), la forme moderne du métier de "mathématicien" étant plus précise et donc plus étroite. Jusqu'à la Révolution au moins, le vocable de géomètre était utilisé pour ce que nous appelons mathématicien aujourd'hui. Ce n'est qu'avec le développement des universités allemandes au XIX$^{e}$ siècle qu'apparaissent les mathématiciens professionnels. Nous retiendrons dans notre étude les critères suivants :
- Les noms qu'un étudiant de mathématiques (dans son acception la plus large) peut rencontrer lors de ses études, ou bien qu'une personne intéressée par l'histoire des mathématiques et des mathématiciens peut croiser dans ses recherches.
- Le lieu de naissance, plutôt que celui de son activité professionnelle, se trouve dans l'une des régions citées au-dessus. Nous avons utilisé pour ce repérage géographique des sites internet consacrés aux mathématiciens, en particulier celui de l'université de Saint Andrews en Ecosse [1], ainsi que des ouvrages de biographies comme [2].
- Le nom est encore vivace dans le village de naissance, sous des formes diverses, par exemple : appellation d'une rue, d'un établissement public, évocation sur le site web du village dans la rubrique "hommes et femmes illustres nés dans le village".
Notre regard vers le passé ne remonte pas au-delà du XVI$^{e}$ siècle. Si quelqu'un est intéressé par une période plus ancienne, nous lui recommandons la lecture de l'excellent ouvrage [3], plus particulièrement du long texte de J. Cassinet qui y figure.
Ici, nous commencerons notre voyage par les deux couloirs de passage vers l'Espagne : le passage méditerranéen par les Pyrénées-Orientales et le passage atlantique par les Pyrénées-Atlantiques (département dénommé Basses-Pyrénées jusqu'en 1969). Ensuite nous remonterons progressivement vers le Nord : départements de l'Hérault, du Gard, d'un côté, départements des Landes, de la Gironde de l'autre. Nous terminerons par la partie la plus "centrale" du "Grand Sud-Ouest" : outre la Dordogne, les Hautes-Pyrénées, le Gers, le Tarn-et-Garonne et le Lot, des départements riches en mathématiciens comme l'Aveyron et la Haute-Garonne ; enfin, des mathématiciens ou mathématiques moins connus comme ceux ayant des racines dans le département de l'Aude. Il est vrai que le cas de la Haute-Garonne (avec Toulouse) est un peu à part, il ne sera qu'effleuré car il est plus connu et, de toute façon, mériterait une étude à part à lui tout seul.

Notre évocation, qui est essentiellement historique, se terminera néanmoins par un résultat de mathématiques ; ce résultat est peu connu, facilement compréhensible (c'est de la géométrie dans l'espace, "en 3D comme disent les ingénieurs") et dû à un Audois.

## 2 Le couloir méditerranéen.

**• Pyrénées Orientales**
A tout seigneur tout honneur… Dans ce département dominé par la famille des **Arago** (dont certains étaient un peu mathématiciens, au sens de leur époque)[2] , nous inaugurons notre voyage avec le village de Bages (à une quinzaine de kilomètres au Sud-Est de Perpignan). C'est là que naquit **Jean-Pierre Serre** (1925-). Grand spécialiste de ce domaine des mathématiques répertorié sous le nom de Géométrie algébrique, J.-P. Serre fut lauréat de la Médaille Fields en 1954 et le premier lauréat du Prix Abel en 2003[3]. Le village de Bages le revendique (sur son site web) comme l'un des "hommes illustres nés dans le village".
**• Hérault**
**Pierre Forcadel** est un mathématicien du XVI$^e$ siècle, né à Béziers, frère du poète Etienne Forcadel. En 1560, Pierre Forcadel obtint une chaire de mathématiques au Collège de France, qu'il occupa jusqu'en 1574. Il fut poursuivi pour calvinisme pendant les guerres de religion. Il meurt entre 1576 et 1577. P. Forcadel fut précisément "Lecteur du Roy ès Mathématiques", un terme délicieux pour désigner la fonction de professeur de mathématiques au Collège Royal de France, fondé par François I$^er$. Il écrivit de nombreux livres de diffusion des mathématiques de son époque, des traductions françaises (comme la Géométrie d'Euclide en 1564), mais son plus grand mérite a été de réintroduire le symbole "+" pour marquer l'opération d'addition dans les calculs[4]. Comme quoi, ainsi qu'il m'arrive de le dire à des collègues ou étudiants en doctorat : "Rien ne sert de courir, il faut publier à point …"
**Joseph Boussinesq** (1848-1929) est un mathématicien et hydraulicien né à Saint-André-de-Sangonis (bourgade située à mi-chemin entre la Méditerranée et l'Aveyron). Il étudia à Montpellier et fut d'abord professeur de mathématiques aux collèges d'Agde, de Vigan et du Gap. Il fut professeur de mécanique à la Faculté des

[2]Le plus scientifique de la famille est François Arago (1786-1853), le "grand Arago", né à Estagel. Un lycée de Perpignan porte son nom.

[3]La Médaille Fields, attribuée pour la première fois en 1936, et tous les quatre ans depuis, récompense les meilleurs chercheurs en mathématiques ; une contrainte dure est que les lauréats doivent être âgés de moins de 40 ans au moment de l'attribution de cette récompense.

Le Prix Abel, de création récente (attribué pour la première fois en 2003), est un prix annuel qui pallie l'absence de Prix Nobel en mathématiques. Il est organisé et financé par la Norvège (pays du grand mathématicien N. Abel). A la différence des médailles Fields, les Prix Abel récompensent plutôt les mathématiciens pour leurs "œuvres complètes".

[4]Le mathématicien et physicien gallois Robert Recorde (1510-1558) semble être celui qui introduisit les signes "+" et "-" outre Manche ; c'est également à lui que l'on doit le signe "=" ; au début il s'agissait de deux segments parallèles de même longueur, bien plus longs que dans le signe actuel.

Sciences de Lille (où son souvenir est resté vivace, un laboratoire de recherche universitaire y porte son nom aujourd'hui). Il occupa la chaire de mécanique (physique mathématique) à la Faculté des Sciences de Paris en 1896, où il succéda à Henri Poincaré. Il fut également élu à l'Académie des Sciences. Son nom est connu en mécanique des Fluides (avec "l'approximation ou hypothèse de Boussinesq" par exemple). Il figure dans la liste des "personnalités liées à la commune de Saint-André-de-Sangonis.

Le mathématicien **Pierre-Ossian Bonnet** (1819-1892) est né à Montpellier. Il étudia la géométrie différentielle des surfaces (une formule porte son nom, "la formule de Gauss-Bonnet"). C'est à Bonnet qu'on doit la notion de courbure géodésique. Il fut élu à l'Académie des Sciences.

Ne quittons pas Montpellier sans signaler **Louis Castel**. Fils d'une famille aux origines béarnaises, le mathématicien et physicien jésuite Louis Castel naît à Montpellier en 1688 et meurt à Paris en 1757. Il enseigna à Toulouse, Pamiers, Cahors, Paris… Les philosophes des Lumières (ainsi Denis Diderot) mentionnent souvent son Optique des couleurs (1740), dans lequel il décrit un clavecin oculaire dont le principe réside dans l'analogie postulée entre les sons et couleurs [11]. Castel s'opposa aux théories de Newton (sur des bases religieuses), ce qui eut pour effet de retarder l'acceptation des théories newtoniennes en France.

• **Gard**

**Gaston Darboux** (1842-1917) est né à Nîmes. Cet éminent mathématicien, parmi les élèves duquel figurent E. Borel et E. Goursat (voir plus bas), fut élu à l'Académie des Sciences en 1884 et devint secrétaire perpétuel de cette même académie en 1890. Ses nombreux travaux concernent l'étude des surfaces, l'intégration et les équations aux dérivées partielles. Un lycée professionnel et une rue portent son nom à Nîmes. La cour d'honneur du lycée A. Daudet de Nîmes accueille le buste de G. Darboux (il fut inauguré en 1933).

Né dans le même département du Gard, nous avons Eugène Rouché (1832-1910). Rouché est né à Sommières (bourgade à une trentaine de kilomètres à l'Est de Nîmes). Il est connu pour le théorème de Rouché sur les zéros et les pôles des fonctions de la variable complexe, et un autre théorème, dit de Rouché-Fontené, relatif aux solutions d'un système d'équations linéaires. Il est amusant de noter que ce dernier théorème revêt différentes appellations suivant les pays : Rouché-Frobenius (en Espagne), Kronecker-Capelli (en Italie), ou même Rouché-Capelli.

Nous quittons ce couloir méditerranéen pour ce celui, atlantique, à l'Ouest.

## 3 Le couloir atlantique

• **Pyrénées-Atlantiques**

Au Pays basque, il n'y a que **Renau d'Elissagaray** (1652-1719) que j'ai trouvé comme (partiellement) mathématicien. Renau d'Elissagaray, dit "le petit Renau", né en 1652 à Armendaritz (petit village de l'intérieur du Pays basque français), fut un grand constructeur naval, bâtisseur de fortifications et de ponts, au service de Louis XIV. Ses techniques empruntaient beaucoup aux connaissances carté-

siennes de la géométrie des courbes et surfaces (voir [4,5]). Il fut élu à l'Académie des Sciences en 1699 et en fut son vice-président en 1714. Une pastorale[5] lui fut consacrée au Pays basque en août 2007, dans laquelle, de manière assez étonnante, sont évoqués "son goût, par-dessus tout, pour l'étude des mathématiques" et où apparaissent les noms de N. de Malebranche, Jean Bernoulli, Fontenelle, Newton. Son ouvrage "Traité de ma méchanique des liqueurs" (comprenez : des fluides), publié en 1712, utilise le calcul différentiel, alors encore à ses débuts ; les applications entrevues concernent les interactions air-voiles d'un navire, coque du navire-eau, etc. Une rue porte son nom à St Jean-de-Luz.
Dans le même département, jetons un coup d'œil du côté du Béarn. **Ignace Gaston Pardiès** (1636-1673) est un jésuite béarnais mathématicien qui naquit à Pau et étudia à Toulouse. Il fut longtemps en relation avec A. Laloubère (cf. infra). I. Pardies adopta vite les principes de Descartes et fut en correspondance avec Newton. Il est l'auteur du traité de statique intitulé "La statique, ou la science des forces mouvantes" (1673). Il meurt jeune, à 37 ans, des suites d'une fièvre contractée en se portant à l'aide de prisonniers à Bicêtre. Une rue porte son nom à Pau.
Il est étonnant, pour moi, de voir comment, en ce siècle où les communications n'étaient pas aussi faciles et développées qu'aujourd'hui, les scientifiques arrivaient à échanger : Renau d'Elissagaray a lu le traité de Pardies, correspond avec Christiaan Huyghens, Jean Bernoulli, etc.

• **Landes**

**Jean-Charles (de) Borda** (1733-1799), né à Dax en 1733, est le nom qui ressort dans ce département si l'on s'en tient aux critères retenus pour notre étude. La carrière de ce grand ingénieur naval, physicien, mathématicien, de renommée mondiale, a été bien étudiée dans de nombreux ouvrages. Ses contributions concernent l'hydraulique et la résistance des fluides, ainsi que les sciences de la décision (le fameux "paradoxe de Borda-Condorcet » à propos des élections au scrutin). Borda fut membre (fort jeune) de l'Académie des Sciences, de l'Académie de Marine, du Bureau des Longitudes, etc. Le nom de Borda est très présent à Dax, avec un lycée général et technologique, une société savante très active, etc.
Pas loin de Dax, est associé à la ville d'Aire-sur-Adour le nom de **François de Foix-Candal**e (1512-1594). Probablement né en Ariège, il fut évêque d'Aire-sur-Adour de 1570 à 1594 et Captal de Buch de 1572 à 1587 (Captal de Buch désigne le seigneur de la province sud du pays de Buch, qui regroupe aujourd'hui les communes d'Arcachon, la Teste-sur-Buch et Gujan-Mestras). C'est François de Foix-Candale qui fonda la première chaire de mathématiques de l'université de Bordeaux et la dota d'une pension annuelle. Son titulaire était recruté sur concours public au cours duquel il devait exposer et résoudre deux conjectures géométriques. Il n'y a pas trace de son nom aujourd'hui à Aire-sur-Adour.

• **Gironde**

[5]Les pastorales sont des représentations théâtrales chantées en plein air, typiques de la culture de la province de Soule en Pays basque. Chaque année, par deux fois au mois d'août, un village entier se mobilise pour cette représentation qu'elle a concoctée tout l'hiver précédent, sur un sujet prédéfini et dont le texte est entièrement écrit en vers. Celui consacré à Renau d'Elissagaray fut l'œuvre du petit village de Camou-Cihigue.

**Benjamin Olinde Rodrigues** (1794-1851) est né à Bordeaux. Ce mathématicien et économiste français a travaillé surtout en géométrie. Son nom est resté associé à deux résultats : la "formule de Rodrigues" en analyse et une autre "formule de Rodrigues" en géométrie.

• **Charente-Maritime**

Nous débordons légèrement du "Grand Sud-Ouest" pour aller à Montguyon en Charente-Maritime (département dénommé Charente Inférieure jusqu'en 1941). C'est là que naquit **André-Louis Cholesky** (1875-1918). Peu d'étudiants en analyse numérique savent que Cholesky n'est pas un obscur polonais mais bel et bien un ingénieur militaire français originaire de Montguyon à quelques kilomètres au Nord de Bordeaux. C'est pour des applications à la géodésie que Cholesky étudie la résolution des systèmes d'équations linéaires et introduit la "factorisation" qui porte aujourd'hui son nom. Le "procédé du commandant Cholesky" fut publié de manière posthume en 1924 dans le Bulletin géodésique de Toulouse. Son nom est mentionné dans la liste des "personnalités liées à la commune » de Montguyon. Cholesky et sa famille ont fait l'objet d'un article dans Matapli 97 (p. 69-86).

Nous abordons à présent la partie plus centrale du "Grand Sud-Ouest ».

# 4 La partie centrale du "Grand Sud-Ouest"

• **Hautes-Pyrénées**

**Pierre Jean-Paul Henri** (ou Henry) (1848-1907). Natif de Montpezat-Bétracq (Nord-Ouest de Tarbes), c'est à Toulouse que cet officier imagine la méthode qui le rendra célèbre, à savoir, un procédé de vérification graphique de la loi normale de Gauss (appelé de nos jours "test de normalité par la droite de Henry »). Une salle d'enseignement porte son nom à l'université Paul Sabatier de Toulouse.

• **Gers**

**Arnaud Denjoy** (1884-1974). Né à Auch, A. Denjoy étudia les ensembles analytiques, les nombres transfinis et la théorie des fonctions de variables réelles ; il découvrit en 1912 le concept de totalisation, intégration plus puissante que celle de Lebesgue ; il contribua également à l'étude des systèmes dynamiques.

Il fut élu membre de l'Académie des Sciences en 1942. Plus étonnant est qu'entre les deux guerres il fut conseiller général du Gers pendant plus de vingt ans. Sur le site de la ville d'Auch, son nom figure parmi ceux des "personnalités célèbres nées à Auch" . Un amphithéâtre d'enseignement porte son nom à l'université Paul Sabatier de Toulouse.

• **Tarn-et-Garonne**

A Beaumont-de-Lomagne, comment ne pas évoquer **Pierre Fermat** ((1601 ?-1665) né dans cette bourgade ? Beaucoup de choses ayant été dites et écrites à son sujet, nous nous contentons de renvoyer au site internet qui lui est consacré (celui de la commune de Beaumont-de-Lomagne ou via l'association Fermat-Sciences).

Mais il y aussi **Théodore Despeyroux** (1815-1883) qui est né à Beaumont-de-Lomagne. Docteur ès sciences mathématiques, il fut chargé de chercher à Vienne (Autriche) des manuscrits inédits de Fermat ; il fut aussi suppléant dans un cours

de calcul des probabilités de l'université de Paris, puis professeur de mathématiques à Dijon. Il regagne Toulouse en 1868 comme professeur d'astronomie à la Faculté des sciences et directeur de l'Observatoire municipal de Toulouse. Il a publié de nombreux mémoires dans le cadre de l'Académie des Sciences, Inscriptions et Belles-Lettres de Toulouse. A Beaumont-de-Lomagne, il fut également un généreux donateur et mécène, par exemple en offrant la statue de Fermat et sa bibliothèque de livres. Une rue ainsi que le collège portent son nom à Beaumont-de-Lomagne.

• **Dordogne**

**Jean-Frédéric Frenet** (1816-1900) était originaire de Périgueux (Dordogne). Sa thèse à Toulouse (1847) contenait explicitement une partie des formules concernant les courbes de l'espace, connues depuis comme les formules de Frenet-Serret ; Serret proposera la totalité de ces formules. Il fut professeur à Toulouse et à Lyon. Son nom figure dans la liste des "personnalités liées à Périgueux ». Un amphithéâtre d'enseignement de premier cycle porte le nom de Frenet à l'université Paul Sabatier de Toulouse.

• **Lot**

**Edouard Goursat** (1858-1936) est né à Lanzac, commune des Causses du Quercy dans le Lot. C'est un mathématicien dont le "Cours d'analyse" fit longtemps école. Il consacra l'essentiel de ses recherches aux fonctions de la variable complexe, aux intégrales abéliennes, et à leurs applications à la résolution des équations différentielles. E. Goursat fut enseignant à l'université de Toulouse de 1881 à 1885, puis à Paris. Il fut élu à l'Académie des Sciences en 1919. Son nom est mentionné dans la liste des "personnalités de la commune" du site web de la commune de Lanzac.

• **Corrèze**

Ne quittons pas le nord du Lot sans une petite incursion en Corrèze. C'est en effet à Brive que naît et étudie jusqu'à la fin de ses études secondaires **Cédric Villani** (1973-), le mathématicien le plus médiatisé du moment. Les travaux de recherche de cet analyste et probabiliste ont permis une meilleure compréhension mathématique de plusieurs phénomènes physiques. Médaille Fields en 2010 au congrès international des mathématiciens à Hyderabad (Inde), C. Villani fut aussi lauréat du Prix Fermat de recherche mathématique à Toulouse (2009). Sur le site web de la ville de Brive, son nom apparaît dans la liste "des personnalités natives de Brive", juste après trois sportifs internationaux, l'un de football, les deux autres de rugby (toujours en activité).

•**Aveyron**

Avec l'Aveyron nous abordons un département riche en évocations de mathématiciens. A Saint-Affrique, nous avons **Emile Borel** et **Pierre-Frédéric Sarrus**. Nous avons consacré un long article aux mathématiciens du Rouergue (Borel, Sarrus, Deltheil) [6], et nous avons évoqué dans [7] Gaston Tarry, qui est né à Villefranche-de-Rouergue. Nous ne nous n'y appesantissons donc pas. Quelques mots toutefois sur E. Borel et P. Sarrus.

**Emile Borel** (1871-1956). Les travaux de E. Borel, mathématicien né à Saint-Affrique concernent la théorie de la mesure, l'étude des fonctions de va-

riables réelles et la sommation des séries, puis la théorie des probabilités et la physique mathématique. On lui doit aussi des écrits sur l'histoire des sciences, la philosophie, la psychologie, la pédagogie et l'économie politique. Membre de l'Académie des Sciences en 1921 et député de l'Aveyron de 1924 à 1936, ministre de la Marine en 1925.

**P.-F. Sarrus** (1798-1861) étudia à Montpellier et fut enseignant dans le secondaire à Pézenas et à Perpignan. Il devint ensuite professeur à la Faculté des sciences de Strasbourg. Ses contributions concernent la calcul des variations et la mécanique (les dites "articulations de Sarrus" par exemple), mais les étudiants de première ou deuxième année universitaires le connaissent surtout par "la règle de Sarrus", un moyen mnémotechnique très particulier pour calculer les déterminants de matrices 3 par 3.

Complétons la visite du Rouergue en évoquant R. Deltheil.

**Robert Deltheil** (1890-1972). Né à Villefranche-de-Rouergue (Aveyron), R. Deltheil, fils de meunier fait de brillantes études de mathématiques, marquées d'un premier coup d'arrêt par la Grande Guerre où il est blessé et décoré en 1915. Professeur à Toulouse depuis 1919, il succède à Paul Sabatier comme doyen de la Faculté des Sciences, puis devient recteur d'académie à Caen puis à Toulouse (1937). Arrêté alors qu'il était recteur, et déporté au camp de Neuengamme de juin 1944 à juin 1945, il refuse à son retour des postes prestigieux pour revenir enseigner à la Faculté des sciences de Toulouse, et ce jusqu'à sa retraite en 1961. Deltheil est connu comme un grand formateur ; il a exercé une influence certaine par ses nombreux ouvrages pédagogiques et sa forte personnalité. Son penchant profondément humaniste le conduisit aussi vers des activités universitaires d'intérêt général : très jeune doyen puis recteur.

Ne quittons pas le Nord de la région Midi-Pyrénées sans évoquer Gerbert d'Aurillac.

**Gerbert d'Aurillac** (circa 940-1003) est un aquitain d'origine . Il étudia en Catalogne (Barcelone, Ripoll, Vich) et était secrétaire de Hugues Capet au moment où celui-ci fut couronné. Il est surtout connu comme étant le pape de l'an mil (en 999) sous le nom de Sylvestre II. C'est assurément un des plus grands savants de son temps. Passionné par les mathématiques et l'astronomie, ce fut un novateur, le premier à avoir tenté d'introduire dans l'Occident chrétien la numération décimale de position héritée des arabes.

Puisque nous sommes dans le département du Cantal, mentionnons P. Nicolas et M. Mourgues (cf. [11]). **Pierre Nicolas** (né à St Flour en 1663, décédé à Toulouse en 1718), jésuite mathématicien, acquit une renommée indiscutable dans les cercles scientifiques et académiques français, si l'on en croit les témoignages élogieux de plusieurs de ses contemporains. **Michel Mourgues** (né près de St Flour en 1642, décédé en 1713 à Toulouse) est un père jésuite qui fut professeur de mathématiques (et de rhétorique). Il fut titulaire d'une chaire royale à l'université de Toulouse jusqu'en 1712. Ses livres, d'abord publiés à Toulouse, connurent un certain succès, ils furent vendus à Paris et Amsterdam.

•**Haute-Garonne**

Avec l'incontournable Pierre Fermat, mentionnons des activités intéressantes et

de haut niveau des jésuites de la région toulousaine :
**Antoine de Laloubère** (1600-1664), né à Rieux-Volvestre près de Toulouse fut ami de Fermat. Comme évoqué plus haut, A. Laloubère fut en relation avec le béarnais Ignace Pardiès, mais aussi avec l'anglais John Wallis. Ce fut l'enseignant de mathématiques toulousain le plus renommé de l'époque.
**Nicolas Fizes** (1648-1664), de Frontignan (Hérault), fut professeur à l'université de Montpellier, où il enseigna les mathématiques et l'astronomie.
**Emmanuel Maignan** (1601-1676), élève des jésuites, entre dans l'ordre des minimes. Il enseigna les mathématiques à Toulouse, au couvent des Minimes de 1625 à 1636, puis à Rome, et de nouveau à Toulouse de 1650 à sa mort.
Dans une période plus récente, notons **Gabriel Koenigs** (1858-1931), mathématicien et mécanicien français né à Toulouse. Son nom est souvent confondu avec celui de S. Koenig (1712-1757), mathématicien allemand à qui l'on doit deux "théorèmes de Koenig" sur le moment et l'énergie cinétique. G. Koenigs fut Professeur à Paris, élu à l'Académie des Sciences dans la section mécanique en 1918. Contemporain de G. Darboux (cf. supra), ses contributions concernent la géométrie et la mécanique analytique. A Toulouse, un boulevard porte son nom.

• **Tarn**

Je n'ai pas trouvé trace de mathématicien né dans le département du Tarn. Toutefois, je me dois de signaler un fait peu connu, l'implication politique de C. Dupin à Castres. **Charles Dupin** (1784-1873) est un géomètre, ingénieur naval et homme politique. Il est connu en mathématiques pour ses contributions en géométrie différentielle (courbure des surfaces, indicatrice de Dupin) ; les applications qu'il avait en vue concernaient la construction des vaisseaux (de guerre surtout). C. Dupin fut élu député pour le $2^e$ arrondissement du Tarn (à Castres) en novembre 1827. Il ne parvint pas à reconquérir son siège de député à Castres en 1830, mais il rentra à la chambre comme député du $10^e$ arrondissement de Paris.

• **Aude**

Nous terminons notre tour avec le département de l'Aude. C'est un peu par hasard que je suis tombé il y a une quinzaine d'années sur le nom de **Jean-Paul Gua de Malves** (1712-1786). Au début, je pensais qu'il s'agissait d'un portugais ou d'un espagnol, et je prononçais mal son nom. En fait, Jean-Paul Gua est né à Carcassonne. Sa famille fut ruinée par les spéculations du système de Law. Il décida de devenir ecclésiastique, car c'était une formation et une fonction rémunérées. Il fut prieur de Saint-Georges-de-Vigou. Il deviendra Professeur au Collège Royal. Il est connu comme le premier concepteur de l'Encyclopédie ; Denis Diderot lui succédera à la tête du projet. A sa mort, Condorcet en fera un éloge appuyé.
Je vais à présent présenter succinctement "le théorème de Gua" (1783), un résultat de géométrie en trois dimensions, qui est l'analogue du théorème de Pythagore dans le plan. Avec deux collègues, nous avons publié une note sur le sujet [8], ce qui nous a permis de toucher un lectorat important, comme en témoignent les nombreuses réactions que nous avons reçues depuis ([9, 10]). Le théorème en question dit ceci : Dans un tétraèdre trirectangle (avec trois faces qui sont des triangles rectangles, et une face hypoténuse qui est un triangle sans propriété), la surface (les mathématiciens diraient "l'aire") du triangle hypoténuse se calcule à

partir des surfaces des trois triangles rectangles ; de fait, le carré de la surface de la face hypoténuse est égal à la somme des carrés des surfaces des trois triangles rectangles. Une fois qu'on connait le résultat, plusieurs démonstrations sont possibles (comme souvent en mathématiques), suivant ce que l'on sait (en utilisant la géométrie des triangles dans l'espace, en utilisant le produit vectoriel, en passant par les formules donnant le volume d'un polyèdre convexe). Nous l'avons proposé à des professeurs de terminales de lycées, nous le proposons nous-mêmes en exercice de manière régulière aux étudiants de deuxième année universitaire de la filière "Sciences pour l'ingénieur". R. Descartes était sans doute familier du résultat, mais il ne le publia jamais. Le théorème de Gua est redécouvert régulièrement, mais notre étude historique [8] nous confirme que c'est bien à Gua qu'on doit la démonstration et diffusion de ce beau résultat de géométrie en trois dimensions .

## Remerciements

Je voudrais remercier Maryvonne Spiesser (Maître de conférences honoraire de l'université Paul Sabatier et membre correspondant de l'Académie Internationale d'Histoire des Sciences) pour une lecture critique d'une première version de cette présentation.

## Références.

1. MacTutor History of Mathematics Archive. Site internet en libre accès de l'Université de Saint Andrews en Ecosse.
2. B. Hauchecorne et D. Suratteau, Des mathématiciens de A à Z. Editions Ellipses, 3ème édition (2008).
3. Huit siècles de mathématiques en Occitanie : des Arabes & de Gerbert d'Aurillac à Pierre de Fermat. Actes du colloque de Toulouse & de Beaumont-de-Lomagne (10-13 décembre 1992). Republié par les Editions PyréMonde (2008).
4. J.-J. Briost, L'ingénierie cartésienne de Renau d'Elissagaray. Documents pour l'histoire des techniques, n° 16, 169-186 (2008).
5. Bernard Renau d'Elissagaray, dit petit Renau : marin, ingénieur, mathématicien, et même fiscaliste. Conférence de R. Elissagaray de Jaurgain à la société Eusko Ikaskuntza (Bayonne) le 27 mars 2004.
6. J.-B. Hiriart-Urruty et H. Caussinus, Sarrus, Borel, Deltheil : Le Rouergue et ses mathématiciens. Gazette de la Société Mathématique de France n° 104, 88-97 (2005).
7. J.-B. Hiriart-Urruty, Y a-t-il des mathématiques derrière les grilles de sudoku ? Quadrature n° 73, EDP Sciences, 43-48 (2009).
8. J.-P. Quadrat, J.B. Lasserre, et J.-B. Hiriart-Urruty, Pythagoras' theorem for areas. American Math. Monthly, 549-551 (2001).
9. C. Mariconda, Courrier à l'Auteur en date du 3 juillet 2000.
10. J.-M. Lévy-Leblond, Courrier à l'Auteur en date du 22 septembre 2004.
11. M. Spiesser, Esquisses de biographies de P. Nicolas, I. G. Pardies, M. Mourgues, L.-B. Castel, etc. (travaux en cours).

# MathαLyon : Rencontres avec des mathématiciens

*par* Régis Goiffon[1]

Depuis quatre ans des mathématiciens rencontrent tous les mois durant deux jours (et parfois plus !) des lycéens et des collégiens de l'académie de Lyon. Ils présentent une vingtaine d'ateliers issus de l'exposition internationale "Pourquoi les mathématiques ?" réalisée par *Centre Science*[2] à la demande de l'UNESCO.
La mise en place du projet *MathαLyon* est la suite logique de la venue à l'initiative (largement soutenue par le CNRS, l'université Claude Bernard et l'IREM de Lyon) des mathématiciens de l'UMPA[3] et de l'ICJ[4], de l'exposition internationale qui avait déjà parcouru une vingtaine de pays dans le monde. Présentée au Muséum[5], l'exposition "*Pourquoi les mathématiques* ?" a vu passer en 45 jours plus de 7000 visiteurs dont 2000 scolaires. Les mathématiciens ont été nombreux à participer à ce temps fort, animant des causeries, des conférences, dialoguant sur les stands avec le public.

[1]Regis.Goiffon@math.univ-lyon1.fr

[2]Voir l'article de Maïtine Bergounioux, Zoom sur "Centre Sciences ", Matapli 77, page 46.

[3] Unité de Mathématiques Pures et Appliquées, École normale supérieure de Lyon, UMR 5669 du CNRS.

[4] Institut Camille Jordan, UMR 5208 du CNRS.

[5] Muséum - Musée des confluences. Situé à l'époque près du Parc de la Tête d'Or, le Museum a fermé en 2007. Il doit être remplacé dans quelques années par le Musée des Confluences.

Une demande insistante pour qu'une suite soit donnée à l'opération s'est très vite dessinée. Le nouveau projet s'est développé autour de quelques idées forces : conserver un dispositif avec des manipulations privilégiant l'interactivité, cibler principalement les lycéens et les collégiens, mais surtout aller à leur rencontre dans les établissements scolaires. Après avoir envisagé de lancer un projet d'exposition qui serait réalisée en partenariat avec des établissements scolaires[6], l'équipe s'est rapidement ralliée à l'idée de faire dupliquer par *Centre Sciences* une vingtaine de manipulations sur tables de l'exposition. L'ensemble du matériel devait être suffisamment léger pour pouvoir se déplacer facilement avec un véhicule familial dans les trois départements de l'académie.

A chaque intervention quatre chercheurs (toujours volontaires) accompagnent la venue de l'exposition. L'établissement est responsable de son planning et de l'accueil des chercheurs. Les classes viennent sur des créneaux horaires de cours accompagnées par un enseignants qui n'est pas obligatoirement celui de mathématiques. L'installation de l'ensemble des ateliers nécessite une salle d'environ 80 $m^2$ aménagée avec une vingtaine de grandes tables, un tableau, quelques chaises,... C'est souvent la salle polyvalente qui est retenue par l'établissement d'accueil. Au début un chercheur souhaite la bienvenue aux élèves puis présente rapidement le dispositif et ses collègues.

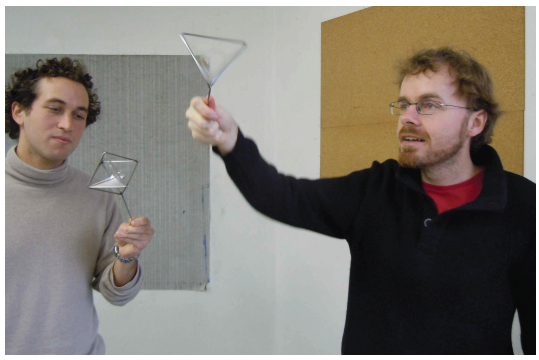
La première intervention, "expérimentale", s'est déroulée au lycée de Belleville fin 2008. L'établissement s'était inscrit à la "Fête de la Science" et avait sollicité une action des mathématiciens.
Depuis, chaque année scolaire à raison d'une intervention par mois, Math$\alpha$Lyon se rend durant deux jours dans un établissement. Pour les très "gros" établissements, nous proposons cinq jours pour permettre au maximum de classes de bénéficier de la venue des mathématiciens. Des "plages libres" (sans classe inscrite) permettent aussi aux élèves soit de revenir, soit de profiter de l'exposition si leur classe n'a pas été programmée sur le planning.

Les demandes sont envoyées par mail et, en juin, un planning des interventions est proposé à chaque "correspondant Math$\alpha$Lyon".

Une intervention typique se déroule avec quatre chercheurs en mathématiques, de Lyon1 et de l'ENS, qui accompagnent les dix-sept ateliers pendant deux journées. Les classes viennent sous la responsabilité de leurs enseignants et sur leurs créneaux de cours (généralement une heure par classe) afin de perturber le moins possible le fonctionnement de l'école.

L'un des objectifs est de permettre aux scolaires d'entrevoir ce que peuvent être des questions mathématiques et quelles réponses (souvent partielles) on peut y apporter. Bref, de montrer ce qu'est une démarche de recherche mathématique. Ils découvrent une autre façon de faire des mathématiques, "avec les mains et la tête", où la curiosité est un moteur essentiel de l'envie de comprendre. Ils deviennent ainsi, une heure durant, des chercheurs "amateurs" en mathématiques.

[6] La régionale de Lyon de l'APMEP avait réalisé en 1989 une telle exposition, présentée à l'Hôtel de ville, en lançant 14 projets d'actions éducatives dans les établissement de la région lyonnaise.



Les mathématiciens sont très attachés, en particulier en lycée, à ce que les premières S et les terminales S ne soient pas les seules à profiter de l'opération. Ils tiennent à rencontrer aussi des classes de seconde, des classes à dominante moins scientifique ou, quand il y en a, des classes à dominante professionnelle.

D'autre part, si l'établissement en fait la demande, il est possible d'organiser une rencontre avec l'un des chercheurs présents autour d'un thème proposé par l'équipe pédagogique. Cette rencontre peut prendre la forme d'un court exposé suivi d'une discussion et d'un échange sur le métier de mathématicien.

Les établissements demandeurs se répartissent grosso modo à parts égales entre collèges et lycées, la majorité des demandes provenant de la région lyonnaise :

En 2009-2010, 92 chercheurs sont intervenus sur 23 journées, dans 10 établissements scolaires de la région.
En 2010-2011, c'est le même nombre d'interventions auquel s'ajoute une action "exceptionnelle" en juin dans l'un des établissements primé au Rallye Mathématique de l'Académie de Lyon[7].
En 2011-2012, la trajectoire se poursuit. La première intervention, fin septembre, s'est déroulée à l'Inspection Académique (très intéressée par le dispositif). L'IA avait invité des classes de CM2 ainsi que des IEN[8], des formateurs, des conseillers pédagogiques. L'an prochain une nouvelle intervention avec des établissements du premier degré se déroulera à Vénissieux. Jusqu'à présent les élèves du primaire venaient à la "Fête de la Science" et étaient assez peu nombreux.

Car *MathαLyon* participe aussi à la "Fête de la Science" chaque année. Ce sont essentiellement les chercheurs (quarante sept, par plages de deux heures) de l'Institut Camille Jordan qui interviennent au Village des Sciences, sur le campus de La Doua. De manière plus ponctuelle "*MathαLyon*" intervient par exemple sur le campus, ou durant une ou deux journées à l'INSA pour la *Semaine des maths*.

[7] C'est la totalité de l'établissement qui en "profite". La classe gagnante reçoit en plus un DVD du film "Dimensions" offert par l'ENS à chaque élève. Les lots du rallye sont généralement (outre des calculatrices, des clés USB, etc.) des visites de laboratoires, de sites scientifiques, de musées.

[8] IEN : Inspecteurs de l'Education Nationale qui interviennent dans le premier degré.

En près de quatre ans, *Math$\alpha$Lyon* a visité plus d'une trentaine d'établissements, vu passer près de cinq cent classes (dans les trois départements de l'académie) et rencontré plusieurs milliers de visiteurs lors de différentes manifestations.

Quel impact pour les élèves ? D'abord que de sourires ! Les élèves aiment, le montrent et n'hésitent pas à le dire aux chercheurs. L'aspect ludique interpelle et invite à se prendre au jeu. Manipuler, toucher de beaux objets est non seulement un plaisir mais aussi un moteur pour se poser des questions, pour construire des mathématiques dans sa tête et pour développer l'envie d'aller plus loin. Face aux manipulations, les inhibitions, les préjugés et les réticences tombent vite !

Les enseignants découvrent leurs classes sous un jour qu'ils n'imaginaient souvent pas (une phrase qui revient souvent : "c'est bien la première fois que je n'arrive pas à les faire sortir d'une heure de maths ! Vous devriez venir toutes les semaines ..."). Ils profitent autant que les élèves de la visite des chercheurs. Une enseignante nous a récemment écrit :
"Mes différents collègues et moi même avons pu découvrir les élèves sous un autre angle et faire un peu renaitre l'intérêt des mathématiques.
Nous sommes dans un établissement sensible (ZEP) dans lequel beaucoup d'élèves sont en situation d'échec scolaire, mais vous les avez touchés et interpelés. Sans vous le montrer, ils étaient aussi très impressionnés, que des gens "importants et intelligents" comme vous viennent les voir !
Vous avez su aussi vous mettre à leur niveau et faire passer des notions à ces élèves sans les prendre pour des idiots. Ce qui est très difficile !
Ils ont été à l'écoute, ils avaient envie, c'est franchement beau à voir...
Je le redis, cette expo devrait être "obligatoire" dans tous les établissements de France."

Et du côté des chercheurs ? La satisfaction s'affiche tout autant ! Le plaisir compense la fatigue de six heures passées en face d'élèves curieux et passionnés ... L'implication des chercheurs dans la diffusion des mathématiques a toujours été importante à Lyon. Tous tombent d'accord pour souligner l'importance de cette action. Pour les jeunes chercheurs c'est aussi l'occasion de faire un premier pas dans une action de vulgarisation (c'est rassurant d'intervenir à quatre). Pour d'autres c'est la rencontre avec des scolaires qui est passionnante.

Bien sûr tout les établissements visités souhaitent nous revoir tous les ans !
La programmation est remplie plus d'un an à l'avance ! Et malheureusement, dans l'état actuel des choses, le nombre de demandes à satisfaire chaque année ne permet pas de revoir un établissement scolaire déjà visité. D'autres actions qui devraient voir rapidement le jour permettront (peut être) de satisfaire une demande de plus en plus importante.

Actuellement l'équipe renouvelle des expériences proposées et réfléchit pour en développer d'autres tout en préparant la prochaine année scolaire.

Etienne Ghys, écrivait[9] :
"Les mathématiciens sont souvent embarrassés pour faire connaître leur discipline : Ils aimeraient faire visiter leur monde virtuel et en montrer les merveilles. Mais l'accès n'en est pas facile, si bien que la tentation est grande de ne présenter que les retombées des mathématiques dans la vie de tous les jours. Le risque est alors de dénaturer la vraie substance de l'activité mathématique".
Cette préoccupation reste d'actualité et est très générale, de partout. Une action comme *Math$\alpha$Lyon* apporte un élément de réponse qui, bien sûr, n'est pas isolé. C'est une pièce dans le paysage de la diffusion des mathématiques qui en comporte beaucoup d'autres : des films (comme "Dimensions"), des sites (comme "Images des Mathématiques" et bien d'autres), des promenades mathématiques, des conférences ou des cycles de conférences, des compétitions ou des rallyes, des actions "courtes" (comme "Hippocampe"[10]) ou d'autres plus longues (comme "Maths en Jeans"[11]) ...

[9] Dans les "Carnets Scientifiques" de l'université Claude Bernard (2006).

[10] Stages d'initiation à la recherche en mathématiques proposés par un certain nombre d'IREM. Voir l'article : `http://www.irem.ups-tlse.fr/spip/spip.php?article144`

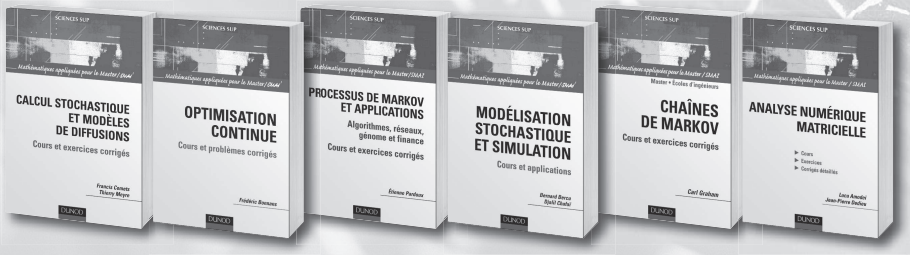
[11] Voir le site : `http://mathenjeans.free.fr/amej/accueil.htm`

# MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES POUR LE MASTER/SMAI

Les ouvrages de la série « Mathématiques appliquées pour le Master/SMAI » s'adressent aux étudiants en Master ou en écoles d'ingénieurs.
Adaptés aux nouveaux cursus LMD, ils répondent à une double exigence de qualité scientifique et pédagogique.
La SMAI assure la direction éditoriale grâce à un comité renouvelé périodiquement, et largement représentatif des différents thèmes des mathématiques appliquées. Son ambition est de constituer un ensemble d'ouvrages d'enseignement de référence.

**Déjà parus :**

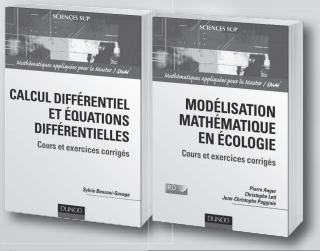
- **CALCUL STOCHASTIQUE ET MODÈLES DE DIFFUSIONS**
  *Francis Comets, Thierry Meyre*
- **OPTIMISATION CONTINUE**
  *Frédéric Bonnans*
- **PROCESSUS DE MARKOV ET APPLICATIONS**
  *Étienne Pardoux*
- **MODÉLISATION STOCHASTIQUE ET SIMULATION**
  *Bernard Bercu, Djalil Chafaï*
- **CHAÎNES DE MARKOV**
  *Carl Graham*
- **ANALYSE NUMÉRIQUE MATRICIELLE**
  *Luca Amodei, Jean-Pierre Dedieu*




Réalisation : HATEO

**À paraître en 2010 :**

- **CALCUL DIFFÉRENTIEL ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES**
  *Sylvie Benzoni-Gavage*
- **MODÉLISATION MATHÉMATIQUE EN ÉCOLOGIE**
  *Pierre Auger, Christophe Lett, Jean-Christophe Poggiale*




www.dunod.com

SMAI

DUNOD
ÉDITEUR DE SAVOIRS

# Prix de thèse SMAI-GAMNI

## Méthodes numériques adaptatives pour la simulation de la dynamique de fronts de réaction multi-échelles en temps et en espace

*par* Max Duarte [1]

Laboratoire J.-A. Dieudonné - UMR CNRS 7351
Université Nice Sophia-Antipolis
max.duarte@unice.fr

## 1 Introduction

Dans de nombreuses applications, l'étude des phénomènes physiques implique le couplage de plusieurs sous-processus qui évoluent simultanément dans le temps mais avec des échelles de temps très différentes ; ils présentent également de fortes hétérogénéités spatiales, voire des structures très localisées. Tel est le cas, par exemple, des fronts de réaction qui se propagent dans des milieux homogènes. Ils présentent différents temps caractéristiques allant des échelles chimiques les plus rapides situées dans des fronts très localisés en espace, aux échelles les plus lentes dans les zones chimiquement peu actives et finalement, aux échelles associées à la vitesse de propagation du front qui se trouvent être relativement lentes. Ces fronts possèdent le même caractère multi-échelle en espace avec des épaisseurs de la zone active chimiquement particulièrement petites par rapport aux domaines d'étude nécessaires pour bien décrire ce type de problème. Le nombre élevé de variables et de paramètres qui résultent de la modélisation détaillée de ces phénomènes, ou tout simplement d'une discrétisation garantissant une résolution adéquate des diverses structures spatiales, se traduit par une très forte consommation de ressources informatiques pour mener à bien les simulations numériques correspondantes. Une autre difficulté, qu'il faut prendre en compte, concerne la raideur associée à ce type de problème, que ce soit via le terme source chimique qui présente en général un large spectre d'échelles de temps caractéristiques ou encore via la présence de fort gradients très localisés associés aux fronts de réaction.

[1] Cette thèse a été soutenue le 9 décembre 2011 à l'École Centrale Paris, et a été préparée au Laboratoire d'Energétique Moléculaire et Macroscopique, Combustion (EM2C), UPR CNRS 288, avec une bourse BDI cofinancée par les instituts de mathématiques et de sciences de l'ingénieur du CNRS : INSMI et INSIS. Ces travaux de thèse ont été menés sous la direction de Marc Massot (Lab. EM2C, ECP) et co-encadrés par Stéphane Descombes (Lab. J.-A. Dieudonné, Université Nice Sophia-Antipolis) et Frédérique Laurent (Lab. EM2C, ECP), en collaboration avec Thierry Dumont et Violaine Louvet (Institut Camille Jordan, Université de Lyon) et Christian Tenaud (LIMSI, Orsay).

Une façon de faire face à ces difficultés est de profiter de la puissance de calcul des moyens informatiques actuels, en exploitant des architectures parallèles et massivement parallèles (voir par exemple [7, 48]). Un point de vue différent consiste à développer des techniques de modélisation ou des formulations alternatives qui permettraient d'approcher de façon la plus précise possible la dynamique complète du problème en visant surtout des coûts de calcul moins importants en réduisant la raideur des systèmes étudiés. C'est le cas par exemple des méthodes de réduction des schémas réactionnels [40, 45], des échelles rapides associées au système dynamique du problème [41, 37], ou des techniques d'épaississement de fronts de réaction [9], qui permettent de résoudre de manière efficace un modèle approché des mécanismes multi-échelles en temps et en espace. Une autre voie, complémentaire aux deux précédentes, se focalise sur la conception de schémas numériques robustes, basés sur des estimations théoriques et efficaces dans la pratique, pour résoudre globalement la raideur et la complexité associées aux équations générales, tout en limitant et en optimisant les besoins informatiques en termes de temps de calcul et d'espace mémoire requis. Ce travail de thèse s'inscrit plutôt dans ce dernier axe pour la simulation numérique des phénomènes complexes multi-échelles.

Dans ce contexte général, la recherche scientifique actuelle fait des efforts considérables de développement à l'interface des différentes branches, mathématiques appliquées, informatique scientifique, calcul scientifique intensif, modélisation physique détaillée, pour mener des simulations numériques de plus en plus détaillées et précises, voire prédictives, sur des applications physiques concrètes. Cependant, en grande partie à cause de la haute complexité et les coûts de calculs élevés des simulations dans des configurations réalistes, la validation des résultats numériques se fait soit via une confrontation avec des données expérimentales sur des quantités moyennées[2] ou des paramètres physiques théoriques, soit via l'analyse et l'étude détaillées de cas numériques simplifiés, souvent monodimensionnels, dans un cadre plus académique. Le cadre de ce travail repose sur un nouveau paradigme de stratégies numériques, qui complète et étend cette approche pluri-disciplinaire, par l'introduction de nouveaux outils théoriques et numériques qui permettraient d'évaluer la précision des méthodes numériques. Le contrôle des erreurs introduites par les schémas numériques d'intégration temporelle devient donc l'objectif final, où l'on vise à estimer dans la pratique et de façon quantitative la qualité des résultats numériques, indépendamment de la complexité, de la taille ou de la dimension des modèles.

Nous abordons dans cette thèse le développement d'une nouvelle génération de méthodes numériques pour la résolution des EDP évolutives qui modélisent des phénomènes multi-échelles en temps et en espace issus de divers domaines applicatifs [20]. En conséquence, il s'agit de développer des méthodes qui garantissent la précision des résultats via l'adaptation temps-espace, en présence de

[2]Les détails de la dynamique étant soit hors de portée des mesures expérimentales ou les comparaisons détaillées menant à de très fortes difficultés, on privilégie souvent une comparaison de quantités et fluctuations moyennes. Un axe de recherche dans lequel se situe ce travail est aussi le projet MUSE (PI. M. Massot) du RTRA DIGITEO qui propose quelques éléments de réponse pour mener à bien ce type de comparaisons quantitatives de la dynamique détaillée des phénomènes en lien avec le Laboratoire de Mathématiques d'Orsay et le LIMSI.

forte raideur en s'appuyant sur des outils théoriques solides, tout en permettant une implémentation efficace. Même si nous étendons ces idées à des systèmes plus généraux par la suite, ce travail se focalise dans un premier temps sur les systèmes de réaction-diffusion raides. La base de la stratégie numérique s'appuie sur une décomposition d'opérateur spécifique, dont le pas de temps est choisi de manière à respecter un niveau de précision donné par la physique du problème, et pour laquelle chaque sous-pas utilise un intégrateur temporel d'ordre élevé dédié. Ce schéma numérique est ensuite couplé à une approche de multirésolution spatiale adaptative, introduite dans [8], permettant une représentation de la solution sur un maillage dynamique adapté. L'ensemble de cette stratégie a conduit au développement du code de simulation générique 1D/2D/3D académique MBARETE[3], de manière à valider les développements théoriques et numériques dans le contexte de configurations pratiques raides issues de plusieurs domaines d'application.

L'efficacité algorithmique de la méthode est démontrée par la simulation d'ondes de réaction raides dans le domaine de la dynamique chimique non-linéaire [26] et dans celui de l'ingénierie biomédicale pour la simulation des accidents vasculaires cérébraux [25, 27]. Pour étendre l'approche à des applications plus complexes et plus fortement instationnaires, nous introduisons pour la première fois une technique de séparation d'opérateur avec pas de temps adaptatif qui permet d'atteindre une précision donnée et garantie malgré la raideur des EDP [14]. La méthode de résolution adaptative en temps et en espace qui en résulte, étendue au cas convectif, permet une description consistante de problèmes impliquant une très large palette d'échelles de temps et d'espace et des scénarios physiques très différents, que ce soit la propagation des décharges répétitives pulsées nanoseconde dans le domaine des plasmas [21] ou bien l'allumage et la propagation de flammes dans celui de la combustion [23, 24]. L'objectif de la thèse est l'obtention d'un solveur numérique qui permet la résolution des EDP raides avec contrôle de la précision du calcul en se basant sur des outils d'analyse numérique rigoureux, et en utilisant des moyens de calculs standards dans un premier temps avant de passer vers des architectures de calcul de plus grande taille.

Ces travaux ont aussi motivé de nouvelles études, quelques unes achevées et d'autres en cours de finalisation, tant dans le domaine de l'ingénerie, où par exemple l'algorithme introduit dans [21] a servi de base numérique pour étudier des configurations physiques complexes des décharges plasma [4], que dans le domaine mathématique comme l'analyse numérique des techniques de séparation d'opérateur pour caractériser les erreurs locales d'approximation dans des configurations non-linéaires [13] ou encore la capacité d'approcher correctement la vitesse de propagation de fronts d'onde [15]. Dans ce qui suit, on présente d'abord et de façon succincte quelques détails sur les éléments clés de la stratégie numérique proposée. Puis, quelques illustrations numériques seront proposées, choisies parmi les applications étudiées en détail dans le manuscrit de thèse [20].

[3]La base structurelle de la partie multirésolution du code MBARETE provient du code MR CHORUS (Déclaration d'Invention DI 03760-01), développé par Christian Tenaud au LIMSI pour la résolution des équations de Navier-Stokes compressibles. Voir dans [55] pour plus de détails sur cette implémentation, basée sur des structures d'arbre gradué et tableaux de pointeurs en FORTRAN 90/95. La majorité des algorithmes du code MBARETE sont détaillés dans [20].

# 2 Construction de la stratégie numérique

On introduit dans cette partie quelques éléments pour expliquer les différents ingrédients de la méthode adaptative en temps et en espace. On présente la stratégie numérique qui se base sur une méthode de séparation d'opérateur avec des schémas d'intégration d'ordre élevé dédiés, l'adaptation dynamique du pas de temps d'intégration ainsi que l'adaptation du maillage à travers une décomposition en base d'ondelettes du type multirésolution.

## 2.1 Intégration temporelle des EDP raides

On considère pour la suite et à titre d'illustration une équation du type réaction-diffusion mono-dimensionnelle :

$$\left.\begin{aligned} &\partial_t u - \partial_x^2 u = f(u), \quad x \in \mathbb{R},\, t > 0, \\ &u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

pour laquelle on suppose que la fonction $f$ contient des échelles temporelles rapides et que la solution de (2.1) présente également de fort gradients spatiaux. On suppose donc que l'équation (2.1) est raide et qu'elle modélise des fronts de réaction multi-échelles en temps et en espace. Bien que l'intégration numérique par une méthode explicite permette une implémentation à la fois simple pour des problèmes potentiellement très complexes et facile à coupler à d'autres techniques numériques ou de calcul parallèle, elle implique aussi de sévères restrictions de stabilité pour des problèmes raides et donc un gros effort de calcul à cause des pas d'intégration fortement limités [30]. D'un autre côté, des méthodes implicites dédiées permettent en général de lever cette contrainte mais leur implémentation se limitent souvent à des problèmes de petite taille du fait de leurs besoins en terme d'espace mémoire importants. Leur efficacité est cependant assurée à condition de développer des solveurs appropriés pour les systèmes non-linéaires [19], ce qui n'est pas une tâche simple en ce qui concerne les modèles complexes pour lesquels la convergence des méthodes itératives est très lente et pas toujours garantie.
Une famille de méthodes appelées schémas IMEX (Implicite-Explicite), a été développée afin d'exploiter les avantages de chacune des approches précédentes avec des gains d'efficacité considérables [32, 10, 3, 2, 57]. Ces techniques considèrent l'utilisation des discrétisations temporelles implicite et explicite respectivement pour les termes ou variables raides et non raides du système original. Néanmoins, la construction de ces méthodes hybrides impose des études théoriques rigoureuses pour établir les conditions globales de stabilité et d'ordre du schéma IMEX qui en résulte [28, 34, 6]. Ces conditions induisent des contraintes assez techniques qui limitent l'utilisation des schémas d'ordre élevé pour des problèmes complexes. D'autre part, la stabilité de ces méthodes reste limitée par l'intégration explicite de la partie non raide, en général des termes de transport, de la diffusion ou de la convection. Cette limitation génère des pas d'intégration très restrictifs pour des discrétisations spatiales très fines, souvent nécessaires pour

une résolution correcte des fronts[4].

## 2.2 Séparation d'opérateur

Une autre façon de profiter de la combinaison intelligente de schémas différents et de réduire les coûts de calcul à travers un choix adéquat de méthodes numériques, consiste à utiliser une technique de séparation d'opérateur ou splitting [52, 42], aussi appelée méthode à pas fractionnaires [53, 54, 59]. Pour l'équation (2.1), la séparation d'opérateur considère la résolution indépendante des sous-problèmes suivants :

$$\left.\begin{array}{ll} \partial_t v - \partial_x^2 v = 0, & x \in \mathbb{R},\, t > 0, \\ v(x,0) = v_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{array}\right\} \tag{2.2}$$

et

$$\left.\begin{array}{ll} \partial_t w = f(w), & x \in \mathbb{R},\, t > 0, \\ w(x,0) = w_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{array}\right\} \tag{2.3}$$

En notant par $X^t$ et $Y^t$ respectivement les semi-flots associés aux équations (2.2) et (2.3), les approximations de Lie, de premier ordre, de la solution exacte notée $T^t u_0$ de l'équation (2.1) sont données par

$$\mathcal{L}_1^{\Delta t} u_0 = X^{\Delta t} Y^{\Delta t} u_0, \quad \mathcal{L}_2^{\Delta t} u_0 = Y^{\Delta t} X^{\Delta t} u_0, \tag{2.4}$$

et celles de Strang [52], de deuxième ordre, par

$$\mathcal{S}_1^{\Delta t} u_0 = X^{\Delta t/2} Y^{\Delta t} X^{\Delta t/2} u_0, \quad \mathcal{S}_2^{\Delta t} u_0 = Y^{\Delta t/2} X^{\Delta t} Y^{\Delta t/2} u_0, \tag{2.5}$$

où $\Delta t$ correspond au pas de splitting, c'est à dire au temps pendant lequel les solutions des sous-problèmes (2.2) et (2.3) évoluent de façon indépendante[5].
À la différence des méthodes IMEX, il n'existe aucune interaction entre les résolutions de (2.2) et (2.3), et la stabilité des approximations (2.4) et (2.5) est garantie à condition que les méthodes, implicites ou explicites, choisies pour approcher $X^t$ et $Y^t$ restent stables. La capacité d'utiliser des schémas de nature complètement différente pour chaque sous-problème est un atout majeur, qui permet un grand choix de solveurs et une simplicité d'implémentation de la méthode ; ces caractéristiques sont très appréciées pour traiter des modèles complexes (voir par

[4] Un schéma IMEX très performant est donné par celui d'ordre 1 conçu dans [57] pour des systèmes de réaction-diffusion, pour lequel on considère un solveur RKC [49], basé sur des schémas de Runge-Kutta explicites stabilisés avec des domaines de stabilité étendus le long de l'axe réel négatif, pour la résolution explicite de la diffusion. La réaction est résolue point par point avec un schéma de type Euler implicite emboîté dans les étages RKC.

[5] On peut construire des schémas de splitting d'ordre plus élevé, mais ils impliquent nécessairement des coefficients complexes ou négatifs pour la composition des différents opérateurs [29], pas toujours appropriés pour les problèmes raides et surtout plus difficiles à implémenter dans la pratique.

exemple [35, 12, 44]). En particulier, dans de nombreuses applications, la résolution des termes chimiques du type (2.3) implique des calculs très lourds, principalement à cause de la raideur des équations. Une méthode de séparation d'opérateur permet l'utilisation de schémas implicites dédiés pour l'intégration des termes sources, en tenant compte du fait que, pour des fonctions indépendantes des cordonnées spatiales, on résout en chaque point de discrétisation un problème de taille réduit donné par un système indépendant d'équations différentielles ordinaires. Par contre, la séparation d'opérateur implique un découplage clair et net des divers phénomènes physiques du problème, entre la réaction et la diffusion dans le cas de l'équation (2.1), et une telle approximation introduit naturellement ce qu'on connaît dans la littérature comme les erreurs de splitting. Même s'il existe des configurations physiques pour lesquelles on réussit à éviter des erreurs de splitting, comme démontré dans [38] pour des équations du type réaction-diffusion-convection, dans la majorité des cas pratiques on essaie de limiter ces erreurs en prenant des pas de splitting suffisamment petits, de l'ordre des échelles chimiques ou numériques les plus rapides, de façon à garantir *a priori* une résolution correcte de la dynamique du problème physique couplé. Rappelons qu'en général un des intérêts principaux à faire du splitting vient du fait que les termes chimiques sont résolus par une méthode implicite, les pas de splitting sont donc souvent directement liés aux conditions de stabilité des méthodes explicites [35, 12, 44], mais la stabilité ne garantit pas nécessairement une résolution correcte du problème à une précision donnée. La définition de critères clairs et généraux pour le choix du pas de splitting reste ainsi un problème ouvert dans la littérature et représente un point clé pour l'amélioration de la performance numérique des méthodes de séparation d'opérateur, notamment vis à vis de la précision numérique des approximations.

### 2.2.1 Analyse numérique des erreurs de splitting

Bien que l'analyse numérique des méthodes de séparation d'opérateur du type (2.4) et (2.5) permette d'établir l'ordre d'approximation de ces schémas par rapport à la solution exacte du problème complet couplé (2.1), cette analyse classique, basée principalement sur des développements asymptotiques (voir par exemple [29] pour les EDO et [33] pour les EDP), ne reste valable que pour des pas de splitting suffisamment petits et n'est donc pas suffisante pour expliquer la dégénérescence des ordres d'approximation obtenue pour des configurations raides [58, 51, 46]. Une étude mathématique complémentaire caractérisant ces erreurs de splitting dans des régimes non-asymptotiques, c'est à dire pour des pas de splitting relativement grands, constitue un point clé de recherche car l'utilisation des pas de splitting de taille réduite limite énormément l'efficacité de ces schémas notamment pour des problèmes raides qui présentent des échelles rapides de très courte durée, qui doivent être prises en compte et résolues correctement, mais qui souvent n'interviennent pas directement dans la dynamique globale du phénomène. Quelques études théoriques ont été récemment présentées dans ce contexte pour des EDO non-linéaires [36] et des systèmes de réaction-diffusion linéaires [50] et finalement non-linéaires [17], ce qui permet d'évaluer et mieux expliquer l'influence des non-linéarités au sein du problème. Dans toutes ces études on caractérise les erreurs de splitting de Lie et de Strang pour des

pas de splitting plus grands que les échelles temporelles les plus rapides, et on montre une meilleure performance des schémas qui finissent par l'opérateur qui présente les échelles les plus rapides dans le système de départ ; en particulier, dans [50] et [17], il s'agit de l'opérateur associé à la réaction.
D'autres études complémentaires ont été aussi menées, basées cette fois sur une représentation exacte des erreurs locales de splitting introduite dans [18], où l'évolution temporelle de l'erreur est explicitement décrite sans avoir recours à une développement asymptotique. L'influence des forts gradients spatiaux dans la solution d'une équation de réaction-diffusion a été ainsi évaluée à travers un système d'EDO qui provient de la discrétisation d'un système linéaire de réaction-diffusion dans [16], ou en dimension infinie dans [22] pour une équation de réaction-diffusion linearisée[6]. D'après ces études, on obtient des estimations alternatives de l'erreur de splitting, qui sont générales et qui permettent en même temps une évaluation précise des bornes trouvées. Par exemple, on a étudié dans [22] une équation du type (2.1) avec un terme source linéaire : $f(u) = V(x)u$, qui provient de la linéarisation du système de départ autour du profil de la solution, dans ce cas particulier, de type onde. On a donc démontré respectivement dans les lemmes $2.5$ et $2.6$ dans [22] que, pour un schéma de Lie, $\mathcal{L}_1$ dans (2.4), on obtient ces représentations équivalentes de l'erreur[7] :

$$\left\|T^{\Delta t}u_0 - \mathcal{L}_1^{\Delta t}u_0\right\|_{L^2} \leq \left(\frac{\Delta t^2}{2}\|\partial_x^2 V\|_\infty + \frac{2\Delta t^3}{3}\|\partial_x V\|_\infty^2\right)\|u_0\|_{L^2} + \Delta t^2\|\partial_x V\|_\infty\|\partial_x u_0\|_{L^2}, \tag{2.6}$$

et

$$\left\|T^{\Delta t}u_0 - \mathcal{L}_1^{\Delta t}u_0\right\|_{L^2} \leq \left(\frac{8}{3\sqrt{2e}}\Delta t^{1.5}\|\partial_x V\|_\infty + \frac{\Delta t^2}{2}\|\partial_x^2 V\|_\infty\right)\|u_0\|_{L^2}, \tag{2.7}$$

ce qui est cohérent avec les résultats précédents présentés dans [16] pour le cas discrétisé de (2.1) avec le même type de terme source linéaire.
Ces estimations permettent d'expliquer la réduction d'ordre obtenue pour des solutions avec forts gradients : pour des pas de splitting suffisamment petits, la borne (2.6) décrit le comportement classique du schéma de Lie à l'ordre $1$ ; pour des pas progressivement plus grands et des forts gradients, $\|\partial_x u_0\|_{L^2}$ devient grand et c'est la borne (2.7) qui permet de caractériser l'erreur locale et en particulier la réduction d'ordre qu'on retrouve dans les calculs numériques pour ce type de configuration. Cependant deux conclusions importantes peuvent être mises en valeur à partir de ces études, illustrées par exemple par les estimations (2.6) et (2.7) : d'abord, malgré la perte d'ordre constatée pour ces problèmes raides, on démontre aussi que les erreurs locales restent bornées même pour des pas de splitting relativement grands (ceci est valable aussi pour les cas multi-échelle temporelle décrits dans [17]) ; puis, la réduction d'ordre implique aussi que l'erreur

[6] Dans l'article [22], qui n'est pas détaillé dans cette synthèse, on présente une étude théorique et numérique de la combinaison des méthodes de séparation d'opérateur et l'algorithme "pararéel" [39] pour des configurations raides.

[7] L'étude du cas $\mathcal{L}_2$ est incluse dans [20] et donne des résultats similaires.

croît avec un taux réduit au fur et à mesure qu'on augmente le pas de splitting, et donc dès qu'on s'éloigne de la zone asymptotique, on obtient des erreurs plus faibles que celles qu'on aurait obtenues avec l'ordre original. Cette dernière caractéristique est encore renforcée par le fait qu'on identifie aussi une réduction du coefficient associé à l'erreur locale : une constante proportionnelle à $\|\partial_x u_0\|_{L^2}$ à l'ordre $2$ dans (2.6), plus grande que celle proportionnelle à $\|u_0\|_{L^2}$ à l'ordre $1.5$ dans (2.7), pour des fronts d'onde localisés en espace comme ceux qui nous intéressent.
Des conclusions similaires peuvent être faites à partir des résultats pour les schémas de Strang dans [16] et [22], et peuvent être aussi étendues pour les schémas de Lie et de Strang dans le cadre des équations de réaction-diffusion avec un terme source complètement non-linéaire [13].

### 2.2.2 Construction d'un schéma de splitting dédié

Avec cette base théorique qui permet d'étendre la caractérisation des schémas de séparation d'opérateur aux problèmes raides pour une large plage de pas de splitting, on a introduit dans [26] une nouvelle façon de construire ce type de solveurs pour des systèmes de réaction-diffusion. En tenant compte du fait que, dans plusieurs phénomènes physiques, les temps caractéristiques associés aux divers processus ne sont pas nécessairement du même ordre, et que la dynamique globale peut aussi évoluer à une échelle temporelle complètement différente, l'idée principale consiste à découpler complètement la résolution du problème, non seulement au niveau des solveurs utilisés pour chaque sous-problème, mais aussi en termes de pas d'intégration de chaque sous-partie et du pas de splitting. L'analyse numérique montre que les erreurs d'approximation des méthodes de séparation d'opérateur sont reliées au pas de splitting dans tous les cas, asymptotiques comme non-asymptotiques, à condition que les sous-problèmes soient résolus de manière exacte. On choisit donc des méthodes dédiées d'ordre élevé, de préférence au moins $3$, mono-pas et avec adaptation automatique du pas de temps à précision près pour intégrer chaque sous-problème. De cette façon, on garantit des erreurs d'intégration négligeables par rapport aux erreurs de splitting, celles-ci dépendantes du pas de splitting, lequel est choisi librement vis à vis des contraintes de stabilité ou de précision associées aux termes chimiques raides ou de la taille de la grille de discrétisation spatiale, mais en fonction de la précision désirée pour décrire la dynamique globale du phénomène multi-échelle.
Pour les problèmes de réaction-diffusion, on a choisi dans [26] pour la résolution de la réaction une méthode de Runge-Kutta d'ordre $5$, mono-pas et implicite avec des propriétés de $A$- et $L$-stabilités telle que Radau5 [30] ; et le solveur ROCK4 [1], basé sur une méthode de type Runge-Kutta-Chebyshev, comme RKC [49], avec des domaines de stabilité étendus le long de l'axe réel négatif, pour la résolution explicite de la diffusion. Les deux solveurs adaptent leurs pas d'intégration selon les tolérances $\eta_{\mathrm{Radau5}}$ et $\eta_{\mathrm{ROCK4}}$ fixées au préalable par l'utilisateur. Finalement et d'après [17], on utilise le schéma de Strang $\mathcal{S}_2$ dans (2.5) pour les problèmes considérés avec un terme source très raide. D'autres solveurs pour les sous-problèmes peuvent aussi être utilisés selon les mêmes principes, lesquels s'appliquent également à d'autres types de problème, en cherchant toujours des erreurs d'intégration faibles par rapport à l'erreur de splitting. Chacun des solveurs doit résoudre

tout le spectre d'échelles temporelles associées à chaque sous-problème de façon indépendante en garantissant la stabilité et la précision des calculs. Le pas de splitting mesure ainsi le degré de découplage physique du problème pour une précision donnée, sachant que plus ce découplage devient grand et plus l'efficacité de la méthode augmente. D'où l'importance d'ajuster correctement ce paramètre.

### 2.2.3 Adaptation dynamique du pas de splitting

Pour des problèmes de propagation de fronts à vitesse relativement constante le pas de splitting peut aussi être fixe, car le temps caractéristique global du problème est intrinsèquement lié à la vitesse de l'onde ; ceci a été démontré numériquement par exemple dans [25] et [26]. Dans la littérature, les configurations les plus classiques considèrent soit un pas de splitting qui suit l'échelle la plus rapide, par exemple chimique, de diffusion ou convective, si toutes les intégrations se font explicitement ; soit un pas de splitting qui varie selon la stabilité des schémas explicites et qui n'est donc pas capable de prédire les variations physiques du phénomène global, sauf celles directement associées à l'intégration explicite, qui provient d'ailleurs du phénomène le moins raide. La question qui se pose est de savoir si l'on peut adapter de façon efficace, ce qui exclue la première possibilité précédente, le pas de splitting aux temps caractéristiques du phénomène, pour une vaste quantité de problèmes instationnaires avec des fortes variations temporelles et différents scénarios physiques.
Pour faire face à ce type de problème et en considérant une méthode de splitting pour laquelle l'erreur d'intégration temporelle est pilotée par le pas de splitting comme introduite précédemment dans [26], on a proposé dans [14] une méthode adaptative de séparation d'opérateur basée sur l'introduction d'une deuxième méthode de splitting emboîtée dans le schéma classique de Strang $\mathcal{S}_2$. On définit donc le schéma de Strang décalé comme

$$\mathcal{S}_\delta^{\Delta t} u_0 = Y^{(1/2-\delta)\Delta t} X^{\Delta t} Y^{(1/2+\delta)\Delta t} u_0, \tag{2.8}$$

d'ordre local 2 et avec $\delta$ compris entre $(-1/2, 0)$ et $(0, 1/2)$, lequel peut être vu comme une perturbation du schéma classique $S_2$, noté $S$ dans ce qui suit pour simplifier l'écriture. On a alors démontré dans le théorème 3.2 de [14] que

$$T^{\Delta t} u_0 - \mathcal{S}_\delta^{\Delta t} u_0 = \underbrace{T^{\Delta t} u_0 - \mathcal{S}^{\Delta t} u_0}_{\mathcal{O}(\Delta t^3)} + \underbrace{\mathcal{S}^{\Delta t} u_0 - \mathcal{S}_\delta^{\Delta t} u_0}_{\mathcal{O}(\delta \Delta t^2)}, \tag{2.9}$$

et en particulier

$$\mathcal{S}^{\Delta t} u_0 - \mathcal{S}_\delta^{\Delta t} u_0 = \delta \Delta t^2 f''(u_0) \left(\partial_x u_0\right)^2 + (\delta \Delta t^3). \tag{2.10}$$

En calculant pour chaque $\Delta t$ les solutions

$$\begin{pmatrix} \mathcal{S}^{\Delta t} u_0 \\ \mathcal{S}_\delta^{\Delta t} u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y^{\Delta t/2} X^{\Delta t} Y^{\Delta t/2} u_0 \\ Y^{(1/2-\delta)\Delta t} X^{\Delta t} Y^{(1/2+\delta)\Delta t} u_0 \end{pmatrix}, \tag{2.11}$$

où le premier demi-pas est commun aux deux schémas et les pas successifs sont calculés simultanément en doublant le nombre de variables, on peut estimer l'erreur locale de l'intégration (2.10) et le nouveau pas de splitting $\Delta t^{\text{new}}$ pour une tolérance $\eta$ choisie, par

$$\Delta^{\text{new}} = \Delta t \sqrt{\frac{\eta}{\left\| \mathcal{S}^{\Delta t} u_0 - \mathcal{S}_{\delta}^{\Delta t} u_0 \right\|}}. \tag{2.12}$$

Le choix de (2.8) assure un comportement similaire des deux schémas vis à vis de la réduction potentielle de l'ordre. La solution $S^{\Delta} u_0$ obtenue est ainsi acceptée si l'estimateur $\left\| S^{\Delta t} u_0 - \mathcal{S}_{\delta t}^{\Delta t} u_0 \right\|$ est plus petit que la tolérance $\eta$, et rejetée dans le cas contraire jusqu'au moment où l'on obtient des solutions avec une précision $\eta$. Le pas de splitting est mis à jour après chaque évaluation de (2.12), de même pour le temps d'intégration $t$, mais seulement si la dernière solution $S^{\Delta t} u(t)$ est acceptée. Finalement, le choix correct du paramètre $\delta$, comme détaillé dans [14], permet de garantir que l'estimateur d'erreur (2.10) est toujours valable même pour des régimes non-asymptotiques.

## 2.3 Adaptation dynamique du maillage : multirésolution

Dans toutes les études théoriques précédentes on a toujours fait l'analyse des erreurs directement en dimension infinie, ou bien on a négligé l'impact des erreurs de discrétisation spatiale sur les erreurs d'approximation numérique, ce qui se passerait par exemple si on discrétise les équations d'une manière suffisamment fine. D'un point de vue plutôt physique, une résolution fine des structures spatiales associées aux fronts permettraient une reproduction numérique fiable ainsi que des comparaisons qualitatives avec l'expérience, quelque fois même quantitatives. Dans tous les cas, on a intérêt à avoir des représentations spatiales suffisamment fines de façon à résoudre les différentes échelles spatiales du phénomène ; ceci implique cependant des simulations numériques de grande taille et par conséquence très coûteuses. Une façon souvent performante de réduire la taille et les coûts du calcul, pour des problèmes qui présentent des fronts localisés, consiste à raffiner le maillage en fonction de la résolution requise localement dans le domaine de calcul. Même s'il y a plusieurs techniques d'adaptation de maillage dans la littérature et elles sont largement utilisées dans des applications scientifiques et même industrielles, seules quelques unes ont la capacité d'évoluer dynamiquement.
Une des techniques d'adaptation dynamique de maillage, connue sous le nom de multirésolution, est basée sur la décomposition en base d'ondelettes de fonctions discrétisées. Cette approche a été d'abord partiellement introduite dans [31] pour des problèmes de conservation, et ensuite étendue dans [8] avec la base théorique correspondante. Dans [26], on a donc couplé à la technique de splitting détaillée brièvement dans le §2.2.2, une approche de multirésolution, basée sur [8], de façon à résoudre pour la première fois des EDP raides en utilisant un algorithme de multirésolution. Tous les détails sur les aspects théoriques et pratiques de la multirésolution peuvent être trouvés dans [43]. On a considéré dans notre implémentation une discrétisation de type volumes finis en cordonnées cartésiennes ; on considère ainsi un ensemble de grilles dyadiques emboîtées, où la

taille de la grille la plus fine est limitée par le niveau de résolution nécessaire ou tout simplement par l'espace mémoire dont on dispose. Une décomposition du type multirésolution permet de représenter une fonction discrétisée sur la grille la plus fine dans une base d'ondelettes définie sur l'ensemble de grilles dont les coefficients associées à chaque cellule deviennent des estimateurs locaux de la régularité spatiale de la fonction. En définissant un paramètre de seuillage $\varepsilon$, on élimine toutes les cellules de régularité locale élevée et on comprime ainsi la représentation spatiale de la fonction discrétisée en fonction de la valeur choisie de $\varepsilon$.
En particulier pour la solution $\mathbf{U}(t)$ du problème semi-discrétisé correspondante à (2.1), et l'approximation multirésolution $\mathbf{U}^{\mathrm{MR}}(t)$ obtenue avec le même intégrateur temporel mais en adaptant dynamiquement le maillage, on obtient que

$$\left\|\mathbf{U}(t) - \mathbf{U}^{\mathrm{MR}}(t)\right\|_{L^2} \leq C\varepsilon, \tag{2.13}$$

pour une constante $C$, positive et bornée. Cette borne a été démontré dans [8], mais pour la résolution d'une équation scalaire hyperbolique ; elle a été cependant considérée et prouvée dans la pratique pour des problèmes paraboliques par exemple dans [47, 5]. Le paramètre $\varepsilon$ permet ainsi de régler le niveau de compression de la représentation spatiale avec une précision donnée par rapport à celle correspondant à la résolution spatiale la plus fine ; cette capacité de contrôler les erreurs d'approximation introduites par la compression des représentations spatiales tout en préservant la structure des équations de départ ainsi que le caractère conservatif constitue le plus grand avantage des méthodes de multirésolution. Comme l'intégration temporelle s'effectue sur un maillage fixe, le cadre théorique considéré dans [14] reste valable dans la pratique et on note par $\mathbf{U}_{\mathrm{split}}(t)$ la solution du système semi-discrétisé correspondante à (2.1) avec le schéma de splitting adaptatif ; en considérant l'adaptation temporelle donnée par (2.12) et (2.13), on peut voir que les erreurs d'approximation de splitting et celles provenant de la multirésolution peuvent être retrouvées dans la solution $\mathbf{U}^{\mathrm{MR}}_{\mathrm{split}}(t)$, qui considère simultanément l'adaptation en temps et en espace :

$$\left\|\mathbf{U}(t) - \mathbf{U}^{\mathrm{MR}}_{\mathrm{split}}(t)\right\|_{L^2} \leq \underbrace{\left\|\mathbf{U}(t) - \mathbf{U}_{\mathrm{split}}(t)\right\|_{L^2}}_{O(\eta)} + \underbrace{\left\|\mathbf{U}_{\mathrm{split}}(t) - \mathbf{U}^{\mathrm{MR}}_{\mathrm{split}}(t)\right\|_{L^2}}_{O(\varepsilon)}. \tag{2.14}$$

Un choix raisonnable de ces paramètres considère une tolérance de multirésolution $\varepsilon$ plus petite que celle de l'intégration numérique $\eta$, de façon à garantir que l'évolution temporelle du phénomène, y compris les diverses structures spatiales multi-échelles, restent toujours bien représentées en espace. Dans la pratique des tolérances données par la même valeur permettent d'obtenir des solutions suffisamment précises avec un coût de calcul légèrement inférieur, comme démontré par exemple dans [21], en tenant compte des critères conservatifs de raffinement considérés pour cette implémentation de la multirésolution [26].

# 3 Illustration numérique

À titre d'illustration, on va considérer dans cette partie quelques aspects d'une étude d'auto-allumage des milieux réactifs, dont le modèle provient de [56], présentée dans [24]. La figure 1 montre la configuration physique : on considère deux milieux gazeux, confinés dans un domaine quadrangulaire et initialement de surfaces égales séparées par une ligne droite. Dans le demi-plan supérieur, on a du fuel frais à une température initial $T_{F,0}$ de $300\,\mathrm{K}$, et de l'oxygène chaud dans la partie inférieure à une température $T_{O,0}$ de $1000\,\mathrm{K}$. Le problème est modélisé par un système de réaction-diffusion-convection à deux variables où le champs de vitesse, donné par un tourbillon variable en temps et en espace, est calculé analytiquement et imposée pendant la résolution de la convection. On utilise les solveurs mentionnés dans le §2.2.2 pour les sous-problèmes de réaction et diffusion, et le schéma OSMP3 [11], d'ordre 3, pour le pas de convection effectué au milieu selon le schéma de Strang $\mathcal{S}_2$.

À l'instant initial, on introduit le tourbillon centré au point $(0,0)$, qui accélère ainsi le mélange des gaz ; un front de flamme commence à se mettre en place une fois qu'une certaine température est atteinte localement et que le mélange réactif s'allume, comme on voit dans la figure 1 à travers l'évolution temporelle de la température. Pour cette configuration de paramètres physiques, la dynamique de l'allumage de la flamme de diffusion correspond d'abord à un allumage dans les bras du tourbillon puis, dans un deuxième temps, en son cœur, avec des temps d'allumage différents impossibles à déterminer au préalable. Ce caractère multi-échelle temporelle, très localisé en espace, rend la description numérique du problème extrêmement délicate principalement du fait de l'apparition soudaine de mécanismes physiques différents, nécessitant une résolution spatiale très fine pour les capturer correctement. Ce problème constitue ainsi un très bon exemple de phénomène multi-échelle en temps et en espace pour lequel des méthodes numériques avec une capacité d'adaptation spatio-temporelle sont non seulement efficaces mais indispensables.

Dans la figure 2, on voit comment le pas de splitting augmente progressivement depuis une valeur initiale fixée à $10^{-8}$ pour garantir la prise en compte des variations rapides du tourbillon, jusqu'à l'ordre de $10^{-5}$ pendant la phase de mélange. Des rejets successifs sont constatées autour du moment de l'allumage massif du front de flamme, qui fait descendre le pas de splitting jusqu'à l'ordre de $10^{-7}$. Puis, une fois que le front de flamme est complètement développé, le pas de splitting recommence à augmenter jusqu'à un ordre légèrement inférieur à celui correspondant au mélange initial, ce qui indique une dynamique temporelle différente entre les états initial et final. Ce comportement du pas de splitting dépend du niveau de précision demandé. Dans le cas illustré, la tolérance $\eta$ a été fixée à $10^{-3}$. D'un autre côté, la compression de données est définie comme le pourcentage de cellules qui ont été éliminées par rapport à la grille la plus fine, $1024^2$ pour cette configuration. Il y a clairement une dépendance vis à vis de la tolérance $\varepsilon$ choisie et, comme le taux de remaillage est fixé par le pas de splitting, on voit que cela permet de mettre à jour rapidement le raffinement nécessaire pour représenter le front, dont l'épaisseur augmente considérablement après l'allumage (voir la figure 1).

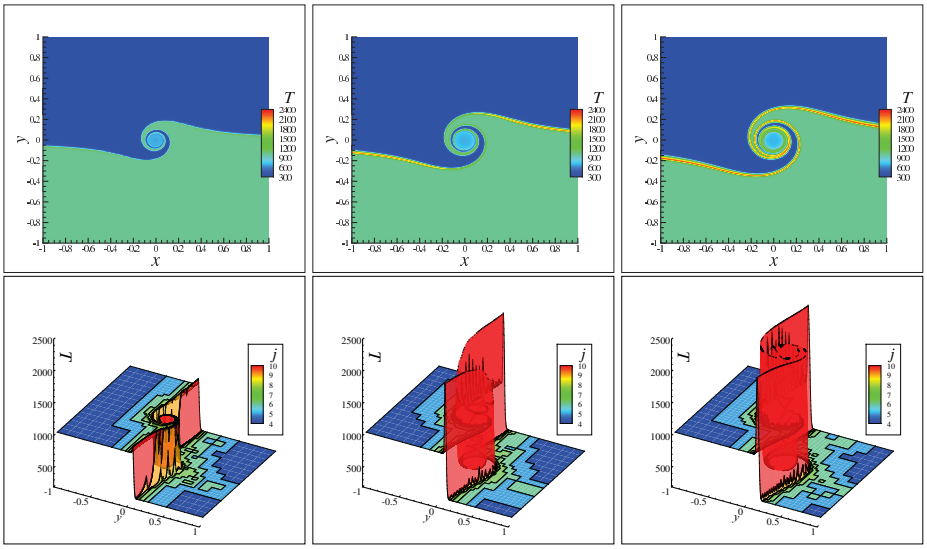


FIG. 1: Évolution de la température $T$ à $t = 5 \times 10^{-5}$ (gauche), $10^{-4}$ (centre), et $1,5 \times 10^{-4}$ (droite). Température initiale du fuel frais : $T_{F,0} = 300\,\mathrm{K}$, et température de l'oxygène chaud : $T_{O,0} = 1000\,\mathrm{K}$. Bas : maillage adapté avec $\varepsilon = 10^{-3}$ et une résolution équivalente à $1024^2$ points au niveau le plus fin $j = 10$.

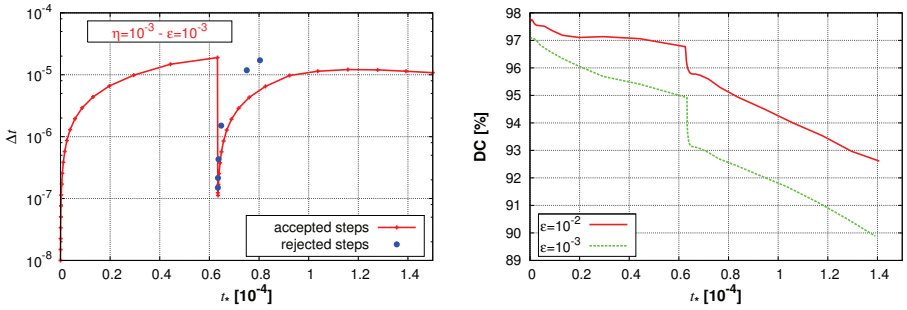



FIG. 2: Adaptation en temps et en espace donnée par l'évolution des pas de splitting avec $\eta = 10^{-3}$ (gauche), et la compression des données pour $\varepsilon$ égal à $10^{-2}$ et $10^{-3}$ (droite).

Pour cette configuration, les divers sous-pas utilisés par chaque solveur sont représentés dans la figure 3. L'avantage de découpler la gestion du temps d'intégration est considérable compte tenu de la différence importante entre les divers pas requis par les sous-problèmes et les pas de splitting nécessaires pour atteindre la

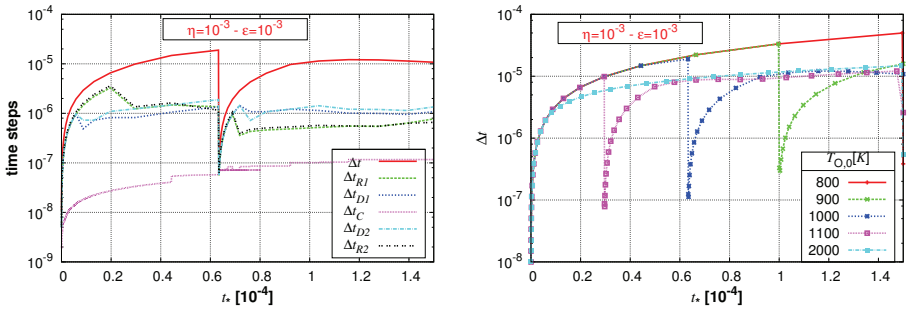



FIG. 3: Gauche : évolution du pas de splitting $\Delta t$, des sous-pas réactifs $\Delta t_{R1}$ et $\Delta t_{R2}$, de diffusion $\Delta t_{D1}$ et $\Delta t_{D2}$, et convectifs $\Delta t_C$. Droite : évolution du pas de splitting $\Delta t$ pour différentes températures initiales de l'oxygène $T_{O,0}$ et température du fuel $T_{F,0}$ de 300 K. Tolérances $\eta$ et $\varepsilon$ égales à $10^{-3}$.

tolérance donnée ; cette différence sera encore accentuée par des schémas d'ordre inférieur à ceux considérés ici. Les pas réactifs illustrés correspondent à ceux dans le front, dans les autres régions les pas locaux augmentent rapidement jusqu'à $Deltat/2$ dans les zones suffisamment éloignées du front. Cette simulation numérique prend à peu près 9 minutes en temps de calcul par rapport aux 208 minutes avec la multirésolution mais avec un pas de splitting de $10^{-7}$ correspondant à l'ordre de la contrainte la plus sévère pour cette configuration de solveurs : le pas convectif nécessaire pour garantir la stabilité. La résolution à grille uniforme de $1024^2$ et pas de splitting constant prend quant à elle 675 minutes. Finalement, la figure 3 montre aussi différentes configurations physiques pour la température initiale de l'oxygène et les pas de splitting qui en résultent avec le même solveur adaptatif en temps et en espace et les mêmes tolérances ; on y voit en particulier les différents comportements du pas de temps adaptatif en fonction du moment de l'allumage, ce qui illustre bien le lien qui existe entre les vraies échelles physiques du problème et celles capturées par le schéma pour la précision donnée. En particulier ce pas de splitting permet de découpler correctement les système de départ en fonction du comportement physique du problème et en aucun cas en fonction de la stabilité ou de la précision de l'intégration des sous-pas.

# 4 Conclusions principales

Pour un problème semi-discrétisé dont la discrétisation spatiale est fixée par le caractère multi-échelle du problème ou bien limitée par les ressources informatiques dont on dispose, la combinaison de ces méthodes adaptatives en temps et en espace permet de réduire les coûts de calcul tout en respectant un certain niveau de précision des représentations spatio-temporelles. La conception de la stratégie numérique, basée sur des principes théoriques et pratiques solides, per-

met de généraliser l'approche à diverses applications ayant un caractère multi-échelle important en temps et en espace, y compris à des scénarios physiques complètement différents. La complexité algorithmique est substantiellement réduite puisqu'on a à définir seulement deux paramètres pour mener les calculs : la valeur de seuillage $\varepsilon$ de la multirésolution qui pondère la compression de données et les erreurs d'approximation associées aux représentations spatiales comprimées ; et la tolérance de précision de la séparation d'opérateur $\eta$ qui limite dynamiquement le degré de découplage physique du phénomène pour un certain niveau de précision de l'intégration numérique. Cette évaluation de la qualité des résultats numériques se fait ainsi simultanément avec la résolution du problème et de façon indépendante de la dimension ou complexité du modèle d'étude.
De cette façon, ce travail propose une nouvelle génération de méthodes numériques adaptatives qui permet d'obtenir, y compris pour des configurations 3D, des estimations de précision temps/espace sur un niveau de grille la plus fine fixé pour une vaste gamme de modèles physiques multi-échelles en temps et en espace. Grâce à ces outils, nous sommes parvenus à mener à bien des simulations numériques pour différentes applications allant des ondes chimiques non-linéaires et des accidents vasculaires cérébraux, aux études de flamme laminaires de prémélange et de diffusion, ainsi qu'aux décharges plasma du type streamer. Les outils développés ont ainsi permis des avances spécifiques dans ces domaines d'application comme détaillées dans [4], [24] et [27].

## Références

[1] A. Abdulle. Fourth order Chebyshev methods with recurrence relation. *SIAM J. Sci. Comput.*, 23(6) :2041–2054, 2002.

[2] U.M. Ascher, S.J. Ruuth, and R.J. Spiteri. Implicit-explicit Runge-Kutta methods for time-dependent partial differential equations. *Appl. Numer. Math.*, 25(2-3) :151–167, 1997.

[3] U.M. Ascher, S.J. Ruuth, and B.T.R. Wetton. Implicit-explicit methods for time-dependent partial differential equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 32(3) :797–823, 1995.

[4] Z. Bonaventura, A. Duarte, M. Bourdon, and M. Massot. Derivation of a merging condition for two interacting streamers in air. *Submitted, available online from HAL*, pages 1–9, 2012.

[5] R. Bürger, R. Ruiz-Baier, and K. Schneider. Adaptive multiresolution methods for the simulation of waves in excitable media. *J. Sci. Comput.*, 43(2) :261–290, 2010.

[6] B. Chabaud and Q. Du. A hybrid implicit-explicit adaptive multirate numerical scheme for time-dependent equations. *J. Sci. Comput.*, 51 :135–157, 2012.

[7] J.H. Chen. Petascale direct numerical simulation of turbulent combustion-fundamental insights towards predictive models. *Proc. Combust. Inst.*, 33(1) :99–123, 2011.

[8] A. Cohen, S.M. Kaber, S. Müller, and M. Postel. Fully adaptive multiresolution finite volume schemes for conservation laws. *Math. Comp.*, 72(241) :183–225, 2003.

[9] O. Colin, F. Ducros, D. Veynante, and T. Poinsot. A thickened flame model for large eddy simulations of turbulent premixed combustion. *Phys. Fluids*, 12(7) :1843–1863, 2000.

[10] M. Crouzeix. Une méthode multipas implicite-explicite pour l'approximation des équations d'évolution paraboliques. *Numer. Math.*, 35(3) :257–276, 1980.

[11] V. Daru and C. Tenaud. High order one-step monotonicity-preserving schemes for unsteady compressible flow calculations. *J. Comput. Phys.*, 193(2) :563–594, 2004.

[12] M.S. Day and J.B. Bell. Numerical simulation of laminar reacting flows with complex chemistry. *Combust. Theory Model.*, 4 :535–556, 2000.

[13] S. Descombes, M. Duarte, T. Dumont, F. Laurent, V. Louvet, and M. Massot. Analysis of operator splitting order reduction in the non-asymptotic regime for nonlinear reaction diffusion equations and application to the dynamics of premixed flames with complex chemistry. *In preparation*, 2012.

[14] S. Descombes, M. Duarte, T. Dumont, V. Louvet, and M. Massot. Adaptive time splitting method for multi-scale evolutionary partial differential equations. *Confluentes Math.*, 3(3) :413–443, 2011.

[15] S. Descombes, M. Duarte, and M. Massot. Characterization of splitting errors in the solution of wavefront speeds. *In preparation*, 2012.

[16] S. Descombes, T. Dumont, V. Louvet, and M. Massot. On the local and global errors of splitting approximations of reaction-diffusion equations with high spatial gradients. *Int. J. Comput. Math.*, 84(6) :749–765, 2007.

[17] S. Descombes and M. Massot. Operator splitting for nonlinear reaction-diffusion systems with an entropic structure : singular perturbation and order reduction. *Numer. Math.*, 97(4) :667–698, 2004.

[18] S. Descombes and M. Schatzman. Strang's formula for holomorphic semi-groups. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 81(1) :93–114, 2002.

[19] P. Deuflhard. *Newton methods for nonlinear problems*, volume 35 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2004. Affine invariance and adaptive algorithms.

[20] M. Duarte. *Méthodes numériques adaptatives pour la simulation de la dynamique de fronts de réaction multi-échelles en temps et en espace*. PhD thesis, Ecole Centrale Paris, France, 2011. Available online from http ://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00667857.

[21] M. Duarte, Z. Bonaventura, M. Massot, A. Bourdon, S. Descombes, and T. Dumont. A new numerical strategy with space-time adaptivity and error control for multi-scale streamer discharge simulations. *J. Comput. Phys.*, 231 :1002–1019, 2012.

[22] M. Duarte, M. Massot, and S. Descombes. Parareal operator splitting techniques for multi-scale reaction waves : numerical analysis and strategies. *ESAIM Math. Model. Numer. Anal.*, 45(5) :825–852, 2011.

[23] M. Duarte, M. Massot, S. Descombes, and T. Dumont. Adaptive time-space algorithms for the simulation of multi-scale reaction waves. In *Finite volumes for complex applications. VI. Problems & perspectives. Volume 1, 2*, volume 4 of *Springer Proc. Math.*, pages 379–387. Springer, Heidelberg, 2011.

[24] M. Duarte, M. Massot, S. Descombes, C. Tenaud, and S. Candel. Time-space adaptive numerical methods for the simulation of combustion fronts. In *Ann. Res. Briefs 2011*, pages 347–358. Center for Turbulence Research, Stanford University, 2012.

[25] M. Duarte, M. Massot, S. Descombes, C. Tenaud, T. Dumont, V. Louvet, and F. Laurent. New resolution strategy for multi-scale reaction waves using time operator splitting and space adaptive multiresolution : Application to human ischemic stroke. *ESAIM : Proc.*, 34 :277–290, 2011.

[26] M. Duarte, M. Massot, S. Descombes, C. Tenaud, T. Dumont, V. Louvet, and F. Laurent. New resolution strategy for multi-scale reaction waves using time operator splitting, space adaptive multiresolution and dedicated high order implicit/explicit time integrators. *SIAM J. Sci. Comput.*, 34(1) :A76–A104, 2012.

[27] T. Dumont, M. Duarte, S. Descombes, M.A. Dronne, M. Massot, and V. Louvet. Simulation of human ischemic stroke in realistic 3D geometry. *Submitted, available online from (http ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00546223)*, pages 1–37, 2012.

[28] J. Frank, W. Hundsdorfer, and J.G. Verwer. On the stability of implicit-explicit linear multistep methods. *Appl. Numer. Math.*, 25(2-3) :193–205, 1997.

[29] E. Hairer, C. Lubich, and G. Wanner. *Geometric numerical integration*, volume 31 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2006. Structure-preserving algorithms for ordinary differential equations.

[30] E. Hairer and G. Wanner. *Solving ordinary differential equations II*, volume 14 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1996. Stiff and differential-algebraic problems.

[31] A. Harten. Multiresolution algorithms for the numerical solution of hyperbolic conservation laws. *Comm. Pure Appl. Math.*, 48(12) :1305–1342, 1995.

[32] E. Hofer. A partially implicit method for large stiff systems of ODEs with only few equations introducing small time-constants. *SIAM J. Numer. Anal.*, 13(5) :645–663, 1976.

[33] W. Hundsdorfer and J. Verwer. *Numerical solution of time-dependent advection-diffusion-reaction equations*, volume 33 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[34] C.A. Kennedy and M.H. Carpenter. Additive Runge-Kutta schemes for convection-diffusion-reaction equations. *Appl. Numer. Math.*, 44(1-2) :139–181, 2003.

[35] O.M. Knio, H.N. Najm, and P.S. Wyckoff. A semi-implicit numerical scheme for reacting flow. II. Stiff, operator-split formulation. *J. Comput. Phys.*, 154(2) :428–467, 1999.

[36] R. Kozlov, A. Kværnø, and B. Owren. The behaviour of the local error in splitting methods applied to stiff problems. *J. Comput. Phys.*, 195(2) :576–593, 2004.

[37] S.H. Lam and D.A. Goussis. The CSP method for simplifying kinetics. *Int. J. Chem. Kinet.*, 26(4) :461–486, 1994.

[38] D. Lanser and J.G. Verwer. Analysis of operator splitting for advection-diffusion-reaction problems from air pollution modelling. *J. Comput. Appl. Math.*, 111(1-2) :201–216, 1999.

[39] J.-L. Lions, Y. Maday, and G. Turinici. Résolution d'EDP par un schéma en temps "pararéel". *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 332(7) :661–668, 2001.

[40] T. Lu and C.K. Law. Toward accommodating realistic fuel chemistry in large-scale computations. *Prog. Energy Combust. Sci.*, 35(2) :192–215, 2009.

[41] U. Maas and S.B. Pope. Simplifying chemical kinetics : Intrinsic low-dimensional manifolds in composition space. *Combust. Flame*, 88(3-4) :239–264, 1992.

[42] G.I. Marchuk. Splitting and alternating direction methods. In *Handbook of numerical analysis, Vol. I*, Handb. Numer. Anal., I, pages 197–462. North-Holland, Amsterdam, 1990.

[43] S. Müller. *Adaptive multiscale schemes for conservation laws*, volume 27 of *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*. Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[44] H.N. Najm and O.M. Knio. Modeling low Mach number reacting flow with detailed chemistry and transport. *J. Sci. Comput.*, 25(1-2) :263–287, 2005.

[45] S. Pope and Z. Ren. Efficient implementation of chemistry in computational combustion. *Flow Turb. Combust.*, 82 :437–453, 2009.

[46] D.L. Ropp, J.N. Shadid, and C.C. Ober. Studies of the accuracy of time integration methods for reaction-diffusion equations. *J. Comput. Phys.*, 194(2) :544–574, 2004.

[47] O. Roussel, K. Schneider, A. Tsigulin, and H. Bockhorn. A conservative fully adaptive multiresolution algorithm for parabolic PDEs. *J. Comput. Phys.*, 188(2) :493–523, 2003.

[48] Y. Shi, W.H. Green Jr., H.-W. Wong, and O.O. Oluwole. Redesigning combustion modeling algorithms for the Graphics Processing Unit (GPU) : Chemical kinetic rate evaluation and ordinary differential equation integration. *Combust. Flame*, 158(5) :836–847, 2011.

[49] B.P. Sommeijer, L.F. Shampine, and J.G. Verwer. RKC : an explicit solver for parabolic PDEs. *J. Comput. Appl. Math.*, 88(2) :315–326, 1998.

[50] B. Sportisse. An analysis of operator splitting techniques in the stiff case. *J. Comput. Phys.*, 161(1) :140–168, 2000.

[51] B. Sportisse, G. Bencteux, and P. Plion. Method of lines versus operator splitting for reaction-diffusion systems with fast chemistry. *Environ. Model. Software*, 15(6-7) :673–679, 2000.

[52] G. Strang. On the construction and comparison of difference schemes. *SIAM J. Numer. Anal.*, 5 :506–517, 1968.

[53] R. Témam. Sur l'approximation de la solution des équations de Navier-Stokes par la méthode des pas fractionnaires. I. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 32 :135–153, 1969.

[54] R. Témam. Sur l'approximation de la solution des équations de Navier-Stokes par la méthode des pas fractionnaires. II. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 33 :377–385, 1969.

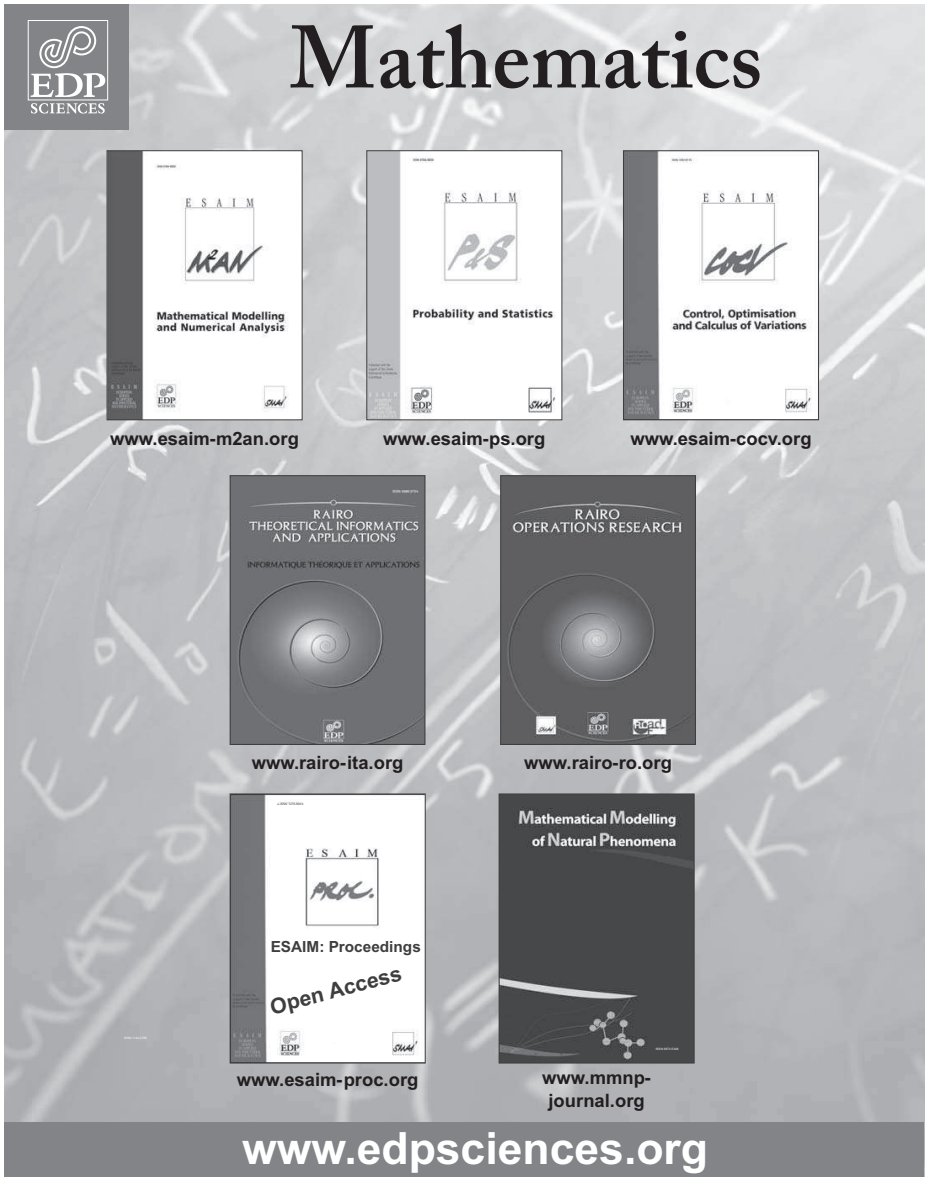
[55] C. Tenaud and M. Duarte. Tutorials on adaptive multiresolution for mesh refinement applied to fluid dynamics and reactive media problems. *ESAIM : Proc.*, 34 :184–239, 2011.

[56] D. Thévenin and S. Candel. Ignition dynamics of a diffusion flame rolled up in a vortex. *Phys. Fluids*, 7(2) :434–445, 1995.

[57] J.G. Verwer and B.P. Sommeijer. An implicit-explicit Runge-Kutta-Chebyshev scheme for diffusion-reaction equations. *SIAM J. Sci. Comput.*, 25(5) :1824–1835, 2004.

[58] J.G. Verwer and B. Sportisse. Note on operator splitting in a stiff linear case. Technical report, 1998. Available online from oai.cwi.nl/oai/asset/4597/04597D.pdf.

[59] N.N. Yanenko. *The method of fractional steps. The solution of problems of mathematical physics in several variables*. Springer-Verlag, New York, 1971.


EDP SCIENCES
Mathematics
ESAIM
M2AN
Mathematical Modelling and Numerical Analysis
www.esaim-m2an.org
ESAIM
PS
Probability and Statistics
www.esaim-ps.org
ESAIM
COCV
Control, Optimisation and Calculus of Variations
www.esaim-cocv.org
RAIRO
THEORETICAL INFORMATICS AND APPLICATIONS
INFORMATIQUE THEORIQUE ET APPLICATIONS
www.rairo-ita.org
RAIRO
OPERATIONS RESEARCH
www.rairo-ro.org
ESAIM
PROC.
ESAIM: Proceedings
Open Access
www.esaim-proc.org
Mathematical Modelling of Natural Phenomena
www.mmnp-journal.org
www.edpsciences.org

# Trajectoires rugueuses

*par* Antoine Lejay[1]

**Résumé**

Cet article donne un très bref survol des principales idées de la théorie des trajectoires rugueuses qui permet d'intégrer des formes différentielles le long de trajectoires irrégulières, et de considérer des équations différentielles contrôlées par des trajectoires irrégulières, typiquement des trajectoires de processus stochastiques.

## 1 Introduction

La théorie des trajectoires rugueuses (TR) ou *rough paths* a été initiée à la fin des années 1990 par T. Lyons (Oxford University) [9, 12, 17, 19, 20, 22]. Elle fait suite à des travaux sur la simulation numérique des solutions des équations différentielles stochastiques (EDS) [11], mais dépasse très largement ce cadre. Elle est nourrie par de nombreux domaines avec lesquels elle reste en connexion : vision algébrique des équations différentielles, méthodes numériques, géométrie différentielle, processus stochastiques, théorie du contrôle, etc.
Considérons un chemin $x$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, continu mais irrégulier, par exemple $\alpha$-Hölder continu ou à $p$-variation finie. La théorie des TR permet de définir l'intégrale

$$y_t = \int_{x_{|[0,t]}} f = \int_0^t f(x_s)\mathrm{d}x_s \tag{1.1}$$

pour une forme différentielle $f$, et partant la solution de l'équation différentielle contrôlée

$$z_t = a + \sum_{i=1}^{d} \int_0^t g_i(z_s)\mathrm{d}x_s^i = a + \int_0^t g(z_s)\mathrm{d}x_s,\ z_t \in \mathbb{R}^m, \tag{1.2}$$

pour une famille de champs de vecteurs $g$ assez réguliers de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^m$. Les applications $x \mapsto y$ et $x \mapsto z$ sont continues dans les espaces fonctionnels appropriés. Si $x$ est un chemin régulier, alors $y$ n'est autre que l'intégrale de $f$ le long de $x$, et $z$ est solution de l'EDO $\dot{z}_t = g(z_t)\dot{x}_t$ avec $z_0 = a$. Autrement dit, il s'agit d'une extension « naturelle » des intégrales usuelles et des EDO contrôlées. Cette propriété est particulièrement intéressante en terme de simulation et d'analyse.
Les équations de type (1.2) sont courantes en modélisation stochastique, où $x$ joue le rôle de bruit. Un cas particulier mais ubiquitaire est celui des EDS où $x$ est une

[1]Université de Lorraine, IECN, UMR 7502, Vandœuvre-lès-Nancy, F-54500, France / CNRS, IECN, UMR 7502, Vandœuvre-lès-Nancy, F-54500, France / Inria, Villers-lès-Nancy, F-54600, France

trajectoire (aléatoire) du *mouvement brownien*. Nous savons qu'elle est $\alpha$-Hölder continue dès que $\alpha < 1/2$, mais n'est presque sûrement jamais plus régulière que cela.
Bien entendu, à moins que $x$ ne soit de classe $\mathcal{C}^1$, la difficulté est de définir le sens à donner à « $\mathrm{d}x_s$ » dans (1.2). Dans le cas du mouvement brownien, la réponse classique est alors de définir $\int_0^t f(x_s)\mathrm{d}x_s$ et $\int_0^t g(z_s)\mathrm{d}x_s$ en tant qu'intégrales stochastiques au sens d'Itô ou de Stratonovich, c'est-à-dire comme limites *en probabilité* de sommes de Riemann. Il n'est *a priori* pas possible de considérer une définition trajectorielle de (1.1) ou (1.2).
La réponse apportée par T. Lyons est de considérer une intégrale qui ne soit pas dirigée par $x$ mais par une extension $\mathbf{x}$ de $x$ à valeurs dans un espace non-commutatif. Ce chemin, appelé *trajectoire rugueuse*, dévoile de l'information « cachée » qui correspond à l'équivalent des intégrales du chemin contre lui-même. À un même chemin $x$ peuvent être associés plusieurs choix de $\mathbf{x}$ qui donneront des intégrales différentes.
Une fois que l'on a réussi à construire $\mathbf{x}$, on dispose de tous les résultats de la théorie des TR. Par exemple, cela permet de considérer très facilement des EDS conduites par d'autres processus que le brownien ou les semi-martingales, donc hors du cadre des intégrales stochastiques au sens d'Itô ou de Stratonovich. Et cela sans avoir besoin de construire une théorie *ad hoc* pour chaque classe de processus. Il est ainsi possible de se focaliser uniquement sur la construction des TR. Même dans le cadre brownien, cette théorie reste avantageuse pour certaines applications — grandes déviations ou simulation numérique — du fait de la propriété de continuité.
Cet article se veut donc une très brève introduction à la théorie des trajectoires rugueuses. Il ne peut être exhaustif, sa bibliographie est incomplète, et nous ne traiterons pas du cas de la construction des TR. Le lecteur intéressé pourra ensuite consulter :

- l'article originel de T. Lyons [20], le livre [22] et les notes de cours de l'école d'été des probabilités de Saint-Flour [21] ;
- l'article de synthèse [19] qui expose les idées présentées dans [20-22] ;
- l'article de M. Gubinelli [12], qui présente les TR sous un angle algébrique ;
- l'article de A.M. Davie [6] qui donne une construction alternative à la solution d'équations différentielles rugueuses, ainsi que l'article [1] d'I. Bailleul qui est centré sur les propriétés de flot ;
- le livre de P. Friz et N. Victoir [9], qui s'appuie sur une approche par régularisation des chemins et les idées de [6] ;
- l'article de D. Feyel et A. de la Pradelle qui repose sur l'utilisation de la formule de Green-Riemann [8] ;
- l'article de synthèse [17] ainsi qui reprend les idées de [8] mélangées avec celles de [20], et dont le présent article s'inspire.

## 2 Le problème de la continuité pour les intégrales de formes différentielles

Soit $f(x) := \sum_{i=1}^{d} f_i(x)\mathrm{d}x^i$ est de forme différentielle $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$. Considérons $x \in \mathcal{C}^1([0,T];\mathbb{R}^d)$ un chemin régulier. L'intégrale de $f$ le long de $x_{|[0,T]}$ est $\int_{x_{|[0,T]}} f := \int_0^T f_i(x_s)\mathrm{d}x_s^i$.
Une approche naturelle pour définir $\int_{x_{|[0,T]}} f$ lorsque $x$ est un chemin $\alpha$-Hölder continu serait d'utiliser une suite d'approximations $x^n$ régulières de $x$ et d'identifier cette intégrale avec la limite de $\int_{x^n_{|[0,T]}} f$, si celle-ci existe.
Si $d = 1$, nous pouvons définir $\int_{x_{|[0,T]}} f$ comme $\widehat{f}(x_T) - \widehat{f}(x_0)$ pour une primitive $\widehat{f}$ de $f$. Grâce à cette formule, la notion d'intégrale $\int_{x_{|[0,T]}} f$ se définit facilement quelque soit la régularité de $x$ (supposé continu) et $x \mapsto \int_{x_{|[0,T]}} f$ est continue par rapport à la norme uniforme.
Cette approche est cependant spécifique à la dimension $d = 1$. Lrsque $d > 1$, $x \in \mathcal{C}^1([0,T];\mathbb{R}^d) \mapsto \int_{x_{|[0,T]}} f$ n'est pas continue en général par rapport à la norme uniforme.
La démonstration de la non-continuité de $x \mapsto \int_{x_{|[0,T]}} f$ dans la cas où $d \geq 2$ nous donnera aussi l'occasion d'en comprendre la raison. Pour simplifier, prenons $d = 2$.
Soit $x$ de classe $\mathcal{C}^1([0,T];\mathbb{R}^2)$ et $\varphi$ de classe $\mathcal{C}^1([0,T];\mathbb{R})$. Construisons deux suites de fonctions approchant $x$ au sens de la norme uniforme dans $\mathcal{C}([0,T];\mathbb{R})$. L'une est la suite constante $x^n := x$. Pour l'autre, si $t_i^n := Ti/2^n$, définissons un chemin $y^n$ dans $\mathcal{C}^1_{\mathrm{p}}([0,2T];\mathbb{R}^2)$ (où $\mathcal{C}^1_{\mathrm{p}}$ est pour $C^1$ par morceaux) par

$$y^n := B_0 \cdot x_{[t_0^n,t_1^n]} \cdot B_1 \cdots B_{2^n-1} \cdot x_{[t_{2^n-1}^n,t_{2^n}^n]}, \tag{2.1}$$

où $\cdot$ désigne la concaténation entre les chemins, et où, pour $s \in [0, T/2^n]$,

$$B_i(s) := x_{t_i^n} + \frac{1}{\pi}(\varphi_{t_{i+1}^n} - \varphi_{t_i^n})\sqrt{|\varphi_{t_{i+1}^n} - \varphi_{t_i^n}|}\begin{bmatrix}\cos(2^{n+1}\pi s/T) - 1\\ -\sin(2^{n+1}\pi s/T)\end{bmatrix}.$$

Comme montré à la figure 1, nous ne faisons qu'ajouter des boucles au chemin $x$, qui sont d'aire (signée) $\varphi_{t_{i+1}^n} - \varphi_{t_i^n}$.

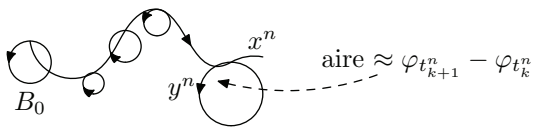



FIG. 1: Construction des approximations $x^n$ et $y^n$ de $x$.

Par la formule de Green-Riemann, pour $F := \partial_{x_1} f_2 - \partial_{x_2} f_1$,

$$\int_{B_i} f = \iint_{\mathrm{Surface}(B_i)} F(z)\mathrm{d}z \approx F(x_{t_i^n})(\varphi_{t_{i+1}^n} - \varphi_{t_i^n}).$$

Nous ne justifierons pas plus cette dernière approximation mais les termes de restes sont en $o(2^{-n})$ de sorte que leur somme disparaît lorsque $n \to \infty$.
D'un autre côté, par les propriétés de l'intégrale,

$$\int_{y^n_{|[0,2T]}} f = \int_{x_{|[0,2T]}} f + \sum_{i=0}^{2^n-1} \int_{B_i} f \approx \int_{x_{|[0,2T]}} f + \sum_{i=0}^{2^n-1} F(x_{t_i^n})(\varphi_{t_{i+1}^n} - \varphi_{t_i^n}).$$

Il est alors possible de justifier que

$$y^n \text{ converge uniformément vers } x,$$
$$\text{et } \int_{y^n_{|[0,2T]}} f \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{x_{|[0,T]}} f + \int_0^T F(x_s)\mathrm{d}\varphi_s.$$

Ce contre-exemple, qui est très général, montre que pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}^1([0,T];\mathbb{R})$, on peut construire une suite $y^n$ qui converge uniformément vers $x$ mais telle que la limite de $\int_{y^n_{|[0,2T]}} f$ fait apparaître l'intégrale de $f$ le long de $x$, et une intégrale impliquant $F$, $x$ et $\varphi$.
Tirons-en cependant des enseignements positifs :

- la suite $y^n$ est bornée dans l'espace $\mathcal{C}^\alpha([0,T];\mathbb{R}^d)$ des fonctions $\alpha$-Hölder continue dès que $\alpha < 1/2$, à cause des boucles $B_i$ qui ont des diamètres de l'ordre de $\sqrt{2^{-n}}$. Grâce au théorème d'Ascoli, $y^n$ converge vers $x$ dans l'espace des fonctions $\beta$-Hölder continues pour tout $\beta < 1/2$.
- grâce à l'expression de la limite de $\int_{y^n_{|[0,2T]}} f$, nous pouvons définir une intégrale non par rapport à $x$ mais par rapport à $(x,\varphi)$ et identifier cette fonction dans $\mathcal{C}^1([0,T];\mathbb{R}^3)$ à une suite d'approximations $y^n$ dans $\mathcal{C}^1_{\mathrm{p}}([0,T];\mathbb{R}^2)$ de sorte que $\int_{x_{|[0,T]}} f + \int_0^T F(x_s)\mathrm{d}\varphi_s$ soit la limite de $\int_{y^n_{|[0,2T]}} f$.
- et puisque que $y^n$ converge dans un espace de fonctions $\beta$-Hölder continues, nous pouvons espérer relâcher la condition de régularité sur $x$, à condition de spécifier $\varphi$ pour que les intégrales soient définies de façon univoque.

La théorie des TR donne une réponse positive à ce dernier point : en étendant la notion de chemin, d'une façon qui prenne en compte une information relative à l'aire de la courbe (nous verrons le sens à donner à cela dans le cas de chemins irréguliers), il est possible de définir des intégrales de $f$ le long de chemins irréguliers, c'est-à-dire $\alpha$-Hölder continus, qui soient identifiables avec des limites d'intégrales le long de chemins réguliers.

# 3 Équations linéaires dans le groupe d'Heisenberg

Nous avons vu dans l'exemple précédent que la connaissance du seul chemin ne suffit pas à assurer la continuité, mais que l'on peut espérer des résultats positifs

en étendant la notion de chemin. Continuons sur cette voie en regardant maintenant le cas d'équations différentielles linéaires.
Soit $\mathfrak{h}$ l'algèbre de Lie du groupe d'Heisenberg, c'est-à-dire

$$\mathfrak{h} := \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| \, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Pour trois matrices $A$, $B$ et $C$ de $\mathfrak{h}$, nous avons $ABC = 0$.
Considérons maintenant $x$ et $y$ deux chemins dans $\mathcal{C}^1([0,T];\mathbb{R})$ et considérons l'équation différentielle linéaire contrôlée

$$\mathrm{d}u_t = u_t A \mathrm{d}x_t + u_t B \mathrm{d}y_t \tag{3.1}$$

où $u$ est un vecteur ligne de $\mathbb{R}^3$. Lorsque $B = 0$, alors il est bien connu que

$$u_t = u_0 \exp(A x_{0,t}) \text{ avec } x_{s,t} := x_t - x_s.$$

Si $A$ et $B$ commutent, c'est-à-dire si $[A,B] := AB - BA$ est nul, on démontre facilement que

$$u_t = u_0 \exp(A x_{0,t} + B y_{0,t}).$$

Considérons maintenant le cas où $[A,B] \neq 0$. Il est naturel de chercher une solution sous la forme

$$u_t = u_s \exp(A x_{s,t} + B y_{s,t} + C(s,t)), \ \forall 0 \leq s \leq t, \tag{3.2}$$

où la matrice $C(s,t)$ contiendra de l'information liée au défaut de commutation de $A$ et $B$.
Pour $A$ et $B$ dans $\mathfrak{h}$, en utilisant le fait que $\exp(A) = I + A + \frac{1}{2}A^2$, il est facile de montrer que pour $\varepsilon > 0$,

$$\exp(\varepsilon A)\exp(\varepsilon B) = \exp\left(\varepsilon A + \varepsilon B + \frac{\varepsilon^2}{2}[A,B]\right), \tag{3.3}$$

où nous avons utilisé $\varepsilon$ pour bien montrer l'ordre de grandeur des termes.
Comme (3.2) est vraie pour tout $0 \leq s \leq t$, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} &\exp(A x_{s,t} + B y_{s,t} + C(s,t)) = \\ &\qquad = \exp(A x_{s,r} + B y_{s,r} + C(s,r)) \exp(A x_{r,t} + B y_{r,t} + C(r,t)), \end{aligned}$$

et donc à l'aide de (3.3),

$$C(s,t) = C(s,r) + C(r,t) + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_{s,r} & y_{r,t} \\ y_{s,r} & y_{r,t} \end{vmatrix} [A,B]. \tag{3.4}$$

Nous reconnaissons dans le facteur devant $[A,B]$ l'aire du triangle compris entre $(x_s, y_s)$, $(x_r, y_r)$ et $(x_t, y_t)$. Nous savons que $[A,B]\mathcal{A}(s,t)$ vérifie l'équation (3.4) lorsque

$$\mathcal{A}(s,t) := \frac{1}{2}\int_s^t (x_r - x_s)\mathrm{d}y_r - \frac{1}{2}\int_s^t (y_r - y_s)\mathrm{d}x_r.$$

Par ailleurs, $|\mathcal{A}(s,t)| \leq C(t-s)^2$. Cela veut donc dire que

$$u_t = u_s \exp(Ax_{s,t} + By_{s,t} + [A,B]\mathcal{A}(s,t)),\ \forall 0 \leq s \leq t. \tag{3.5}$$

Il est alors aisé de démontrer qu'avec ce choix, $u$ est bien solution de (3.1), et que cette équation admet une unique solution.
Nous retrouvons ici le problème de la continuité, car $(x,y) \mapsto \mathcal{A}$ n'est pas continue par rapport à la norme uniforme. Le contre-exemple donné au § 2 permet de construire une suite $(x^n, y^n)$ qui converge uniformément vers $(x,y)$ mais qui est telle que l'aire correspondante $\mathcal{A}^n(s,t)$ converge vers $\mathcal{A}(s,t) + \varphi_t - \varphi_s$ pour une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^1([0,T];\mathbb{R})$.

**Remarque 1.** Bien entendu, ce programme peut se réaliser dans un cadre plus général. La formule (3.1) n'est qu'une forme simplifiée (grâce à la structure de $\mathfrak{h}$) de la formule de Baker-Campbell-Hausdorff-Dynkin [2]. La représentation (3.5) se généralise en la formule de Magnus qui donne une représentation des solutions d'équations différentielles linéaires contrôlées comme exponentielles de matrices. Celles-ci sont données par des séries impliquant les crochets de Lie $[\cdot,\cdot]$ emboîtés, et les intégrales itérées des chemins. Cette mécanique, qui permet de considérer un objet analytique, tel une solution d'équation différentielle stochastique, de façon algébrique s'applique aussi dans le cas d'équations non-linéaire [3].

# 4 Séries de Chen et trajectoires rugueuses

En utilisant le fait que $f$ est indéfiniment dérivable, écrivons formellement

$$\int_{x_{|[s,t]}} f = \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\(i_1,\dots,i_n)\in\{1,\dots,d\}^n}} \partial^{n-1}_{x_{i_1},\dots,x_{i_{n-1}}} f_{i_n}(x_s) J_{i_1,\dots,i_n}(s,t;x),$$

avec

$$J_{i_1,\dots,i_n}(s,t;x) := \int_s^t \int_s^{t_n} \cdots \int_s^{t_2} \mathrm{d}x^{i_1}_{t_1} \cdots \mathrm{d}x^{i_n}_{t_n} = \int_s^t J_{i_1,\dots,i_{n-1}}(s,r;x)\mathrm{d}x^{i_n}_r,$$

c'est-à-dire les intégrale itérées de $x$ contre lui-même sur les simplexes $\{s \leq t_1 < t_2 < \cdots \leq t_{n-1} \leq t\}$.
De même, pour une famille $g_1,\dots,g_d$ de champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^m$, la solution de (1.2) vérifie formellement, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m;\mathbb{R})$,

$$\varphi(z_t) = \varphi(a) + \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\(i_1,\dots,i_n)\in\{1,\dots,d\}^n}} g_{i_1}(\cdots(g_{i_n}(\varphi(a)))\cdots) J_{i_1,\dots,i_n}(0,t;x). \tag{4.1}$$

En suivant la théorie des séries de Chen [4], nous voyons donc qu'il est pratique de considérer la série formelle

$$\Phi(s,t;x) := 1 + \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\(i_1,\dots,i_n)\in\{1,\dots,d\}^n}} X^{i_1}\cdots X^{i_n} J_{i_1,\dots,i_n}(s,t;x),$$

où les $X^1, \dots, X^d$ sont des indéterminées *non-commutatives*. Ici, nous ne nous soucions pas des problèmes de convergence. Cette approche présente l'avantage de transformer ce problème de nature analytique et géométrique en un problème de type algébrique. En effet, $\Phi(\cdot,\cdot,x)$ « encode » le chemin. En particulier, la concaténation des chemins se traduit par

$$\Phi(s,t;x) = \Phi(s,r;x)\Phi(r,t;x),$$

où le produit est à comprendre en tant que produit entre séries. Par ailleurs, si $y_t := x_{T-t}$, alors $\Phi(0,T;y) = \Phi(0,T;x)^{-1}$ où $\Phi^{-1}(0,T;x) = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k(\Phi(0,T;x)-1)^k$ est l'inverse de la série $\Phi(0,T;x)$. Enfin, une autre propriété algébrique importante est que pour un entier $k \geq 1$, $\Phi(s,t;x)^k$ peut s'étendre grâce à la « propriété de mélange » (*shuffle*) comme une série dont les coefficients sont donnés par des combinaisons linéaires des $J_{i_1,\dots,i_d}(s,t;x)$. En particulier, il est possible de considérer formellement $\log\Phi(s,t;x) = \sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\Phi(s,t;x)^k$ et de l'écrire comme une série avec des coefficients donnés par les $J_{t_1,\dots,i_n}(s,t;x)$. Nous pouvons alors transformer (4.1) pour calculer $z_t$ en intégrant une équation différentielle ordinaire dont le coefficient se déduit de cette série.

> *Les séries de Chen permettent de manipuler des intégrales et des équations différentielles contrôlées de façon algébrique.*

Une autre façon de manipuler de telles séries est de considérer la base canonique $e_1, \dots, e_d$ de $\mathbb{R}^d$ et de poser cette fois-ci

$$\Phi(s,t;x) := 1 + \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\(i_1,\dots,i_n)\in\{1,\dots,d\}^n}} e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_n} J_{i_1,\dots,i_n}(s,t;x), \tag{4.2}$$

c'est-à-dire d'écrire que $\Phi(s,t;x)$ est une série à valeur dans l'espace tensoriel[2] $T(\mathbb{R}^d) := \mathbb{R}\oplus\mathbb{R}^d\oplus(\mathbb{R}^d\otimes\mathbb{R}^d)\oplus\cdots$. Sur cet espace, qui muni de l'addition et du produit tensoriel $\otimes$ est une algèbre, nous utilisons une norme telle que $\|a\otimes b\| \leq \|a\|\cdot\|b\|$ pour tout $a\in(\mathbb{R}^d)^{\otimes k}$ et $b\in(\mathbb{R}^d)^{\otimes\ell}$.
Que se passe-t'il lorsque $x$ est seulement un chemin qui est $\alpha$-Hölder continu, et non de classe $\mathcal{C}^1$ ? Il devient *a priori* impossible de définir à partir de $x$ les intégrales itérées comme des intégrales usuelles et donc de définir une série de Chen pour $x$.
Il existe cependant une possibilité simple dans le cas de chemins dans $\mathcal{C}^\alpha$ avec $\alpha > 1/2$. Il s'agit d'utiliser les *intégrales de Young*, dont nous verrons la construction plus bas.

**Théorème 1** (L.C. Young [28]). *] Soient $x$ et $y$ deux chemins respectivement dans $\mathcal{C}^\alpha([0,T];\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}^\beta([0,T];\mathbb{R})$ avec $0<\alpha,\beta\leq 1$ et $\alpha+\beta>1$. Alors $\int_0^t y_s\mathrm{d}x_s$ existe comme limite de sommes de Riemann, $t\mapsto\int_0^t y_s\mathrm{d}x_s$ est $\alpha$-Hölder continue sur $[0,T]$ et*

$$\left|\int_s^t y_s\mathrm{d}x_s - y_s(x_t-x_s)\right| \leq C\|x\|_\alpha\|y\|_\beta|t-s|^{\alpha+\beta},\ \forall 0\leq s\leq t\leq T,$$

[2] Rappelons que le produit tensoriel $A\otimes B$ entre deux espaces vectoriels $A$ et $B$ revient à munir le produit $A\times B$ d'une structure qui le transforme en un espace vectoriel.

*pour une constante universelle $C$ qui ne dépend que de $\alpha$ et $\beta$, lorsque $\|\cdot\|_\alpha$ est la norme de $\alpha$-Hölder sur $\mathcal{C}^\alpha([0,T];\mathbb{R})$.*

Ainsi, si $x \in \mathcal{C}^\alpha([0,T];\mathbb{R}^d)$, les intégrales itérées de $x^i$ contre $x^j$ existent et

$$J_{i,j}(s,t;x) = \int_s^t \int_s^{t_2} \mathrm{d}x^i_{t_1}\mathrm{d}x^j_{t_2} = \int_s^t (x^i_r - x^i_s)\mathrm{d}x^j_r$$

et donc

$$\left| \int_s^t \int_s^{t_2} \mathrm{d}x^i_{t_1}\mathrm{d}x^j_{t_2} \right| \leq C\|x\|^2_\alpha (t-s)^{2\alpha}.$$

Comme $t \mapsto \int_0^t (x^i_r - x^i_0)\mathrm{d}x^j_r$ est elle-même $\alpha$-Hölder continue, il est possible de définir les intégrales itérées à tout ordre qui vérifient $|J_{i_1,\dots,i_n}(s,t;x)| \leq K_n(t-s)^{n\alpha}$.

> *Dans le cas où $\alpha < 1/2$, l'idée centrale de la théorie des trajectoires rugueuses est de considérer que l'on connaît un équivalent de la série de Chen pour un chemin irrégulier, c'est-à-dire un objet vérifiant des propriétés analytiques et algébriques similaires.*

En fait, nous n'avons besoin de considérer que des chemins $\mathbf{x}$ à valeurs dans l'espace tensoriel $T_k(\mathbb{R}^d)$ obtenu en tronquant dans $T(\mathbb{R}^d)$ tous les éléments qui sont produits de strictement plus de $k$ éléments de $\mathbb{R}^d$. L'indice $k$ doit être choisi de sorte qu'il soit possible de compléter $\mathbf{x}$ en une série de Chen et dépend donc de la régularité de $x$. À partir de maintenant, nous supposerons que nous disposons d'un tel objet, dont l'existence n'est cependant pas un problème trivial (*cf* le début du § 6).
Tout comme une série de Chen est inversible, un élément $a$ de $T_k(\mathbb{R}^d)$ tel que $\pi_{\mathbb{R}}(a) = 1$ l'est aussi, où $\pi_{\mathrm{X}}$ est la projection sur le sous-espace vectoriel X de $T_k(\mathbb{R}^d)$. Notons par $a^{-1}$ cet inverse qui vérifie donc $a^{-1} \otimes a = 1$ dans $T_k(\mathbb{R}^d)$.

**Théorème 2** (T. Lyons [20]). *]] Soit $\mathbf{x}$ un chemin à valeurs dans $T_k(\mathbb{R}^d)$ pour lequel il existe des constantes $K_1, \dots, K_k$ telles que pour $\ell \leq k$ et tout $0 \leq s \leq t \leq T$,*

$$\|\pi_{(\mathbb{R}^d)^{\otimes \ell}}(\mathbf{x}_{s,t})\| \leq K_\ell |t-s|^{\ell\alpha} \text{ avec } \mathbf{x}_{s,t} := \mathbf{x}_s^{-1} \otimes \mathbf{x}_t. \tag{4.3}$$

*Lorsque $k \geq \lfloor 1/\alpha \rfloor$, il est possible de prolonger $\mathbf{x}$ en un élément $\mathbf{y}$ de $T(\mathbb{R}^d)$ vérifiant* (4.3) *pour tout $\ell$, où $\mathbf{y}_s^{-1}$ est l'inverse de $\mathbf{y}_s$ dans $T(\mathbb{R}^d)$.*

**Definition 1.** Un chemin vérifiant les propriétés du théorème 2 s'appelle une *trajectoire rugueuse* (*rough path*). Ici, nous parlerons d'une $\alpha$-TR d'ordre $k$ et noterons $\mathcal{T}_{\alpha,k}(\mathbb{R}^d)$ l'espace correspondant.

**Remarque 2.** Nous utiliserons comme norme sur l'espace $\mathcal{T}_{\alpha,k}(\mathbb{R}^d)$ des $\alpha$-TR d'ordre $k$ la norme Hölder définie par

$$\|\mathbf{x}\|_\alpha := \max_{t\in[0,T]} \|\mathbf{x}_t\| + \max_{\ell=0,\dots,k} \sup_{0\leq s<t\leq T} \left\{ \frac{\|\pi_{(\mathbb{R}^d)^{\otimes\ell}}(\mathbf{x}_{s,t})\|}{|t-s|^{\ell\alpha}} \right\}. \tag{4.4}$$

Attention, cette définition implique $\mathbf{x}_{s,t}$ et non $\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_s$ car $\pi_{(\mathbb{R}^d)^{\otimes k}}(\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_s) \neq \mathbf{x}_{s,t}$ pour $k > 1$. Ainsi $\pi_{(\mathbb{R}^d)^{\otimes k}}(x)$ n'est pas en général $k\alpha$-Hölder continue pour $k > 1$.

**Remarque 3.** Afin de fixer les idées, posons $k = 2$. Dans ce cas, $\mathbf{x}$ se décompose en $\mathbf{x}_t = 1 + \sum_{i=1}^d \mathbf{x}_t^{1,i} e_i + \sum_{i,j=1}^d \mathbf{x}_t^{2,i,j} e_i \otimes e_j$ où $\{e_i\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^d$. Dans ce cas

$$\mathbf{x}_{s,r} \otimes \mathbf{x}_{r,t} = 1 + \sum_{i=1}^d (\mathbf{x}_{s,r}^{1,i} + \mathbf{x}_{r,t}^{1,i}) e_i + \sum_{i,j=1}^d (\mathbf{x}_{s,r}^{2,i} + \mathbf{x}_{r,t}^{2,i} + \mathbf{x}_{s,r}^{1,i} \otimes \mathbf{x}_{r,t}^{1,j}) e_i \otimes e_j,$$

et

$$\mathbf{x}_{s,t}^{-1} = 1 - \sum_{i=1}^d \mathbf{x}_{s,t}^{1,i} e_i - \sum_{i=1}^d \mathbf{x}_{s,t}^{2,i,j} e_i \otimes e_j + \sum_{i=1}^d \mathbf{x}_{s,t}^{1,i} \otimes \mathbf{x}_{s,t}^{1,j} e_i \otimes e_j.$$

**Remarque 4.** La composante $\mathbf{x}^1 = \pi_{\mathbb{R}^d}(\mathbf{x})$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ vérifie $\mathbf{x}_{s,t}^1 = \mathbf{x}_t^1 - \mathbf{x}_s^1$, de sorte que $\mathbf{x}^1 \in \mathcal{C}^\alpha([0,T];\mathbb{R}^d)$. Nous dirons alors que $\mathbf{x}$ est *au dessus* de $\mathbf{x}^1$.

**Remarque 5.** La définition de $\mathbf{x}_{s,t}$ implique que

$$\mathbf{x}_{s,t} = \mathbf{x}_{s,r} \otimes \mathbf{x}_{r,t} \text{ dans } T_2(\mathbb{R}^d) \text{ pour } 0 \leq s \leq r \leq t \leq T. \tag{4.5}$$

Par construction, $\mathbf{y}$ satisfait (4.5) dans $T(\mathbb{R}^d)$. Ainsi $\otimes$ correspond à la concaténation des chemins. Par contre, $\mathbf{x}_{s,r} \otimes \mathbf{x}_{r,t} \neq \mathbf{x}_{r,t} \otimes \mathbf{x}_{s,r}$ car $\otimes$ n'est pas commutative. Pour les composantes dans $\mathbb{R}^d$, l'opération $\otimes$ correspond à l'addition de vecteurs dans l'espace euclidien, et reste commutative.

**Remarque 6.** Un chemin $x = \sum_{i=1}^d e_i x^i \in \mathcal{C}^1([0,T];\mathbb{R}^d)$ peut être transformé en une $\alpha$-TR d'ordre 2 par

$$\mathbf{x}_{s,t}^1 = x_t - x_s \in \mathbb{R}^d \text{ et } \mathbf{x}_{s,t}^2 = \int_s^t (x_r - x_s) \otimes \mathrm{d}x_r \in \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d.$$

Notons que $\mathbf{x}_{s,t} = 1 + \mathbf{x}_{s,t}^1 + \mathbf{x}_{s,t}^2$ correspond à la série $\Phi(s,t;x)$ donnée par (4.2) en ne gardant que les termes dans $T_2(\mathbb{R}^d)$. L'extension donnée par le théorème 2 correspond à la série $\Phi(s,t;x)$. Un tel chemin s'appelle de façon oxymorique une *trajectoire rugueuse régulière* (*smooth rough path*).

Le cas le plus commun est celui où $k = 2$, c'est-à-dire que nous considérons uniquement des chemins qui sont $\alpha$-Hölder continus avec $\alpha \in ]1/3, 1/2]$. Le cas $k = 1$ fait l'objet d'un traitement plus simple, puisque les intégrales de Young peuvent être directement utilisées sans faire appel aux intégrales itérées pour démontrer l'existence d'intégrales le long de formes différentielles $f$ qui sont $\gamma$-Hölder continues avec $\alpha(\gamma + 2) > 1$ (ce qui découle immédiatement du théorème 1) et de solutions d'équations différentielles contrôlées par de tels chemins [16].
En général, nous construisons une trajectoire rugueuse à partir d'un chemin à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. L'exemple typique est celui d'une trajectoire d'un processus stochastique tel le mouvement brownien. Il est important de souligner ici que dès que $\alpha < 1/2$, il existe une *infinité de trajectoires rugueuses* $\mathbf{x}$ *qui se projettent sur un même chemin* $x$, qui donnent naissance à des intégrales différentes.
Par exemple, si $\mathbf{x} \in \mathcal{T}_{\alpha,2}(\mathbb{R}^d)$ se projette sur $x \in \mathcal{C}^\alpha([0,T];\mathbb{R}^d)$ avec $\alpha < 1/2$ et si $\psi$ est un chemin de $\mathcal{C}^{2\alpha}([0,T];\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d)$, alors $\mathbf{x} + \psi$ est aussi une $\alpha$-TR d'ordre 2.

Une sous-classe des trajectoires rugueuses est celle des *trajectoires rugueuses géométriques*, que l'on peut atteindre comme limite de trajectoires rugueuses construites naturellement à partir de chemins réguliers selon le procédé de la remarque 6 [10, 18].
Une $\alpha$-TR géométrique $\mathbf{x}$ d'ordre 2 qui se projette sur $x \in \mathcal{C}^\alpha([0,T];\mathbb{R}^d)$ peut donc s'identifier à une famille d'approximations régulières $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{C}^1([0,T];\mathbb{R}^d)$. Si $\psi \in \mathcal{C}^{2\alpha}([0,T];\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d)$ est telle que $\psi_t$ soit anti-symétrique pour tout $t$ (en identifiant $\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$ à l'espace des matrices $d\times d$), alors $\mathbf{x}+\psi$ est aussi une trajectoire rugueuse géométrique, mais correspond à une autre famille d'approximations $\{y^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $x$. Le contre-exemple donné à la continuité des formes différentielles au § 2 nous montre comment construire une telle famille en identifiant $\psi$ avec $\left[\begin{smallmatrix} 0 & \varphi \\ -\varphi & 0 \end{smallmatrix}\right]$.

# 5 Intégrales et équations différentielles rugueuses

Les constructions précédentes laissent à penser que nous avons besoin de l'équivalent de toute la série de Chen et que ne pouvons que considérer des intégrales le long de formes différentielles indéfiniment dérivables.
Une telle régularité n'est pas nécessaire. Il est néanmoins important que la régularité soit suffisante pour pouvoir appliquer l'argument technique principal, que nous appellerons le « lemme de la couturière » [7].

**Lemme 1.** *Soient $T > 0$ et $\{\mathbf{y}_{s,t}\}_{0\le s\le t\le T}$ une famille d'éléments dans $T_k(\mathbb{R}^d)$ et $k \ge \lfloor 1/\alpha \rfloor$ telle que $\|\mathbf{y}\|_\alpha$ est finie*[3] *et qu'il existe deux constantes $C$ et $\theta > 1$ pour laquelle*

$$\max_{0\le\ell\le k}\{\|\pi_{(\mathbb{R}^d)^{\otimes\ell}}(\mathbf{y}_{s,t} - \mathbf{y}_{s,r}\otimes\mathbf{y}_{r,t})\|\} \le C|t-s|^\theta,\ \forall 0 \le s \le r \le t \le T. \tag{5.1}$$

*Une telle famille s'appelle une* presque trajectoire rugueuse *(almost rough path)*[4]*. Alors il existe une constante $L$ ne dépendant que de $\theta$ et $T$ ainsi qu'une $\alpha$-TR $\mathbf{x}$ d'ordre $k$ telle que*

$$\max_{0\le\ell\le k}\{\|\pi_{(\mathbb{R}^d)^{\otimes\ell}}(\mathbf{y}_{s,t} - \mathbf{x}_{s,t})\|\} \le CL|t-s|^\theta,\ \forall 0 \le s \le t \le T. \tag{5.2}$$

*Par ailleurs, si $\mathbf{z}$ est une $\alpha$-TR d'ordre $k$ vérifiant* (5.2)*, alors $\mathbf{x} = \mathbf{z}$.*

Ce lemme est très important, car il permet de remplacer une approximation d'une trajectoire rugueuse par une trajectoire rugueuse. C'est donc l'outil fondamental pour construire des intégrales en considérant tout d'abord des approximations vérifiant (5.1). Un résultat similaire permet de considérer l'écart entre deux TR à partir de l'écart entre deux presque trajectoires rugueuses.
Pour mieux comprendre ce lemme, considérons le cas des intégrales de Young vu au théorème 1. Si $x$ et $y$ sont deux chemins respectivement dans $\mathcal{C}^\alpha([0,T];\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}^\beta([0,T];\mathbb{R})$ avec $\alpha+\beta > 1$, l'intégrale de Young est un moyen de définir la famille d'intégrales $Y_{s,t} = \int_s^t y_s \mathrm{d}x_s$ pour $0 \le s \le t$.

[3] Nous utilisons ici la norme définie par (4.4) qui s'étend naturellement aux familles à deux indices.
[4] Si $\mathbf{y}$ vérifie (5.1) avec $C = 0$, alors $\mathbf{y}$ est une trajectoire rugueuse.

Une approximation, naturelle de cette intégrale, est

$$K_{s,t} := y_s x_{s,t} \text{ avec } x_{s,t} = x_t - x_s.$$

Constatons que pour tout $0 \leq s \leq r \leq t \leq T$, $|K_{s,t}| \leq |t-s|^\alpha$ et

$$|K_{s,t} - K_{s,r} - K_{r,t}| = |y_{s,r}| \cdot |x_{r,t}| \leq \|x\|_\alpha \|y\|_\beta |t-s|^\theta,\ \theta := \alpha + \beta > 1.$$

De cette façon, $\{K_{s,t}\}_{0\leq s\leq t\leq T}$ est une presque trajectoire rugueuse d'ordre 1. On peut donc lui associer un chemin $Y \in \mathcal{C}^\alpha([0,T];\mathbb{R})$ défini comme $Y_{s,t} := \int_s^t y_r \mathrm{d}x_r$ et qui vérifie $Y_{s,t} = Y_{s,r} + Y_{r,t}$ pour tout $0 \leq s \leq r \leq t \leq T$, c'est-à-dire la propriété de Chasles pour les intégrales.
La démonstration du lemme 1 se fait en étudiant la convergence de $y_{t_0^n,t_1^n} \otimes \cdots \otimes y_{t_{n-1}^n,t_n^n}$ le long d'une famille de partitions $\{t_i^n\}_{i=0,\dots,n}$ de $[0,T]$ dont le pas tend vers 0. Cela démontre que $Y_{0,T}$ est bien limite des sommes de Riemann $\sum_{i=0}^{n-1} y_{t_i^n} x_{t_i^n,t_{i+1}^n}$. De (5.2), nous tirons un résultat important : comme

$$\left| \int_s^t y_r \mathrm{d}x_r - y_s x_{s,t} \right| \leq C|t-s|^{\alpha+\beta}$$

pour une constante $C$, nous en déduisons que $t \mapsto \int_0^t y_r \mathrm{d}x_r$ est aussi $\alpha$-Hölder continue et a donc la même régularité que $x$.
Pour définir $\int_0^t f(x_s)\mathrm{d}x_s$, la théorie des trajectoires rugueuses généralise cette approche en utilisant un cadre non-commutatif. Remarquons tout d'abord que si l'on souhaite appliquer l'approche des intégrales de Young à ce cas avec $x \in \mathcal{C}^\alpha([0,T];\mathbb{R}^d)$ et $y_t := f(x_t)$ pour $f \in \mathcal{C}^\gamma(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^m)$, alors la contrainte sur la somme des exposants de Hölder de $x$ et $y$ impose que $\alpha(2+\gamma) > 1$, et donc qu'au mieux, $\alpha > 1/2$.

> *La théorie des trajectoires rugueuses s'applique donc pour des chemins dans $\mathcal{C}^\alpha([0,T];\mathbb{R}^d)$, ou des limites de chemins convergents dans $\mathcal{C}^\alpha([0,T];\mathbb{R}^d)$, avec $\alpha < 1/2$ et $d > 1$.*

Considérons d'abord que $f = (f_1, \dots, f_d)$ est régulière et que $x \in \mathcal{C}^1([0,T];\mathbb{R}^d)$. Alors en temps court, un développement de Taylor donne que

$$\sum_{i=1}^d \int_s^t f_i(x_r)\mathrm{d}x_r^i = \sum_{i=1}^d f_i(x_s)x_{s,t}^i + \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_s) \int_s^t \int_s^{t_2} \mathrm{d}x_{t_1}^j \mathrm{d}x_{t_2}^i + \cdots \quad (5.3)$$

où les « $\cdots$ » contiennent des termes de type $(t-s)^\kappa$ avec $\kappa \geq 3$.
Si nous disposons d'une $\alpha$-TR $\mathbf{x}$ d'ordre 2 avec $\alpha \in ]1/3, 1/2]$, l'idée est alors de poser par analogie avec (5.3), en utilisant une écriture compacte

$$\mathbf{y}_{s,t} := 1 + f(x_s)\mathbf{x}_{s,t}^1 + \nabla f(x_s)\mathbf{x}_{s,t}^2 \in T_1(\mathbb{R}^m),$$

avec $\mathbf{x}_{s,t}^i := \pi_{(\mathbb{R}^d)^{\otimes i}}(\mathbf{x}_{s,t})$ et $\nabla f(x_s)\mathbf{x}_{s,t}^2 := \sum_{i,j=1}^d \partial_{x_i} f^j(x_s)\mathbf{x}_{s,t}^{2,i,j}$. Ici, le terme 1 est présent pour des raisons algébriques mais vit dans $\mathbb{R}$ alors que les autres termes vivent dans $\mathbb{R}^m$. Lorsque $\nabla f$ est $\gamma$-Hölder continue avec $\alpha(2+\gamma) > 1$, $\mathbf{y}$

est une presque trajectoire rugueuse. Le lemme 1 donne une trajectoire rugueuse que nous définirons comme $\int_s^t f(x_r)\mathrm{d}\mathbf{x}_r$, c'est-à-dire l'intégrale de $f$ le long de $\mathbf{x}$. Pour $\mathbf{x} \in \mathcal{T}_{\alpha,2}(\mathbb{R}^d)$ et $\mathbf{x}^\varphi = \mathbf{x} + \varphi$ avec $\varphi \in \mathcal{C}^{2\alpha}([0,T];(\mathbb{R}^d)^{\otimes 2})$, alors

$$\int_0^t f(x_s)\mathrm{d}\mathbf{x}_s^\varphi = \int_0^t f(x_s)\mathrm{d}\mathbf{x}_s + \int_0^t \nabla f(x_s)\mathrm{d}\varphi_s.$$

Si $f$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, il peut être utile de définir les intégrales itérées des composantes de $\int f(x_s)\mathrm{d}\mathbf{x}_s$ contre elles-mêmes. Pour cela, nous utiliserons

$$\widehat{\mathbf{y}}_{s,t} := 1 + f(x_s)\mathbf{x}_{s,t}^1 + \nabla f(x_s)\mathbf{x}_{s,t}^2 + f(x_s)\otimes f(x_s)\mathbf{x}_{s,t}^2 \in T_2(\mathbb{R}^m). \tag{5.4}$$

Ici, $f(x_s)\otimes f(x_s)\mathbf{x}_{s,t}^2$ vit dans $\mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^m$.

**Théorème 3.** *Soit $f = (f_1,\dots,f_d)$ une famille de fonctions dans $\mathcal{C}^{1+\gamma}(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^m)$ et $\mathbf{x} \in \mathcal{T}_{\alpha,2}(\mathbb{R}^d)$ avec $\alpha \in ]1/3,1/2]$ et $\alpha(2+\gamma) > 1$. Alors $\widehat{\mathbf{y}}$ définie par* (5.4) *est une presque trajectoire rugueuse dans $T_2(\mathbb{R}^m)$. Par définition, la $\alpha$-TR associée via le lemme 1 est $\int f(x_s)\mathrm{d}\mathbf{x}_s$. De plus, $\mathbf{x} \mapsto \int f(x_s)\mathrm{d}\mathbf{x}_s$ est continue de $(\mathcal{T}_{\alpha,2}(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_\beta)$ dans $(\mathcal{T}_{\alpha,2}(\mathbb{R}^m), \|\cdot\|_\beta)$ pour tout $\beta < \alpha$.*

En particulier, si $\mathbf{x}$ est une $\alpha$-TR d'ordre 2 géométrique, on peut construire une suite $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de chemins réguliers transformés en des $\alpha$-TR régulières $\mathbf{x}^n \in \mathcal{T}_{2,\alpha}(\mathbb{R}^d)$ comme dans la remarque 6 et telles que $\mathbf{x}^n$ converge dans $(\mathcal{T}_{\alpha,2}(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_\beta)$ vers $\mathbf{x}$ pour tout $\beta < \alpha$. Alors la famille d'intégrales usuelles $\int f(x_s^n)\mathrm{d}x_s^n$ converge vers $\pi_{\mathbb{R}^m}\left(\int f(x_s)\mathrm{d}\mathbf{x}_s\right)$ dans $\mathcal{C}^\beta([0,T];\mathbb{R}^m)$ pour tout $\beta < \alpha$. Soit maintenant une application $f : \mathbb{R}^m \to L(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^m)$, où $L(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^m)$ est l'espace des applications linéaires de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^m$. Considérons l'équation différentielle rugueuse (EDR)

$$y_t = a + \int_0^t f(y_s)\mathrm{d}\mathbf{x}_s, \tag{5.5}$$

à condition de donner un sens à cet objet. Il en existe en réalité deux définitions, celle donnée par T. Lyons et celle donnée par A.M. Davie.

**Definition 2** (Solution au sens de A.M. Davie [6]**.** ]] Pour $\alpha \in (1/3,1/2]$, nous dirons que $y \in \mathcal{C}^\alpha([0,T];\mathbb{R}^m)$ est solution de (5.5) s'il existe une constante $C \geq 0$ et une constante $\theta > 1$ telles que

$$|y_t - y_s - f(y_s)\mathbf{x}_{s,t}^1 - f\nabla f(y_s)\mathbf{x}_{s,t}^2| \leq C|t-s|^\theta,\ \forall 0 \leq s \leq t \leq T, \tag{5.6}$$

avec $(f\nabla f)^{i,j}(x) := \sum_{k=1}^d f_i^k(x)\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x)$.

Cette notion de solution provient, comme pour l'intégrale, d'un développement de Taylor à l'ordre 2. Pour démontrer l'existence d'une telle solution, considérons le schéma d'Euler

$$y_{t_{i+1}^n}^n := y_{t_i^n}^n + f(y_{t_i^n}^n)\mathbf{x}_{t_i^n,t_{i+1}^n}^1 + f\nabla f(y_{t_i^n}^n)\mathbf{x}_{t_i^n,t_{i+1}^n}^2$$

pour une famille de partitions $\{t_i^n\}_{i=0}^n$ de $[0,T]$ dont le pas tend vers 0 lorsque $n \to \infty$. La démonstration est très proche de celle du lemme 1 et consiste à démontrer que (5.6) est vérifiée uniformément en $n$ pour $(s,t) = (t_i^n, t_j^n)$, $i < j$, mais en considérant $j - i$ de plus en plus grand. Nous pouvons ensuite utiliser le théorème d'Ascoli pour montrer qu'une interpolation linéaire de $y^n$ converge vers une solution au sens de A.M. Davie.
À partir de cette solution $y$, il est possible de construire $\mathbf{z} \in \mathcal{T}_{\alpha,2}(\mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^m)$ telle que $\pi_{T_2(\mathbb{R}^d)}(\mathbf{z}) = \mathbf{x}$, $\pi_{\mathbb{R}^m}(\mathbf{z}) = y$ et qui encode donc les « intégrales itérées » entre $x$ et $y$.
L'autre notion de solution, originellement proposée par T. Lyons, est plus complexe.

**Definition 3** (Solution au sens de T. Lyons [20]**.** ]] Une TR $\mathbf{z} \in \mathcal{T}_{\alpha,2}(\mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^m)$ est solution de (5.5) si $\pi_{T_2(\mathbb{R}^d)}(\mathbf{z}) = \mathbf{x}$ et lorsque $f$ est transformée canoniquement en forme différentielle,

$$\mathbf{z}_t = \begin{bmatrix} x_0 \\ a \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 1 \\ f(\pi_{\mathbb{R}^m}(\mathbf{z}_s)) \end{bmatrix} \mathrm{d}\mathbf{z}_s.$$

La raison de cette définition est la suivante : considérons que $x$ et $\dot{y}_t = f(y_t)\dot{x}_t$. Alors le développement de Taylor (5.3) fait intervenir l'intégrale itérée de $y$ contre $x$. À la différence de la notion de solution au sens de A.M. Davie, l'équivalent de cette intégrale itérée doit donc être construite comme partie intégrante de cette solution. Construire une $\alpha$-TR à valeurs dans $T_2(\mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^m)$ permet de le faire. Contrairement à la notion de solution au sens de A.M. Davie, on peut ainsi appliquer un principe de Picard.

**Théorème 4** ([6, 20)**.** *]] Soit $\alpha \in (1/3, 1/2]$ et $\mathbf{x}$ une $\alpha$-TR d'ordre 2 à valeurs dans $T_2(\mathbb{R}^d)$. Soit $f_1, \dots, f_d$ une famille de champs de vecteurs à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, bornés et dont les gradients $\nabla f_i$ sont bornés et $\gamma$-Hölder continus avec $\alpha(2+\gamma) > 1$. Alors il existe $\mathbf{y} \in \mathcal{T}_{2,\alpha}(\mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^m)$ solution, non nécessairement unique, de l'EDR* (5.5)*. Si de plus chaque $f_i$ admet une dérivée seconde qui est bornée et $\gamma$-Hölder continue avec $\alpha(2+\gamma) > 1$, alors $\mathbf{y}$ est unique et $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{y}$ est continue de $(\mathcal{T}_{\alpha,2}(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_\beta)$ dans $(\mathcal{T}_{\alpha,2}(\mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^m), \|\cdot\|_\beta)$. pour tout $\beta < \alpha$.*

En poussant l'analyse, on peut démontrer que l'application d'Itô est localement Lipschitz continue, et avec plus de régularité, qu'elle est différentiable par rapport au point de départ, etc. et démontrer des propriétés de flots. On peut aussi relâcher les propriétés de croissance sur le champ de vecteurs, mais en gardant une croissance au plus linéaire [9, 15].
Dans le cas du mouvement brownien, nous pouvons démontrer que les intégrales correspondent bien aux intégrales d'Itô ou de Stratonovich selon l'extension que nous prenons du mouvement brownien (voir [18] par exemple).
Nous nous sommes restreints ici au cas $\alpha \in ]1/3, 1/2]$. Pour $\alpha < 1/3$, il est nécessaire de considérer des trajectoires rugueuses dans $\mathcal{T}_{\alpha,\lfloor 1/\alpha \rfloor}(\mathbb{R}^d)$ et bien entendu, de supposer plus de régularité sur $f$. La complexité des calculs augmente avec $\lfloor 1/\alpha \rfloor$.

# 6 Applications

Nous n'avons pas traité ici du problème de l'existence de trajectoires rugueuses construites au dessus d'un chemin particulier. Une approche possible pour de nombreux processus stochastiques consiste à démontrer la convergence d'approximations régulières du processus (voir [9] pour quelques exemples). Hors du cadre stochastique, un théorème dû à T. Lyons and N. Victoir montre que l'on peut toujours étendre un chemin en une trajectoire rugueuse [23]. De façon plus constructive, une approche alternative proposée par J. Unterberger est donnée par le *Fourier normal ordering* qui repose sur des idées utilisées en théorie des champs [25, 27].
Ainsi, nous pouvons construire l'équivalent d'intégrales stochastiques et d'équations différentielles stochastiques hors du cadre du mouvement brownien ou des semi-martingales. Cette théorie peut donc s'utiliser pour de nombreux processus mais n'est pas limitée à ce seul cadre ni à cette seule application.
Mais même dans le cadre brownien, cette théorie a des applications grâce à la continuité de l'application d'Itô. Des théorème de type grandes déviations se démontrent en se concentrant sur les TR [14]. Cette théorie, motivée initialement par des considérations numériques [11], a permis de développer de nouvelles approches numériques pour la simulation, notamment les méthodes dites de « cubature » [24], ou par quantification [26].
L'utilisation de certains concepts de cette théorie aux équations aux dérivées partielles stochastiques est fécond, comme le démontrent les récents travaux de M. Hairer sur l'équation KPZ [13].
Pour finir, notons que cette théorie prend son inspiration dans de nombreux domaines, et reste fortement connectée à ceux-ci, en analyse, algèbre, probabilités, géométrie différentielle (notamment sous-riemanienne [9]), théorie du contrôle, etc. Par exemple, des idées issues de la théorie quantique des champs et de la renormalisation ont permis de construire des TR au dessus de trajectoires d'un mouvement brownien fractionnaire d'indice de Hurst inférieur à $1/4$ [25], ce qu'il n'est pas possible de faire avec approximation linéaire [5]. L'article [27] présente une introduction agréable à ce champ d'idées.
Bien que récente, la théorie des trajectoires rugueuses est maintenant arrivée à un stade de maturité et irrigue désormais d'autres domaines.

**Remerciements.** L'auteur tient à remercier ici tous ceux qui l'ont aidé dans l'exploration de cette théorie, en premier lieu T. Lyons, mais aussi N. Victoir, L. Coutin, S. Tindel, M. Gubinelli, J. Unterberger, etc. ainsi que les très nombreuses personnes avec lesquelles il a échangé au cours de visites, conférences et séminaires.

# Références

[1] I. Bailleul, *Flows driven by rough paths* (2012), available at `arXiv:1203.0888`.

[2] F. Baudoin, *An Introduction to the Geometry of Stochastic Flows*, Imperial College Press, 2004.

[3] S. Blanes, F. Cases, J.A. Oteo, and J. Ros, *The Magnus expansion and some of its applications*, Physics Reports **470** (2009), 151-238.

[4] K.-T. Chen, *Integration of paths—a faithful representation of paths by non-commutative formal power series*, Trans. Amer. Math. Soc. **89** (1958), 395–407.

[5] L. Coutin and Z. Qian, *Stochastic analysis, rough path analysis and fractional Brownian motions*, Probab. Theory Related Fields **122** (2002), no. 1, 108–140.

[6] A.M. Davie, *Differential Equations Driven by Rough Signals : an Approach via Discrete Approximation*, Appl. Math. Res. Express. AMRX **2** (2007), Art. ID abm009, 40.

[7] D. Feyel, A. de La Pradelle, and G. Mokobodzki, *A non-commutative sewing lemma*, Electron. Commun. Probab. **13** (2008), 24–34.

[8] D. Feyel and A. de La Pradelle, *Curvilinear integrals along enriched paths*, Electron. J. Probab. **11** (2006), no. 34, 860–892.

[9] P. Friz and N. Victoir, *Multidimensional Stochastic Processes as Rough Paths. Theory and Applications*, Cambridge University Press, 2010.

[10] ———, *A note on the notion of geometric rough paths*, Probab. Theory Related Fields **136** (2006), no. 3, 395–416.

[11] J. G. Gaines and T. J. Lyons, *Variable step size control in the numerical solution of stochastic differential equations*, SIAM J. Appl. Math. **57** (1997), no. 5, 1455–1484.

[12] M. Gubinelli, *Controlling rough paths*, J. Func. Anal. **216** (2004), 86–140.

[13] M. Hairer, *Solving the KPZ equation* (2011), available at `arXiv:1109.6811`.

[14] M. Ledoux, Z. Qian, and T. Zhang, *Large deviations and support theorem for diffusion processes via rough paths*, Stochastic Process. Appl. **102** (2002), no. 2, 265–283.

[15] A. Lejay, *Global solutions to rough differential equations with unbounded vector fields*, Séminaire de Probabilités XLIV, Lecture Notes in Math., vol. 2046, Springer, 2012, pp. 215–246.

[16] ———, *Controlled differential equations as Young integrals : a simple approach*, J. Differential Equations **249** (2010), 1777-1798.

[17] ———, *Yet another introduction to rough paths*, Séminaire de probabilités XLII, Lecture Notes in Math., vol. 1979, Springer, 2009, pp. 1–101.

[18] A. Lejay and N. Victoir, *On $(p,q)$-rough paths*, J. Differential Equations **225** (2006), no. 1, 103–133.

[19] A. Lejay, *An introduction to rough paths*, Séminaire de probabilités XXXVII, Lecture Notes in Math., vol. 1832, Springer, 2003, pp. 1–59.

[20] T.J. Lyons, *Differential equations driven by rough signals*, Rev. Mat. Iberoamericana **14** (1998), no. 2, 215–310.

[21] T. Lyons, M. Caruana, and T. Lévy, *Differential Equations Driven by Rough Paths*, École d'été des probabilités de Saint-Flour XXXIV — 2004, Lecture Notes in Math., vol. 1908, Springer, 2007.

[22] T. Lyons and Z. Qian, *System Control and Rough Paths*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, 2002.

[23] T. Lyons and N. Victoir, *An extension theorem to rough paths*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. non linéaire **24** (2007), no. 5, 835–847.

[24] ———, *Cubature on Wiener space*, Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. **460** (2004), no. 2041, 169–198.

[25] J. Magnen and J. Unterberger, *From constructive field theory to fractional stochastic calculus. (I) An introduction: rough path theory and perturbative heuristics*, Ann. Henri Poincaré **12** (2011), no. 6, 1199–1226.

[26] G. Pagès and A. Sellami, *Convergence of multi-dimensional quantized SDE's*, Séminaire de Probabilités XLIII, Lecture Notes in Math., vol. 2006, Springer, 2011, pp. 269–307.

[27] J. Unterberger, *Aspects de la théorie des chemins rugueux*, Gazette des mathématiciens **131** (2012), 16–33.

[28] L.C. Young, *An inequality of the Hölder type, connected with Stieltjes integration*, Acta Math. **67** (1936), 251–282.

# Du changement dans les revues et séries de livres de la SMAI

Plusieurs journaux et séries de livres sont placés sous la responsabilité scientifique de la SMAI. Pour être précis, il s'agit pour les journaux d'*ESAIM COCV, ESAIM M2AN, ESAIM Proc* (en accès electronique libre), *ESAIM PS* et *RAIRO RO* (dont la SMAI partage la responsabilité scientifique avec la ROADEF), journaux publiés par EDP Sciences et diffusés par Cambridge University Press, et du journal électronique en accès libre *MathS In A.* publié par le CEDRAM ; pour les séries de livres, des séries *Mathématiques et applications* publiée par Springer et *Mathématiques appliquées pour le Master / SMAI* publiée par Dunod.

Tous les 4 ans, le conseil d'administration de la SMAI reconduit ou renouvelle les rédacteurs en chef de ces journaux et séries de livres, et les nouveaux rédacteurs en chef remanient leurs comités de rédaction en accord avec le bureau de la SMAI. L'année 2011 a vu le renouvellement des rédacteurs en chef de *ESAIM Proc* et *RAIRO RO*, et l'année 2012 verra le renouvellement de ceux de tous les autres journaux et séries. Matapli a le plaisir de publier ci-dessous des messages des rédacteurs en chef de *RAIRO RO, d'ESAIM Proc* et de la collection *Mathématiques et Applications* annonçant ces changements et invitant à publier dans leurs journaux ; d'autres messages anaogues seront publiés dans les prochains numéros de Matapli.

## 1 *RAIRO – Operations Research*

Depuis début janvier 2012, RAIRO possède un nouvel éditeur en chef en la personne de Ridha Mahjoub (LAMSADE), ainsi qu'un nouveau corps éditorial (voir ci-dessous.) Dans sa nouvelle politique, la revue assurera une gestion rapide des papiers. Une première réponse, concernant un article soumis, devrait être donnée avant 3 mois, et une réponse finale dans un délai ne dépassant pas 6 mois.
La revue s'intéresse maintenant aux articles entrant dans une des catégories suivantes :
- théorie et méthodologie ;
- *case studies* décrivant des solutions pour des problèmes issus de domaines d'applications variés tels que le transport, les télécommunications, la production, la finance, la biologie … ;
- *survey* qui présentent une synthèse sur un thème ou un problème particulier ; les auteurs intéressés peuvent contacter l'éditeur en chef ou un des éditeurs ;
- *short communications* ne dépassant pas 10 pages (format du journal), qui peuvent être publiées rapidement dans un délai de 3 mois (noter que cette section est nouvelle).

La revue publie aussi des numéros spéciaux sur des thèmes en relation avec la Recherche Opérationnelle. Un numéro peut être une collection d'articles originaux de recherche, une monographie de recherche (un numéro thématique) ou

une collection d'articles issus d'une conférence. Chaque numéro spécial est géré par un ou plusieurs éditeurs qui peuvent ne pas être membres du corps éditorial. Les éditeurs intéressés sont encouragés à contacter l'éditeur en chef.

**Plus de détails sur le site de la revue** :
http ://journals.cambridge.org/action/displayJournal ?jid=ROE

## Corps éditorial

• **Editor-in-Chief :**
A. Ridha Mahjoub, LAMSADE, Université Paris-Dauphine, France

• **Area Editors**
**Scheduling and Graph Algorithms**
Jacek Blazewicz, Poznan University of Technology, Poland
**Combinatorial Optimization**
Nelson Maculan, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brazil,
**Continuous Optimization**
Franz Rend, Universität Klagenfurt, Austria
**Performance Analysis**
Alexandre Brandwajn, University of California, USA
**Stochastic Optimization and Supply Chain**
Michel Gendreau, Université de Montréal, Canada

• **Advisory Editors**
Alain Billionnet, École Nationale Supérieure d'Informatique pour l'Industrie et l'Entreprise, France
Philippe Chretienne, Université Pierre et Marie Curie (Paris 6), France
Gérard Cornuéjols, Carnegie Mellon University, Pittsburg, USA
Clovis Gonzaga, Federal University of Santa Catarina, Brazil
Jean-Baptiste Hiriat-Urruty, Université Paul Sabatier, Toulouse, France
Philippe Mahey, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, France
Sylvain Sorin, Université Pierre et Marie Curie (Paris 6), France

• **Associate Editors**
Karen Aardal, CWI, Amsterdam, The Netherlands
Warren P. Adams, Clemson University, USA
Miguel Anjos, Ecole Polytechnique, Montréal, Canada
Sandra Augusta Santos, Universidade Estadual de Campinas, Brasil
Mourad Baïou, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, France
Pietro Belotti, Clemson University, USA
Daniel Bienstock, Columbia University, New York, USA
Marta Margarida Braz Pascoal, Universidade de Coimbra, Portugal
Jacques Carlier, UTC Compiègne, France
José Rafael Correa, Universidade do Chile, Santiago, Chile
Dominique De Werra, EPFL, Lausanne, Switzerland
François Fages, INRIA, Rocquencourt, France
Ricardo Fukasawa, University of Waterloo, Canada
Masao Fukushima, Kyoto University, Japan
Stéphane Gaubert, INRIA and Ecole Polytechnique, Paris, France

Luis Gouveia, Universidade de Lisboa, Portugal
Michel Grabisch, Université Paris I, France
Pierre Hansen, HEC Montréal, Canada
Alain Hertz, Ecole Polytechnique, Montréal, Canada
Nikolaos Limnios, UTC Compiègne, France
Isabel Méndes-Diaz, Universidad de Buenos Aires, Argentina
Philippe Michelon, Université d'Avignon, France
Vangelis Paschos, Université Paris-Dauphine, France
Gérard Plateau, Université Paris Nord, France
Celso Ribeiro, Pontifícia Universidade Católica, Rio de Janeiro, Brazil
Gilles Savard, Ecole Polytechnique, Montréal, Canada
Ruediger Schultz, University Duisburg, Germany
Alberto Seeger, Université d'Avignon, France
Paolo Toth, University of Bologna, Italy
Hande Yaman, Bilkent University, Ankara, Turkey
Gerhard J. Woeginger, Eindhover University of Technology, The Netherlands

## 2 *ESAIM Proc*

Les éditeurs en chef et le comité éditorial de la revue *ESAIM : Proceedings* (*ESAIM : Proc*) viennent d'être renouvelés. *ESAIM : Proc* est une revue électronique gratuite qui a pour vocation principale de publier des notes de conférences en mathématiques appliquées. Le CEMRACS et les conférences SMAI ou CANUM font par exemple partie des contributions récurrentes. Nous souhaitons également publier des articles de synthèse. Le processus de reviewing est rigoureux et efficace. La revue est particulièrement destinée à la communication rapide de résultats nouveaux : un instantané de la recherche en action !
Nous vous invitons à nous contacter pour publier des actes d'une conférence que vous organisez, ou pour nous soumettre un article de revue.

**Nouveaux rédacteurs en chef**
Djalil Chafai, Pauline Lafitte, Tony Lelièvre et Clément Mouhot

**Le nouveau comité éditorial :** Didier Auroux, Franck Boyer, José Antonio Carrillo, Albert Cohen, Arnaud Debussche, Jocelyne Erhel, Francis Filbet, Josselin Garnier, David Gérard-Varet, Christophe Giraud, Olivier Glass, Emmanuel Gobet, Guillaume Hanrot, Raphaèle Herbin, Cyril Imbert, Benjamin Jourdain, David Lannes, Frédéric Legoll, Alexei Lozinski, Bertrand Maury, Frédéric Meunier, Gabriel Peyré, Franck Picard, Judith Rousseau, Christian Schmeiser, Carola Schoenlieb, Jian-Feng Yao.

**Page web : http ://www.esaim-proc.org/**

## 3 Collection *Mathématiques et applications*

*Communiqué par Josselin Garnier et Valérie Perrier*
La collection *Mathématiques et Applications*, créée par la SMAI à la fin des années 80, a pour vocation l'édition de cours avancés de Master (M2), d'école doctorale ou de dernière année d'école d'ingénieurs. Certains ouvrages pourront avoir une vocation purement pédagogique alors que d'autres constitueront des textes de référence.
Le premier volume paraît chez Ellipses en 1990, puis à partir du numéro 10, en 1992, la publication est assurée par Springer. Aujourd'hui, 71 volumes sont publiés ou en cours de publication, et leurs contenus reflètent la diversité à la fois des outils et des applications. Les sujets abordés couvrent bien sûr les domaines classiques des mathématiques appliquées : analyse numérique et équations aux dérivées partielles, probabilités et statistiques, optimisation, recherche opérationnelle, systèmes dynamiques, jusqu'à la théorie des jeux ou aux méthodes algébriques... Les livres concernent aussi bien des aspects tels que la modélisation, l'analyse mathématique, des développements algorithmiques, le calcul, ou encore des applications très spécifiques à un domaine donné. De ce point de vue, ces 71 premiers volumes reflètent la très grande richesse des mathématiques en interaction avec d'autres disciplines comme la physique statistique, la mécanique, la mécanique des fluides, la mécanique céleste, l'électromagnétisme, la chimie, l'optique, les sciences du vivant, l'informatique, l'automatique, le traitement d'image, la finance, la cryptographie !

Comme tous les 4 ans, le Comité éditorial a vu sa composition évoluer en début d'année : il s'agit de représenter ces différents aspects des mathématiques appliquées, et aussi les thématiques "phares" de la SMAI portées par ses groupes : SMAI-GAMNI, SMAI-MAS, SMAI-MODE, SMAI-SIGMA (ex-groupe SMAI-AFA renommé pour intégrer les mathématiques de l'image et la modélisation géométrique) ainsi que le récent groupe SMAI-MAIRCI qui représente le calcul sous toutes ses formes (scientifique, formel, haute performance...).
Grégoire Allaire, co-directeur très actif de la collection depuis 2005, passe la main, et nous le remercions chaleureusement pour son investissement ! Les actuels directeurs de la collection sont Josselin Garnier (université Paris VII) et Valérie Perrier (université de Grenoble).

**La composition du Comité éditorial est désormais :**
Rémi Abgrall, Université Bordeaux 1,
Grégoire Allaire, Ecole Polytechnique,
Michel Benaim, Université de Neuchâtel,
Maïtine Bergounioux, Université d'Orléans,
Thierry Colin, Université Bordeaux 1,
Marie-Christine Costa, ENSTA,
Arnaud Debussche, ENS Cachan Bretagne,
Isabelle Gallagher, Université Paris VII,
Stéphane Gaubert, INRIA Saclay,
Emmanuel Gobet, Ecole Polytechnique,
Raphaèle Herbin, Université d'Aix-Marseille,

Marc Hoffmann, ENSAE,
Claude Le Bris, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées,
Sylvie Méléard, Ecole Polytechnique,
Felix Otto, Max Planck Institute for Mathematics in the Sciences, Leipzig,
Philippe Robert, INRIA Rocquencourt,
Pierre Rouchon, Mines Paris Tech,
Bruno Salvy, INRIA Rocquencourt,
Annick Sartenaer, Université de Namur,
Eric Sonnendrucker, Université de Strasbourg,
Alain Trouvé, ENS Cachan,
Cédric Villani, Université de Lyon et Institut Henri Poincaré,
Enrique Zuazua, Basque Center for Applied Mathematics, Bilbao.

**Le dernier volume paru est**
*Discontinuous Galerkin methods* par Daniele Di Pietro et Alexandre Ern (No 69, 2011).
Deux numéros vont paraître en 2012 :
- *Bases, outils et principes pour l'analyse variationnelle*, par Jean-Baptiste Hiriart-Urruty (No 70),
- *Mouvements browniens, martingales et calcul stochastique*, par Jean-Francois Le Gall (No 71).

Nous encourageons vivement la soumission de manuscrits (en français ou anglais) : les textes ou projets peuvent être soumis directement à l'un des membres du comité éditorial, avec copie à V. Perrier ou J. Garnier.

*Mathématiques & Applications*
Collection de la SMAI éditée par Springer-Verlag
Directeurs de la collection : J. Garnier et V. Perrier

Vol 59 M. Elkadi, B. Mourrain, *Introduction à la résolution des systèmes polynomiaux*, 2007, 307 p., 59 €- tarif SMAI : 47,20 €

Vol 60 N. Caspard, B. Monjardet, B. Leclerc, *Ensembles ordonnés finis : concepts, résultats et usages*, 2007, 340 p., 58 €- tarif SMAI : 46,60 €

Vol 61 H. Pham, *Optimisation et contrôle stochastique appliqués à la finance*, 2007, 188 p., 35 €- tarif SMAI : 28 €

Vol 62 H. Ammari, *An Introduction to Mathematics of Emerging Biomedical Imaging*, 2008, 205 p., 46 €- tarif SMAI : 36,80 €

Vol 63 C. Gaetan, X. Guyon, *Modélisation et statistique spatiales*, 2008, 330 p., 64 €- tarif SMAI : 51.20 €

Vol 64 J.-M. Rakotoson, *Réarrangement relatif*, 2008, 320 p., 64 €- tarif SMAI : 51.20 €

Vol 65 M. Choulli, *Elementary Feedback Stabilization of the Linear Reaction-convection-diffusion Equation and the Wave Equation*, 2010, 300 p., 64 €- tarif SMAI : 51.20 €

Vol 66 W. Liu, *Une introduction aux problèmes inverses elliptiques et*, paraboliques, 2009, 270 p., 95 €- tarif SMAI : 76 €

Vol 67 W. Tinsson, *Plans d'expérience : constructions et analyses statistiques*, 2010, 530 p., 100 €- tarif SMAI : 80 €

Vol 68 B. Després, *Lois de conservation Eulériennes, Lagrangiennes et méthodes numériques*, 2010, 530 p., 55 €- tarif SMAI : 44 €

Vol 69 D.A. Di Pietro, A. Ern, *Mathematical aspects of discontinuous Galerkin methods*, 2012, 384 p., 89,95 €- tarif SMAI : 71,95 €

*Le tarif SMAI (20% de réduction) et la souscription (30% sur le prix public) sont réservés aux membres de la SMAI.*
Pour obtenir l'un de ces volumes, adressez votre commande à :
Springer-Verlag, Customer Service Books -Haberstr. 7, D 69126 Heidelberg/Allemagne
Tél. 0 800 777 46 437 (No vert) - Fax 00 49 6221 345 229 - e-mail : orders@springer.de
Paiement à la commande par chèque à l'ordre de Springer-Verlag ou par carte de crédit (préciser le type de carte, le numéro et la date d'expiration).
Prix TTC en France (5,5% TVA incl.). Au prix des livres doit être ajoutée une participation forfaitaire aux frais de port : 5 euros (+ 1,50 euros par ouvrage supplémentaire).

# Résumés de thèses

*par* Carole Le Guyader

Il est rappelé aux personnes qui souhaitent faire paraître un résumé de leur thèse ou de leur HDR que celui-ci ne doit pas dépasser une trentaine de lignes. Le non-respect de cette contrainte conduira à une réduction du résumé (pas forcément pertinente) par le rédacteur en chef, voire à un refus de publication.

## HABILITATIONS À DIRIGER DES RECHERCHES

**Madalina PETCU**

### Modélisation, analyse théorique et numérique des équations de la mécanique et de la physique

*HDR soutenue le 8 décembre 2011*
*Université de Poitiers*

Le mémoire, composé de trois chapitres, réunit un certain nombre de résultats de type modélisation, étude théorique et numérique de certaines équations de la mécanique et de la physique.

Le premier chapitre, intitulé 'Modélisation et étude des équations primitives de l'atmosphère et de l'océan', décrit des résultats ayant pour objet la modélisation et l'analyse mathématique des équations de l'atmosphère et de l'océan, en dimension deux et trois d'espace. Deux objectifs sont poursuivis dans ces travaux : premièrement, en liaison avec les théories phénoménologiques de la turbulence, nous démontrons la décroissance exponentielle des coefficients de Fourier des solutions de ces équations. La deuxième préoccupation est d'étudier le comportement asymptotique des équations primitives quand un petit paramètre, dit nombre de Rossby, tend vers zéro. Le chapitre est clos en proposant un modèle alternatif aux équations primitives (le modèle quasi-hydrostatique), qui conserve les mêmes difficultés mathématiques que les équations primitives, tout en étant un modèle plus intéressant du point de vue des simulations numériques.

Le deuxième chapitre, intitulé 'Modélisation des conditions aux limites pour les équations de Saint Venant dans un domaine borné', porte sur la modélisation des conditions aux limites pour des équations qui décrivent le comportement des fluides géophysiques, dans des régions limitées. La difficulté quand nous considérons un modèle dans des régions limitées est que les régions considérées n'ont pas de signification physique particulière et donc il n'y a pas de lois physiques naturelles permettant d'écrire des conditions aux limites sur la frontière du domaine de calcul. Nous proposons des conditions aux limites qui sont validées

du point de vue numérique et mathématique. Nous sommes intéressés à trouver des conditions aux bords pour lesquelles le problème est bien-posé et qui n'introduisent pas d'effets indésirables et des réflexions artificielles d'ondes à la frontière (*des conditions aux limites transparentes*).

Le dernier chapitre décrit un certain nombre de résultats numériques, obtenus au fil des années. Les sujets ne sont pas liés : le premier résultat propose un algorithme parallèle pour calculer la solution d'une équation différentielle. L'algorithme a des applications dans plusieurs domaines comme les mathématiques financières, la robotique, la biologie, l'ingénierie, etc.. Les autres résultats sont des études numériques adaptées à certains problèmes spécifiques issus de la physique, comme l'étude des fluides géophysiques ou les problèmes de changement de phase.

**Jesús ANGULO**

### Morphologie mathématique pour des images multi-variées

*HDR soutenue le 15 mars 2012*
*Université Paris-Est (Marne-la-Vallée)*

Mes travaux de recherche, menés au Centre de Morphologie Mathématique de MINES ParisTech depuis 2000, se sont articulés autour de deux grands volets : l'un plus méthodologique, allant de la théorie aux algorithmes et comme thématique centrale l'extension de la morphologie aux images multi-variées, et l'autre, beaucoup plus applicatif et souvent lié à des contrats et projets partenariaux, consacré principalement à la microscopie quantitative en biomédecine. Dans ce mémoire d'HDR, je présente de manière synthétique mes activités de recherche théorique et notamment :

– Travaux en modélisation et traitement morphologique des images couleur.
– Recherches encadrées en filtrage, exploration de la dimension et traitement morphologique des images multi/hyper-spectrales.
– Extension des opérateurs morphologiques à des images dans des espaces non-euclidiens : représentations hypercomplexes, images à valeurs sur la sphère et images à valeurs matricielles/tensorielles.
– Travaux sur des images multi-variées associées à une décomposition structure+texture ou bien celles qui sont associées à une famille de formes spatialement équivalentes.
– Résumé d'une série de travaux avec des contributions originales en morphologie mathématique, allant de la segmentation probabiliste (LPE stochastique), aux opérateurs régularisés (microviscosité, morphologie robuste) et passant par des liens avec l'adaptabilité et l'invariance (morphologie cyclique en coordonnées log-pol, morphologie anisotrope associée à un champ de gradient, morphologie bilatérale, morphologie structurellement adaptative). Mais aussi des travaux plus fondamentaux comme l'étude des connexions de la morphologie mathématique avec la non-linéarisation de la diffusion réelle et complexe ou la recherche de nouveaux paradigmes morphologiques comme les approximations morphologiques parcimonieuses.

Une dernière partie sera consacrée aux travaux à caractère plus applicatif ainsi qu'aux activités de valorisation. Notamment, d'une part, un rappel des applications que j'ai développées en traitement des images issues du domaine de la microscopie biomédicale (puces à ADN, cytologie hématologie et phénotypage cellulaire) ; d'autre part, un résumé de l'activité contractuelle et de valorisation industrielle menée en parallèle de travaux plus scientifiques. Après avoir fait le point sur les activités de recherche passées, le mémoire inclut un projet de recherche avec les perspectives envisagées dans mes travaux pour les cinq prochaines années. Ce projet de recherche est relativement bien établi, avec quelques sujets plus théoriques/méthodologiques en imagerie multi-variée et imagerie non-euclidienne, mais aussi en considérant leur pertinence pour des applications.

**Emmanuel PRADOS**

### Recherches en reconstruction 3D photométrique

*HDR soutenue le 4 avril 2012*
*Laboratoire Jean Kuntzmann et Université de Grenoble*

La reconstruction de surfaces tridimensionnelles à partir de plusieurs caméras calibrées peut s'entrevoir sous plusieurs aspects, en particulier, sous des aspects géométriques ou photométriques. Les images contiennent un grand nombre d'informations dont la correspondance, l'ombrage et les contours. En reconstruction 3D multi-vues, toutes ces informations n'ont cependant été que très partiellement fusionnées. Pourtant en exploitant simultanément le maximum d'information disponible, nous devrions intuitivement obtenir de meilleurs résultats et des algorithmes plus robustes. Par ailleurs, nous avons aussi régulièrement des connaissances *a priori* sur la scène ; connaissances qu'il est possible d'exploiter, par exemple en les insérant sous la forme de contraintes. Arriver à trouver un cadre rigoureux permettant de mêler et exploiter naturellement et simultanément toutes ces informations pour les problèmes de reconstruction 3D multi-vues serait donc particulièrement pertinent. Pour avancer dans cet objectif, il est nécessaire de se replonger et de travailler la modélisation. Dans ce manuscrit, je présente les travaux que j'ai menés dans ce domaine autour de toutes ces questions.

## THÈSES DE DOCTORAT D'UNIVERSITÉ

**Benjamin COULANGE**

Directeur de thèse : Lionel Moisan (Université Paris Descartes, MAP5 ).

### Détection et correction de l'aliasing par extension du signal analytique aux images numériques

*Thèse soutenue le 22 novembre 2011*
*Université Paris Descartes, MAP5*

Cette thèse porte sur la détection et la correction d'un artefact inhérent à toute acquisition numérique, l''aliasing'. Nous étudions tout d'abord son effet sur des modèles simples d'images, en particulier les motifs périodiques, qui y sont très sensibles.
Ceci nous amène à définir la relation d'aliasing spectrale, qui caractérise les couples de fréquences (ou de zones fréquentielles) liés par l'aliasing. Parallèlement, en étendant le 'signal analytique' aux images, nous obtenons des 'parties analytiques', images complexes dont le module est peu impacté par un mauvais échantillonnage. Cette définition permet de localiser spatialement le 'domaine d'action' d'une zone spectrale donnée. Remarquant alors qu'une image mal échantillonnée est constituée de beaucoup de couples fréquentiels en relation d'aliasing spectrale dont les domaines d'action sont fortement corrélés, nous pouvons ainsi élaborer deux modèles de détection d'aliasing, selon la méthodologie dite *a contrario*. Les images classiquement utilisées en traitement d'image s'avérant peu adaptées, nous construisons une base de test propice à l'étude de l'aliasing afin de valider les algorithmes proposés. Nous utilisons également ces algorithmes pour comparer les différents systèmes d'acquisition satellitaires existants du point de vue de la création d'aliasing, grâce aux données fournies par le CNES. Enfin, partant des résultats des algorithmes de détection, nous proposons une première méthode de correction de l'aliasing dans les images, et montrons au moyen d'un oracle qu'une hypothèse de non-repliement de spectre local pourrait s'avérer très prometteuse.

**Maël PRIMET**

Directeur de thèse : Lionel Moisan (Université Paris Descartes, MAP5 ).

### Méthodes probabilistes pour le suivi de points et l'analyse d'images biologiques

*Thèse soutenue le 25 novembre 2011*
*Université Paris Descartes, MAP5*

Nous nous intéressons dans cette thèse au problème du suivi d'objets, que nous abordons par des méthodes statistiques. La première contribution de cette thèse est la conception d'un algorithme de suivi de bactéries dans une séquence d'image et de reconstruction de leur lignage, travail ayant donné lieu à la réalisation d'une suite logicielle aujourd'hui utilisée dans un laboratoire de recherche en biologie.

La deuxième contribution est une étude théorique du problème de la détection de trajectoires dans un nuage de points. Nous définissons un détecteur de trajectoires utilisant le cadre statistique des méthodes *a contrario*, qui ne requiert essentiellement aucun paramètre pour fonctionner. Ce détecteur fournit des résultats remarquables, et permet notamment de retrouver des trajectoires dans des séquences contenant un grand nombre de points de bruit, tout en conservant un taux de fausses détections de trajectoires très faible. Nous étudions ensuite plus spécifiquement le problème de l'affectation de nuages de points entre deux images, problème rencontré notamment pour la détection de trajectoires ou l'appariement d'images stéréographiques. Nous proposons d'abord un modèle théoriquement optimal pour l'affectation de points qui nous permet d'étudier les performances de plusieurs algorithmes classiques dans différentes conditions. Nous formulons ensuite un algorithme sans paramètre en utilisant le cadre *a contrario*, ce qui nous permet ensuite d'obtenir un nouvel algorithme de suivi de trajectoires.

**Batoul SAOUD**

Directeur de thèse : Alain Miranville (Université de Poitiers).

**Attracteurs pour des systèmes dissipatifs non autonomes**

*Thèse soutenue le 16 décembre 2011*

*Université de Poitiers*

L'objectif de notre recherche est d'étudier l'existence d'attracteurs de dimension finie pour trois modèles d'équations aux dérivées partielles non linéaires : Navier-Stokes, Cahn-Hilliard et Cahn-Hilliard visqueux. En outre, nous étudions ces modèles dans les cas autonome et non autonome. Dans le but de définir les attracteurs pour chaque modèle, nous avons démontré l'existence et l'unicité de la solution, puis l'existence d'un ensemble borné absorbant. Nous avons démontré également l'existence d'un attracteur global et d'attracteurs exponentiels dans le cas autonome, ainsi que les attracteurs exponentiels, uniformes, rétrogrades et exponentiels rétrogrades dans le cas non autonome. Par ailleurs, nous avons démontré que pour les deux derniers modèles, l'attracteur rétrograde est unique et de dimension finie.
L'existence d'un paramètre $\varepsilon$, dans le modèle de Cahn-Hilliard visqueux, nous a conduits à construire une famille robuste d'attracteurs exponentiels en étudiant la limite $\varepsilon$ tend vers zéro.

**Joachim LEBOVITS**
Directeurs de thèse : Jacques Lévy Véhel (MAS, École Centrale Paris) et Marc Yor (LPMA, Université Paris VI).

## Calcul stochastique par rapport au mouvement brownien multifractionnaire et applications à la finance

*Thèse soutenue le 25 janvier 2012*
*École Centrale Paris*

L'objectif de cette thèse était de construire, développer et étudier un calcul stochastique (et plus particulièrement une intégrale stochastique) par rapport au mouvement brownien multifractionnaire (dans sa version harmonisable). Le choix de la méthode ou plus exactement des outils à employer n'étant pas fixé *a priori*, notre choix s'est porté sur la théorie du bruit blanc, qui généralisait, dans le cas du mouvement brownien fractionnaire (fBm), le calcul stochastique au sens de Malliavin.
Le premier chapitre de cette thèse introduit les différentes notions que nous utiliserons et présente les travaux qui constituent ce mémoire.
Dans le deuxième chapitre de cette thèse nous donnons une construction ainsi que les principales propriétés de l'intégrale stochastique par rapport au mBm harmonisable. Y sont également établies des formules d'Itô et une formule de Tanaka pour l'intégrale stochastique par rapport à ce mBm..
Dans le troisième chapitre nous donnons une nouvelle définition, à la fois plus simple et plus générale, du mouvement brownien multifractionnaire. Nous montrons ensuite que le mBm apparaît naturellement comme limite de suite de somme de mouvement brownien fractionnaire (fBm) d'indices de Hurst différents.
Nous appliquons alors cette idée pour tenter de construire une intégrale stochastique par rapport au mouvement brownien multifractionnaire à partir d'intégrales par rapport au fBm. Cela fait, nous appliquons cette définition d'intégrale par rapport au mBm pour une méthode d'intégration donnée aux deux méthodes que sont le calcul de Malliavin et la théorie du bruit blanc. Dans ce dernier cas nous comparons alors l'intégrale ainsi construite à celle obtenue au chapitre 2.
Le quatrième et dernier chapitre est une application du calcul stochastique développé dans les chapitres précédents. Nous y proposons un modèle à volatilité multifractionnaire où le processus de volatilité est dirigée par un mBm. L'intérêt résidant dans le fait que l'on peut ainsi prendre en compte à la fois la dépendance à long terme des accroissements de la volatilité mais aussi le fait que la trajectoire de ces accroissements varie au cours du temps.
Utilisant alors la théorie de la quantification fonctionnelle pour, entre autres, approximer la solution de certaines des équations différentielles stochastiques, nous parvenons à calculer le prix d'option à départ forward et implicitons ainsi une nappe de volatilité que l'on représente graphiquement pour différentes maturités.

**Nicolas MILLOT**
Directeur de thèse : Frédéric Abergel (MAS, École Centrale Paris).

**La couverture des produits contingents par minimisation locale de critères de risque convexes**

*Thèse soutenue le 17 février 2012*
*École Centrale Paris*

The thesis deals with the issue of hedging contingent claims in incomplete markets. The way we tackle this issue may be seen as an extension of M. Schweizer's work on quadratic local risk-minimization. Indeed, while still modelling assets as semimartingales, our method relies on the introduction of a convex function of the local costs to assess risk, thus relaxing the quadratic assumption. The results we obtain are existence and uniqueness results first and characterizations of optimal strategies in a frictionless market, both in discrete and continuous time settings. We then make those strategies explicit by using diffusion models with and without jumps. We further extend our approach in the case when liquidity is given through a stochastic supply curve. Finally we show the effect of the choice of different risk functions on the optimal portfolio by numerically solving the optimality equations.

**Houssam CHRAYTEH**
Directeur de thèse : Jean-Michel Rakotoson (Université de Poitiers).

**Problèmes de valeurs propres pour des opérateurs $\overrightarrow{\rho}$-multivoques**

*Thèse soutenue le 8 mars 2012*
*Université de Poitiers*

L'objectif de notre recherche est d'étudier l'existence et la régularité des solutions pour des problèmes de valeurs propres faisant intervenir un opérateur $\overrightarrow{\rho}$-multivoque $A : V \to \mathcal{P}(V^*)$ sur un domaine régulier $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Par l'intermédiaire des $N$-fonctions, nous construisons un opérateur $\overrightarrow{\rho}$-multivoque de Leray-Lions 'fortement monotone' sur un espace d'Orlicz-Sobolev anisotrope.
Nous signalons que la formulation théorique des problèmes associés à cet opérateur repose essentiellement sur la notion de sous-différentielle de Clarke, pour cela, nous donnons des nouvelles méthodes variationnelles qui correspondent à la résolution de ces problèmes dans le cas 'sous-critique' dans lequel la compacité joue un rôle important puis dans le cas 'critique' lorsque nous perdons la compacité.
Différentes applications sont données pour illustrer nos résultats abstraits, par exemple, un opérateur anisotrope aux exposants variables et un opérateur avec un poids de type Hardy.

**Raphaël THOLLOT**
Directrice de thèse : Marie-Aude Aufaure (MAS, école Centrale Paris).

**Capture dynamique de la situation utilisateur et recommandations contextuelles pour la Business Intelligence**

*Thèse soutenue le 3 avril 2012*
*École Centrale Paris*

Le volume des données créées et gérées par les systèmes d'information et leurs utilisateurs augmente régulièrement, conduisant à la problématique croissante de la surinformation. Pour répondre aux défis posés par l'accès à l'information dans de grands volumes de données, les systèmes personnalisés visent à proposer des données et des services plus adaptés à l'utilisateur. Les systèmes de recommandation (SR), apparus au milieu des années 1990, sont un cas particulier de ces systèmes personnalisés. Depuis, les SR ont suscité un intérêt croissant tant dans la communauté académique que du côté des industriels. Par ailleurs, des systèmes contextuels ont été développés dans le but de modéliser, capturer et interpréter l'information relative à l'environnement de l'utilisateur. Systèmes contextuels et SR partagent donc un même but, celui de fournir les données et les services les plus adaptés à la situation de l'utilisateur, généralement dans un environnement dynamique et hétérogène.
Les systèmes d'aide à la décision tels que les outils de Business Intelligence (BI) présentent eux aussi des difficultés relatives à leur utilisation, en particulier du fait de la quantité et de la complexité des données accessibles aux utilisateurs. Il est cependant notable que seules quelques rares techniques héritées de systèmes de recommandation ont à ce jour été appliquées dans le domaine des entrepôts de données et des outils d'analyse. Notre travail consiste donc à explorer des synergies pouvant résulter de la combinaison de SR et de systèmes contextuels, à des fins de personnalisation dynamique dans les outils de BI.
En réponse à ces challenges, nous développons dans notre travail une plateforme ouverte et modulaire permettant la gestion des situations ou contextes utilisateurs. Cette plateforme repose principalement sur un modèle de situation à base de graphes. Par ailleurs, la dynamique des interactions implique une dépendance inhérente au temps des informations contextuelles. Nous définissons donc deux types de composants actifs, règles d'activation et opérateurs, responsables de la gestion de l'évolution des graphes de connaissances. Les règles sont construites selon le modèle évènement-condition-action (ECA) et sont évaluées en réponse aux divers évènements reçus par la plateforme. L'évaluation d'une règle consiste à valider ses conditions grâce à l'exécution d'un certain nombre de requêtes sur les graphes de données, afin de déclencher l'exécution d'opérateurs appropriés.
La plateforme modulaire proposée avec un framework de développement nous a permis de démontrer divers scénarios de personnalisation et de recommandations. Nous présentons en particulier un composant personnalisé d'expansion de requêtes multidimensionnelles. Ce composant exploite d'une part la sémantique des modèles multidimensionnels et d'autre part des statistiques d'usage dérivées de collections de rapports et tableaux de bords existants. Le composant d'expansion de requêtes est utilisé par exemple dans Text-To-Query, un SR suggérant des requêtes et visualisations adaptées, générées dynamiquement afin d'illustrer un document texte (non structuré). T2Q a pour objectif d'aider l'utilisateur à analyser et enrichir les documents sur lesquels il travaille. Enfin, nous décrivons l'in-

tégration de notre plateforme dans un projet de recherche fédérée d'information. La plateforme est en particulier utilisée comme support pour la gestion de la connaissance relative aux utilisateurs. Celle-ci nous permet d'élaborer une stratégie de personnalisation de la recherche *via* la définition de préférences appliquées aux sources d'information.

**Qiongli WU**
Directeur de thèse : Paul-Henry Cournède (MAS, École Centrale Paris).

**Analyse de sensibilité pour la modélisation structure-fonction des plantes**

*Thèse soutenue le 19 avril 2012*
*École Centrale Paris*

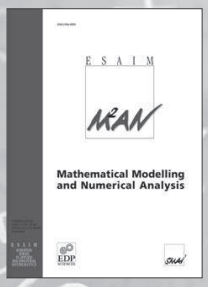
L'analyse de sensibilité globale a un rôle clé à jouer dans la conception et la paramétrisation des modèles structure-fonction de la croissance des plantes (FSPM). Ceux-ci combinent la description du développement structurel des plantes (organogenèse et géométrie) et de leur croissance fonctionnelle (accumulation de biomasse et allocation). Les modèles de ce type décrivent généralement de nombreux processus en interaction, comptent un grand nombre de paramètres et leur coût de calcul peut être important. L'objectif de cette thèse est de développer une méthodologie appropriée pour l'analyse de sensibilité des modèles structure-fonction des plantes et d'étudier comment l'analyse de sensibilité peut aider à la conception et la paramétrisation de ces modèles, ainsi qu'à l'analyse et la compréhension des processus biologiques en jeu. Notre contribution peut être vue en deux parties : du point de vue méthodologique et du point de vue de l'application des méthodes aux modèles. D'un point de vue méthodologique, nous avons tout d'abord amélioré les performances de la méthode de Sobol pour le calcul des indices de sensibilité en termes d'efficacité de calcul, avec un meilleur contrôle de l'erreur d'estimation par les simulations de Monte Carlo. Nous avons également conçu une stratégie d'analyse adaptée aux systèmes biophysiques complexes. Du point de vue applicatif, nous avons implémenté notre stratégie pour 3 FSPMs avec des niveaux de complexité différents, et nous avons analysé les résultats selon différents aspects, paramétrisation et diagnostic de modèles.

## Thèses en ligne !

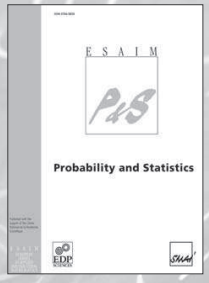
Le service TEL (`http://tel.archives-ouvertes.fr/`) est dédié à l'archivage des thèses et des Habilitations à Diriger les Recherches. Il est modelé sur le serveur de prépublications HAL. Ces services ont été créés par le CCSD (Centre pour la Communication Scientifique Directe). TEL est géré en collaboration avec Mathdoc et la Société Française de Physique.
Le dépôt des thèses est libre, la vérification concerne seulement la pertinence du classement thématique et la correction des données administratives, comme pour HAL.
Tout nouveau docteur (ou habilité) peut ainsi rendre visible (en 24 heures environ) son document de soutenance, ce qui ne peut qu'être encouragé !
**Thierry Dumont.**

EDP SCIENCES

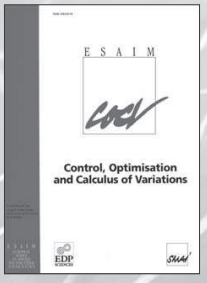
Mathematics



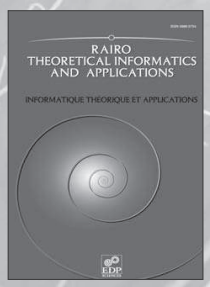

www.esaim-m2an.org




www.esaim-ps.org

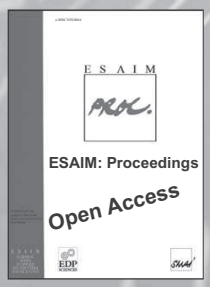



www.esaim-cocv.org

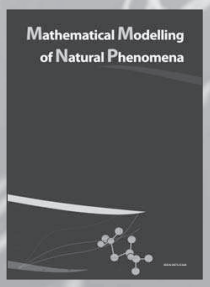



www.rairo-ita.org

www.rairo-ro.org




www.esaim-proc.org




www.mmnp-journal.org

www.edpsciences.org

# Annonces de Colloques

*par* Thomas Haberkorn

**Juin 2012**

ECOLE D'ÉTÉ "GEOMETRIC AND ANALYTIC TECHNIQUES IN CALCULUS OF VARIATIONS AND PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS"
*du 1er Juin au 31 Juillet 2012, à Pise (Italie)*
http://crm.sns.it/event/233/

QUASILINEAR EQUATIONS AND SINGULAR PROBLEMS
*du 4 au 6 Juin 2012, à Tours*
http://www.fdpoisson.fr/?q=colloques/quasilinear2012

4TH INTERNATIONAL CONFERENCE ON ACCELERATED LIFE TESTING AND DEGRADATION MODELS
*du 4 au 6 Juin 2012, à Rennes*
http://dupuy.perso.math.cnrs.fr/ALT2012.html

39ÈMES JOURNÉES EDP 2012
*du 4 au 8 Juin 2012, à Biarritz*
http://gdredp.math.cnrs.fr/spip/spip.php?rubrique34

5ÈME COLLOQUE MFI "MATHÉMATIQUES ET FORMATION DES INGÉNIEURS"
*du 6 au 8 Juin 2012, à Coëtquidan*
http://www.st-cyr.terre.defense.gouv.fr/index.php/crec/Centre-de-recherche-des-ecoles-de-Saint-Cyr-Coetquidan/A-la-Une/5e-colloque-Mathematiques-et-Formation-des-Ingenieurs

"GAMES AND STRATEGY IN PARIS" À L'OCCASION DES 60 ANS DE SYLVAIN SORIN
*du 11 au 13 Juin 2012, à Paris*
https://sites.google.com/site/sorin60th/

3ÈME COLLOQUE "MATHÉMATIQUES POUR L'IMAGE"
*du 11 au 14 Juin 2012, à Orléans*
http://www.fdpoisson.fr/?q=agenda/index&type=65

23RD INTERNATIONAL MEETING ON PROBABILISTIC, COMBINATORIAL AND ASYMPTOTIC METHODS FOR THE ANALYSIS OF ALGORITHMS
*du 17 au 22 Juin 2012, à Montreal (Canada)*
http://cg.scs.carleton.ca/~luc/AofA2012.html

OPTIMAL TRANSPORT (TO) ORSAY
*du 18 au 22 Juin 2012, à Orsay*
http://www.math.u-psud.fr/otto/

MULTIPHASE FLOW IN INDUSTRIAL AND ENVIRONMENTAL ENGINEERING
*du 19 au 22 Juin 2012, à Chambéry*
http://www.lama.univ-savoie.fr/AMIS2012/

JOURNÉES STATISTIQUES DU SUD 2012
*du 20 au 22 Juin 2012, à Toulouse*
http://www.math.univ-toulouse.fr/jss2012/

JOURNÉE SUR LES PROBLÈMES INVERSES
*le 21 Juin 2012, à Paris*
http://maths.cnam.fr/M2N/spip.php?article3

CONTRÔLE DE SYSTÈMES FLUIDES-STRUCTURES ET PROBLÈMES INVERSES
*du 25 au 28 Juin 2012, à Toulouse*
http://www.math.univ-toulouse.fr/TW2012/

NON-LINEAR PDE'S AND APPLICATIONS TO COMPLEX SYSTEMS, UNE CONFÉRENCE INTERNATIONALE EN L'HONNEUR D'HIROSHI MATANO
*du 25 au 28 Juin 2012, à Bures-sur-Yvette*
http://www.ihes.fr/jsp/site/Portal.jsp?document_id=3060&portlet_id=14

HYPERBOLIC CONFERENCE HYPE2012
*du 25 au 29 Juin 2012, à Padoue (Italie)*
http://www.hyp2012.eu

3RD INTERNATIONAL CONFERENCE ON UNIFORM DISTRIBUTION THEORY
*du 25 au 29 Juin 2012, à Smolenice (Slovaquie)*
http://www.mat.savba.sk/confer/UDT2012/index.htm

21TH INTERNATIONAL CONFERENCE ON DOMAIN DECOMPOSITION METHODS
*du 25 au 29 Juin 2012, à Rennes*
http://dd21.inria.fr

ECOLE D'ÉTÉ CEA/EDF/INRIA OPTIMISATION STOCHASTIQUE
*du 25 Juin au 6 Juillet 2012, à Cadarache*
http://www-hpc.cea.fr/SummerSchools2012-SO.htm

**Juillet 2012**

ENGOPT 2012, 3RD INTERNATIONAL CONFERENCE ON ENGINEERING OPTIMIZATION
*du 1er au 5 Juillet 2012, à Rio de Janeiro (Brésil)*
http://www.swge.com.br/engopt/

PREMIÈRES RENCONTRES R
*les 2 et 3 Juillet 2012, à Bordeaux*
http://r2012.bordeaux.inria.fr/

ALEL 2012
*du 2 au 4 Juillet 2012, à Limoges*
http://www.unilim.fr/alel2012

CONFÉRENCE NUMÉLEC 2012
*du 3 au 5 Juillet 2012, à Marseille*
http://www.aimontefiore.org/numelec2012/

ECOLE DE BIOLOGIE POUR ÉTUDIANTS MATHÉMATICIENS-INFORMATICIENS
*du 9 au 13 Juillet 2012, à Marseille*
http://www.cirm.univ-mrs.fr/index.html/spip.php?rubrique2&EX=info_rencontre&annee=2012&id_renc=886

NONLOCAL OPERATORS : ANALYSIS, PROBABILITY, GEOMETRY AND APPLICATIONS
*du 9 au 14 Juillet 2012, à Bielefeld (Allemagne)*
http://www.math.uni-bielefeld.de/nloc2012/

ECOLE THÉMATIQUE NEURENDOMATHS2012 : MATHEMATICAL/ COMPUTATIONAL NEUROENDOCRINOLOGY
*du 31 Juillet au 4 Août 2012, à Tours*
http://www.fdpoisson.fr/colloques/NeurEndoMath2012

**Août 2012**

MODERN MATHEMATICAL METHODS IN SCIENCE AND TECHNOLOGY (M3ST)
*du 26 au 28 Août 2012, à Kalamata (Grèce)*
http://noether.math.uoa.gr/m3st

INSTABILITIES IN HYDRODYNAMICS
*du 27 au 31 Août 2012, à Paris*
http://www.ljll.math.upmc.fr/instahydro12/

WORKSHOP ON ALGORITHMIC ISSUES FOR INFERENCE IN GRAPHICAL MODELS - AIGM'12
*du 27 au 31 Août 2012, à Montpellier*
http://carlit.toulouse.inra.fr/wikiz/index.php/AIGM12

**Septembre 2012**

ECOLE D'ÉTÉ EDP-PROBA : MODÉLISATION EN DYNAMIQUE DES POPULATIONS ET ÉVOLUTION
*du 6 au 14 Septembre 2012, à La Londe les Maures*
http://www.cmap.polytechnique.fr/~ecolemathbio2012/

ALGORITMY 2012 - CONFERENCE ON SCIENTIFIC COMPUTING
*du 9 au 14 Septembre 2012, à Vysoké Tatry (Slovaquie)*
http://www.math.sk/alg2012

WORKSHOP EN MÉCANIQUE DES FLUIDES ET DYNAMIQUE DE POPULATIONS
*du 10 au 14 Septembre 2012, à Hadath-Beyrouth (Liban)*
http://www.edst.ul.edu.lb/mfdp-Beyrouth2012.html

**Octobre 2012**

WORKSHOP "ANALYSE DE DONNÉES LONGITUDINALES DE CANCER, MODÈLES DE MARKOV CACHÉS"
*les 18 et 19 Octobre 2012, à Toulouse*
http://www.math.univ-toulouse.fr/~vgares/

TROISIÈME ÉDITION DU COLLOQUE EDP-NORMANDIE
*les 23 et 24 Octobre 2012, au Havre*
http://edp-normandie.sciencesconf.org/

**Novembre 2012**

ECOLE THÉMATIQUE "CONTRÔLE DES EDP, INTERACTIONS ET ENJEUX APPLICATIFS"
*du 5 au 9 Novembre 2012, à Marseille*
http://www.univ-orleans.fr/mapmo/CONEDP/

LES JOURNÉES D'ETUDES SUR LES MILIEUX POREUX
*les 8 et 9 Novembre 2012, à Marseille*
http://sites.polytech.univ-mrs.fr/jemp2012/

12ÈME FORUM DES JEUNES MATHÉMATICIEN-NE-S
*du 12 au 14 Novembre 2012, à Paris*
http://www.femmes-et-maths.fr/?page_id=827

INTERNATIONAL CONFERENCE ON ENSEMBLE METHODS IN GEOPHYSICAL SCIENCES
*du 12 au 16 Novembre 2012, à Toulouse*
http://www.meteo.fr/cic/meetings/2012/ensemble.conference/

LA FIABILITÉ ET LA ROBUSTESSE PAR LA SIMULATION NUMÉRIQUE
*le 15 Novembre 2012, à Cachan*
http://www.sia.fr/evenement_detail_appel_communication_simulation_numerique_1122.htm

**Septembre 2013**

CONFÉRENCE XFEM 2013
*du 11 au 13 Septembre 2013, à Lyon*
http://xfem2013.sciencesconf.org/

# CORRESPONDANTS LOCAUX

**Amiens** *Serge Dumont*
LAMFA
Univ. de Picardie Jules Verne
33 rue Saint Leu
80039 Amiens CEDEX
☎ 03 22 82 75 16
Serge.Dumont@u-picardie.fr

**Angers** *Loïc Chaumont*
LAREMA
Faculté des Sciences
Univ. d'Angers
2 bd Lavoisier
49045 Angers CEDEX 01
☎ 02 41 73 50 28 – 🖷 02 41 73 54 54
loic.chaumont@univ-angers.fr

**Antilles-Guyane** *Marc Lassonde*
Lab. de Mathématiques Informatique et Applications
Univ. des Antilles et de la Guyane
97159 Pointe à Pitre
Marc.Lassonde@univ-ag.fr

**Avignon** *Alberto Seeger*
Dépt de Mathématiques
Univ. d'Avignon
33 rue Louis Pasteur
84000 Avignon
☎ 04 90 14 44 93 – 🖷 04 9014 44 19
alberto.seeger@univ-avignon.fr

**Belfort** *Michel Lenczner*
Lab. Mécatronique 3M
Univ. de Technologie de Belfort-Montbelliard
90010 Belfort CEDEX
☎ 03 84 58 35 34 – 🖷 03 84 58 31 46
Michel.Lenczner@utbm.fr

**Besançon** *Nabile Boussaid*
Lab. de mathématiques
UFR Sciences et Techniques
16 route de Gray
25030 Besançon CEDEX
☎ 03 81 66 63 37 – 🖷 03 81 66 66 23
boussaid.nabile@gmail.com

**Bordeaux** *Olivier Saut*
Institut de Mathématiques
Univ. Bordeaux I
351 cours de la Libération
33405 Talence CEDEX
☎ 05 40 00 61 47 – 🖷 05 40 00 26 26
olivier.saut@math.u-bordeaux1.fr

**Brest** *Marc Quincampoix*
Dépt. de Mathématiques
Faculté des Sciences
Univ. de Bretagne Occidentale
BP 809
29285 Brest CEDEX
☎ 02 98 01 61 99 – 🖷 02 98 01 67 90
Marc.Quincampoix@univ-brest.fr

**Cachan ENS** *Frédéric Pascal*
CMLA
ENS Cachan
61 av. du Président Wilson
94235 Cachan CEDEX
☎ 01 47 40 59 46 – 🖷 01 47 40 59 01
frederic.pascal@cmla.ens-cachan.fr

**Caen** *Alain Campbell*
Groupe de Mécanique, Modélisation Mathématique et Numérique
Lab. Nicolas Oresme
Univ. de Caen
BP 5186
14032 Caen CEDEX
☎ 02 31 56 74 80 – 🖷 02 31 56 73 20
alain.campbell@unicaen.fr

**Cergy** *Mathieu Lewin*
Dép. de Mathématiques,
Univ. de Cergy-Pontoise / Saint-Martin
2 av. Adolphe Chauvin
95302 Cergy-Pontoise CEDEX
☎ 01 34 25 66 15 – 🖷 01 34 25 66 45
mathieu.lewin@math.cnrs.fr

**Clermont-Ferrand** *Olivier Bodart*
Lab. de Mathématiques Appliquées
Univ. Blaise Pascal
BP 45
63177 Aubière CEDEX
☎ 04 73 40 79 65 – 🖷 04 73 40 70 64
Olivier.Bodart@math.univ-bpclermont.fr

**Compiègne**
*Véronique Hédou-Rouillier*
Équipe de Mathématiques Appliquées
Dept Génie Informatique
Univ. de Technologie
BP 20529
60205 Compiègne CEDEX
☎ 03 44 23 49 02 – 🖷 03 44 23 44 77
Veronique.Hedou@utc.fr

**Dijon** *Christian Michelot*
UFR Sciences et Techniques
Univ. de Bourgogne
BP 400
21004 Dijon CEDEX
☎ 03 80 39 58 73 – 🖷 03 80 39 58 90
michelot@u-bourgogne.fr

**École Centrale de Paris**
*Anna Rozanova-Pierrat*
École Centrale de Paris
Lab. Mathématiques Appliquées aux Systèmes,
Grande Voie des Vignes,
92295 Châtenay-Malabry CEDEX
☎ 01 41 13 17 19 – 🖷 01 41 13 14 36
anna.rozanova-pierrat@ecp.fr

**États-Unis** *Rama Cont*
IEOR, Columbia University
316 S. W. Mudd Building
500 W. 120th Street, New York,
New York 10027 – Etats-Unis
☎ + 1 212-854-1477
Rama.Cont@columbia.edu

**Evry la Génopole** *Laurent Denis*
Dépt de Mathématiques
Univ. d'Évry Val d'Essonne
B$^{d}$ des Coquibus
91025 Évry CEDEX
☎ 01 69 47 02 03 – 🖷 01 69 47 02 18
laurent.denis@univ-evry.fr

**Grenoble** *Brigitte Bidegaray*
Lab. de Modélisation et Calcul, IMAG
Univ. Joseph Fourier
BP 53
38041 Grenoble CEDEX 9
☎ 04 76 57 46 10 – 🖷 04 76 63 12 63
Brigitte.Bidegaray@imag.fr

**Israël** *Ely Merzbach*
Dept of Mathematics and Computer Science
Bar Ilan University Ramat Gan.
Israel 52900
☎ + 972 3 5318407/8 – 🖷 + 972 3 5353325
merzbach@macs.biu.ac.il

**La Réunion** *Philippe Charton*
Dép. de Mathématiques et Informatique IREMIA
Univ. de La Réunion
BP 7151
97715 Saint-Denis Messag CEDEX 9
☎ 02 62 93 82 81 – 🖷 02 62 93 82 60
Philippe.Charton@univ-reunion.fr

**Le Havre** *Adnan Yassine*
IUT du Havre
Place Robert Schuman
BP 4006
76610 Le Havre.
☎ 02 32 74 46 42 – 🖷 02 32 74 46 71
adnan.yassine@iut.univ-lehavre.fr

**Le Mans** *Alexandre Popier*
Dép. de Mathématiques
Univ. du Maine
Av. Olivier Messiaen
72085 Le Mans CEDEX 9
☎ 02 43 83 37 19 – 🖷 02 43 83 35 79
Alexandre.Popier@univ-lemans.fr

**Liban** *Hyam Abboud*
Fac. des Sciences et de Génie Informatique
Univ. Saint-Esprit de Kaslik
BP 446 Jounieh
Liban
☎ + 961 9 600 914
hyamabboud@usek.edu.lb

**Lille** *Caterina Calgaro*
Lab. de Mathematiques Appliquees
Univ. des Sciences et Technologies de Lille
Bat. M2, Cité Scientifique
59655 Villeneuve d'Ascq CEDEX
☎ 03 20 43 47 13 – 🖷 03 20 43 68 69
Caterina.Calgaro@univ-lille1.fr

**Limoges** *Samir Adly*
LACO
Univ. de Limoges
123 av. A. Thomas
87060 Limoges CEDEX
☎ 05 55 45 73 33 – 🖷 05 55 45 73 22
adly@unilim.fr

**Littoral Côte d'Opale** *Carole Rosier*
LMPA
Centre Universitaire de la Mi-voix
50 rue F. Buisson
BP 699
62228 Calais CEDEX.
☎ 03 21 46 55 83
Carole.Rosier@lmpa.univ-littoral.fr

**Lyon** *Thierry Dumont*
Institut Camille Jordan,
Univ. Claude Bernard Lyon 1
43 b$^{d}$ du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne CEDEX
tdumont@math.univ-lyon1.fr

**Marne la Vallée** *Alain Prignet*
Univ. de Marne-la-Vallée, Cité Descartes
5 b$^{d}$ Descartes
77454 Marne-la-Vallée CEDEX
☎ 01 60 95 75 34 – 🖷 01 60 95 75 45
alain.prignet@univ-mlv.fr

**Maroc** *Khalid Najib*
École Nationale de l'Industrie Minérale
B$^{d}$ Haj A. Cherkaoui, Agdal
BP 753, Rabat Agdal 01000
Rabat
Maroc
☎ 00 212 37 77 13 60 – 🖷 00 212 37 77 10 55
najib@enim.ac.ma

**Marseille** *Guillemette Chapuisat*
LATP
Université Paul Cézanne
Faculté des Sciences et Techniques de St Jérôme, Case Cour A
avenue Escadrille Normandie-Niemen
13397 Marseille Cedex 20, France ☎ 04 91 28 88 40 – 🖷 01 91 28 87 41
guillemette.chapuisat@univ-cezanne.fr

**Mauritanie** *Zeine Ould Mohamed*
Équipe de Recherche en Informatique et Mathématiques Appliquées
Faculté des Sciences et Techniques
Univ. de Nouakchott
BP 5026
Nouakchott – Mauritanie
☎ + 222 25 04 31 – 🖷 + 222 25 39 97
zeine@univ-nkc.mr

**Metz** *Jean-Pierre Croisille*
Dépt de Mathématiques
Univ. de Metz
Ile du Saulcy
57405 Metz CEDEX 01
☎ 03 87 31 54 11 – 🖷 03 87 31 52 73
croisil@poncelet.univ-metz.fr

**Montpellier** *Matthieu Alfaro*
I3M
Dép. de Mathématiques,
Univ. Montpellier II, CC51
Pl. Eugène Bataillon
34095 Montpellier CEDEX 5
☎ 04 67 14 42 04 – 🖷 04 67 14 35 58
malfaro@math.univ-montp2.fr

**Nancy** *Takéo Takahashi*
Institut Élie Cartan
BP 239
54506 Vandoeuvre-lès-Nancy
☎ 03 83 68 45 95 – 🖷 03 83 68 45 61
takahash@iecn.u-nancy.fr

**Nantes** *Francoise Foucher*
École Centrale de Nantes
BP 92101
44321 Nantes CEDEX 3
☎ 02 40 37 25 19
francoise.foucher@ec-nantes.fr

**Nice** *Claire Scheid*
Lab. Jean-Alexandre Dieudonné
Univ. de Nice
Parc Valrose
06108 Nice CEDEX 2
☎ 04 92 07 64 95 – 🖷 04 93 51 79 74
claire.scheid@unice.fr

**Orléans** *Cécile Louchet*
Dépt de Mathématiques
Univ. d'Orléans
BP 6759
45067 Orléans CEDEX 2
☎ 02 38 49 27 57 – 🖷 02 38 41 71 93
Cecile.Louchet@univ-orleans.fr

**Paris I** *Jean-Marc Bonnisseau*
UFR 27 – Math. et Informatique
Univ. de Paris I, CERMSEM
90 rue de Tolbiac
75634 Paris CEDEX 13
☎ 01 40 77 19 40 – 🖷 01 40 77 19 80
jean-marc.bonnisseau@univ-paris1.fr

**Paris V** *Ellen Saada*
Lab. de statistique médicale
Univ. Paris 5
45 rue des Saints Pères
75006 Paris
☎ 01 42 86 21 14 – 🖷 01 42 86 41 44
ellen.saada@mi.parisdescartes.fr

**Paris VI** *Nicolas Vauchelet*
Lab. Jacques-Louis Lions
Boîte courrier 187
Univ. Pierre et Marie Curie
4 place Jussieu
75252 Paris CEDEX 05
☎ 01 44 27 37 72 – 🖷 01 44 27 72 00
vauchelet@ann.jussieu.fr

**Paris VI** *Stéphane Menozzi*
Lab. Probabilités et Modèles Aléatoires
Univ. Pierre et Marie Curie
4 place Jussieu
75252 Paris CEDEX 05
☎ 01 44 27 70 45 – 🖷 01 44 27 72 23
menozzi@ccr.jussieu.fr

**Paris XI** *Benjamin Graille*
Mathématiques, Bât. 425
Univ. de Paris-Sud
91405 Orsay CEDEX
☎ 01 69 15 60 32 – 🖷 01 69 14 67 18
Benjamin.Graille@math.u-psud.fr

**Paris XII** *Yuxin Ge*
UFR de Sciences et Technologie
Univ. Paris 12 - Val de Marne
61 av. du Général de Gaulle
94010 Créteil CEDEX
☎ 01 45 17 16 52
ge@univ-paris12.fr

**Paris IX** *Julien Salomon*
CEREMADE
Univ. Paris-Dauphine
Pl du M$^{al}$ de Lattre de Tassigny
75775 Paris CEDEX 16
☎ 01 44 05 47 26 – 🖷 01 44 05 45 99
salomon@ceremade.dauphine.fr

**Pau** *Brahim Amaziane*
Lab. de Math. Appliquées, IPRA,
Univ. de Pau
av. de l'Université
64000 Pau
☎ 05 59 92 31 68/30 47 – 🖷 05 59 92 32 00
brahim.amaziane@univ-pau.fr

**Perpignan** *Didier Aussel*
Dépt de Mathématiques
Univ. de Perpignan
52 avenue de Villeneuve
66860 Perpignan CEDEX
☎ 04 68 66 21 48 – 🖷 04 68 06 22 31
aussel@univ-perp.fr

**Poitiers** *Morgan Pierre*
LMA
Univ. de Poitiers
B$^{d}$ Marie et Pierre Curie
BP 30179
86962 Futuroscope Chasseneuil CEDEX
☎ 05 49 49 68 85
Morgan.Pierre@math.univ-poitiers.fr

**Polytechnique** *Aline Lefebvre-Lepot*
CMAP, École Polytechnique
91128 Palaiseau
☎ 01 69 33 45 61 – 🖷 01 69 33 46 46
aline.lefebvre@polytechnique.edu

**Reims** *Stéphanie Salmon*
Lab. de Mathématiques
Univ. Reims
UFR Sciences Exactes et Naturelles
Moulin de la Housse – BP 1039
51687 Reims CEDEX 2
☎ 03 26 91 85 89 – 🖷 03 26 91 83 97
stephanie.salmon@univ-reims.fr

**Rennes** *Virginie Bonnaillie-Noël*
IRMAR et ENS Cachan Bretagne
Av. Robert Schumann
35170 Bruz
☎ 02 99 05 93 45 – 🖷 02 99 05 93 28
Virginie.Bonnaillie
@Bretagne.ens-cachan.fr

**Rouen** *Jean-Baptiste Bardet*
LMRS
Univ. de Rouen
av. de l'Université - BP 12
76801 Saint-Étienne-du-Rouvray
☎ 02 32 95 52 34 – 🖷 02 32 95 52 86
Jean-Baptiste.Bardet@univ-rouen.fr

**Rouen (INSA)** *Anastasia Zakharova*
Lab. de Mathématiques de l'INSA
INSA Rouen - Av. de l'Université
BP 08
76801 St Etienne du Rouvray CEDEX
☎ 02 32 95 65 38 – 🖷 02 32 95 99 03
anastasia.zakharova@insa-rouen.fr

**Savoie** *Stéphane Gerbi*
Lab. de Mathématiques
Univ. de Savoie
73376 Le Bourget du Lac CEDEX
☎ 04 79 75 87 27 – 🖷 04 79 75 81 42
stephane.gerbi@univ-savoie.fr

**Strasbourg** *Michel Mehrenberger*
IRMA
Univ. de Strasbourg
7 rue René Descartes
67084 Strasbourg CEDEX
☎ 03 68 85 02 05
mehrenbe@math.unistra.fr

**Toulouse** *Violaine Roussier-Michon*
INSA, Département GMM
135 av. de Rangueil
31077 Toulouse CEDEX 4
☎ 05 61 55 93 29
roussier@insa-toulouse.fr

**Tours** *Christine Georgelin*
Lab. Math. et Physique Théorique
Fac. Sciences et Technique de Tours
7 parc Grandmont
37200 Tours
☎ 02 47 36 72 61 – 🖷 02 47 36 70 68
georgelin@univ-tours.fr

**Tunisie** *Fahmi Ben Hassen*
ENIT-LAMSIN
BP 37
1002 Tunis Belvédère
Tunisie
☎ +216 71 874 700 (poste 556) – 🖷 +216 71 871 022
fahmi.benhassen@enit.rnu.tn

**Valenciennes** *Juliette Venel*
LAMAV
Univ. de Valenciennes
Le Mont Houy – ISTV2
59313 Valenciennes CEDEX 9
☎ 03 27 51 19 23 – 🖷 03 27 51 19 00
juliette.venel@univ-valenciennes.fr