

Sommaire

SOMMAIRE

Compte-rendus des CA et bureaux	3
Les mathématiques à l'ANR en 2005	9
Nouvelles du CNRS	15
Écologie marine et modélisation : une approche géométrique	23
Quasi-interpolants splines : exemples et applications	29
Théorie des Jeux : le prix Nobel pour les travaux de R.J. Aumann	47
Exposition « Au delà du compas : la géométrie des courbes »	71
Annonces de colloques	73
Compte rendus de manifestations	75
Annonces de thèses	77
Revue de presse	105
Liste des correspondants régionaux	107

Date limite de soumission des textes pour le Matapli 80 : 15 avril 2006.

*Smai – Institut Henri Poincaré – 11 rue Pierre et Marie Curie – 75231 Paris Cedex 05
Tél : 01 44 27 66 62 – Télécopie : 01 44 07 03 64
smai@emath.fr – http ://smai.emath.fr*

PRIX DES PUBLICITÉS ET ENCARTS DANS MATAPLI POUR 2006

- 250 € pour une page intérieure
- 400 € pour la 3^e de couverture
- 450 € pour la 2^e de couverture
- 500 € pour la 4^e de couverture
- 150 € pour une demi-page
- 300 € pour envoyer avec Matapli une affiche format A4
(1500 exemplaires)

(nous consulter pour des demandes et prix spéciaux)

Envoyer un bon de commande au secrétariat de la Smai

Comptes-rendus de la SMAI

par Maria ESTEBAN

Compte-rendu du bureau de la Smai du 8 septembre 2005

Présents : J.-M. Bonnisseau, M.J. Esteban, P. Lascaux, Y. Maday, C. Picard, A. Prignet

Excusés : G. Allaire, M. Théra, J. Istas

1. Une nouvelle secrétaire éditoriale va être engagée à mi-temps afin de gérer les revues ESAIM. Elle remplacera la secrétaire actuelle qui a souhaité quitter ce poste.
2. Il faut bientôt organiser une campagne de lancement pour la nouvelle Collection Master.
3. Le Bureau étudie les possibles procédures pour rendre plus facile et dynamique la rédaction de SMAI-INFO.
4. La rubrique Actualités du site web va être modifiée pour héberger désormais une sous-rubrique « offres de bourses et emplois » qui pourra être alimentée en ligne par les personnes ayant connaissance de ces offres.
5. Le bureau a décidé de transformer la base de données principale de la SMAI en passant d'une base 4D à une base MYSQL, avec interface PHP, qui sera plus adaptée à nos besoins actuels, et plus facilement modifiable. Un cahier de charges va être rapidement être mis en place par A. Prignet et M. Esteban.
6. Infos enseignements données par J.-M. Bonnisseau :
 - il y a eu une réunion conjointe de la SMAI et la SMF avec la commission du titre afin de discuter de l'enseignement des Mathématiques dans les écoles d'ingénieur. Il y aura un suivi.
 - Une réunion de la commission d'enseignement de la SMAI et la SMF aura lieu bientôt afin de discuter des conclusions du colloque franco-finlandais sur le niveau des Mathématiques en Europe.
7. Métiers de maths : le contrat avec l'ONISEP va bientôt être signé.
8. Journées industrielles :
 - P. Lascaux informe le bureau de l'avancement de l'organisation de la journée « les financiers et les mathématiciens se parlent », qui sera organisée par M. Boulier le 6 novembre 2005.

COMPTES RENDUS CA & BUREAU

- Les prochaines journées pourraient porter sur l’acoustique d’une part et sur l’agroalimentaire d’autre part.
 - Projet de présentation-débat sur les super-calculateurs futurs, suite au rapport Héon-Sartorius.
9. La brochure « Explosion des Mathématiques » traduite en persan est déjà en ligne (Introduction de Waldschmidt, citant la SMAI et la SMF, etc.)
- L’Iran ayant des maisons de la Science, on a débattu sur la possibilité de voir (avec la SMF et la SFDS) comment contacter les maisons de quartier... il faudrait regarder si ce n’est pas déjà fait,
 - Par ailleurs, il serait intéressant d’avoir désormais un compte-rendu des journées « jeux mathématiques » qui se tiennent tous les ans Place St Sulpice en juin. On pourrait le publier dans MATAPLI.
10. Il faut demander aux collègues grenoblois en charge du pré-projet SMAI 2007 de le préparer pour sa présentation au prochain CA.
11. Il faut demander un rendez-vous avec le Département SPM (ou son successeur) pour discuter du remplacement de notre secrétaire quand elle partira à la retraite. Il faudra également essayer de voir B. Larrouturou afin de discuter de la politique du CNRS en Mathématiques Appliquées.
12. Mise au point sur la création et le fonctionnement du site emath et de l’opération Postes. Cela afin de clarifier les dépendances de diverses opérations que nous gérons seuls ou avec nos partenaires, la SMF et la SFDS.

Compte-rendu du bureau de la Smai du 10 octobre 2005

Présents : G. Allaire, J.-M. Bonnissieu, M.J. Esteban, J. Istars, P. Lascaux, Y. Maday, A. Prignet, M. Théra.

1. Compte-rendu de la réunion du 4 octobre avec les représentants du CNRS (C. Peskine et M. Enock), du ministère (A. Bonami) et avec quelques membres du Bureau de la SMF : désormais à la fin de nos bureaux communs nous nous accorderons sur nos projets communs à présenter aux tutelles, nos demandes de fonctionnement, etc.
2. Programmes futurs de l’ANR : La SMAI a soutenu une demande de programme général pour les mathématiques présenté par J.-P. Kahane à l’Académie. Parallèlement à cette demande la SMAI soutient la présentation de plusieurs demandes plus ciblées sur les mathématiques appliquées (maths-finance, calcul scientifique, bio-maths-santé, etc).
3. Tout est prêt pour la demi-journée consacrée aux relations entre mathématiques et finances qui aura lieu à l’IHP le 16 Novembre. Après on fera proba-

COMPTES RENDUS CA & BUREAU

blement une demie-journée sur l’acoustique et une sur l’agro-alimentaire. Après, quelque chose sur l’environnement ?

4. Projet de plaquette Onisep « Métiers des maths » : tout avance bien, mais il manque de l’argent.
5. Le 30 Novembre, à partir de 16h, aura lieu au Collège de France la réception pour les prix de l’Académie des Sciences en informatique et mathématiques appliquées, co-organisée par la SMAI et l’INRIA, sous le patronage de l’Académie des Sciences.
6. Publications :
 - Dunod n’a encore pas envoyé le contrat de la nouvelle collection Master pour signature. Nous espérons qu’il sera signé très bientôt et que la collection sera lancée au printemps avec 2 ou 3 volumes.
 - Il faut rechercher des responsables pour Esaim Proceedings. Des discussions montrent qu’il y a un intérêt réel à le maintenir.
7. SMAI 2007 aura lieu probablement à Autrans. Le bureau a souhaité que les organisateurs (Istas, Perrier, Bonnetier) prennent bientôt contact avec les responsables des groupes pour prendre leurs avis et suggestions. Création d’un comité scientifique bientôt.

Compte-rendu du Conseil d’Administration de la Smai du 16 Novembre 2005¹

Présents : M. Ash, F. Alouges, A. Blouza, J.-F. Boulier, S. Cordier, P. Chenin, M.J. Esteban, E. Gouin-Lamourette (IHP), E. Godlewski, J.-P. Hiriart-Urruty, S. Jaffard, S.M. Kaber, P. Lascaux, B. Lucquin, Y. Maday, M. Théra.

Excusés : Excusés : G. Allaire, M. Bergounioux, D. Chapelle, J.-M. Crolet (pouvoir), J. Istas, C. Picard, A. Prignet, B. Prum, D. Talay.

Absents : C. Le Bris, G. Pagès, P. Spiteri.

1. Le compte-rendu du CA du 10 Juin 2005 a été approuvé à l’unanimité.
2. Le CA approuve à l’unanimité l’idée d’organiser un congrès SMAI tous les 2 ans, au lieu de tous les 4 ans comme c’était le cas jusqu’à présent. Il y aura donc un congrès SMAI 2007, organisé par Grenoble. Le comité d’organisation est composé d’E. Bonnetier, J. Istas et V. Perrier. Le comité scientifique sera mis en place très prochainement. Des efforts seront faits pour que les divers groupes de la SMAI se sentent bien représentés dans ces congrès. Les conférenciers pléniers seront choisis de manière équilibrée et largement ouverte.

¹Ce compte-rendu sera présenté pour approbation à la prochaine réunion du CA de la SMAI.

COMPTES RENDUS CA & BUREAU

Sur proposition d'un des membres du CA, il est également souhaité qu'à chaque édition des congrès SMAI soit « associée » une société de mathématiques appliquées européenne, de manière à organiser quelques conférences de leurs membres et de créer un lien entre nos sociétés.

Une autre idée serait celle d'organiser à l'intérieur de chaque congrès SMAI un mini-symposium avec une organisation professionnelle, société, fondation et autre établissement où les mathématiques jouent un rôle important.

3. Discussion sur le niveau d'implication de la SMAI dans l'organisation de congrès internationaux en mathématiques au sens large : le CA conclut que la priorité doit être donnée à l'organisation de colloques en mathématiques appliquées, mais que pour le reste, il faut voir au cas par cas.
4. Le CA est informé des congrès futurs dans lesquels la SMAI est impliquée :
 - congrès franco-italien (avec SMF, SIMAI, UMI) en juillet 2006 à Turin. La SMAI participe au conseil scientifique de ce congrès, et a donné son avis pour les conférences plénières.
 - week-end mathématique de l'EMS à Nantes, en juin 2006.
 - colloques des groupes de la SMAI.
5. F. Alouges et D. Talay organiseront avec A. de Bouard des journées de rencontres EDP-Probas à l'IHP, qu'ils souhaiteraient faire sous l'égide de la SMAI. Le CA est unanime à saluer cette initiative. La première journée aura lieu le 9 janvier. Le programme sera annoncé très prochainement.
6. La SMAI va susciter des projets de mini-colloques ou de mini-symposia autour d'ICM 2006 à Madrid ou d'ICIAM2007 à Zurich.
7. Le bureau informe le CA qu'une réunion a eu lieu récemment avec des représentants de la SMF, du Département SPM du CNRS et du Ministère. Nos tutelles nous ont demandé de coordonner nos demandes, nous suggérant de faire des bureaux communs et de les inviter après afin de leur faire connaître nos projets et demandes communes.
8. Informations sur les publications.
 - La collection Master (niveau M1) est lancée chez Dunod, le contrat va être signé très bientôt. Quelques ouvrages vont paraître avant le mois de mai. Cette collection est complémentaire de la collection Maths et Applications (niveau M2).
 - Accès gratuit à ESAIM P&S jusqu'à fin décembre 2005. A la suite, le bureau fera le point avec les deux éditeurs en chef, S. Gamboa et S. Cohen.
 - ESAIM PROCEEDINGS : les anciennes responsables ayant souhaité quitter cette responsabilité, il est proposé au CA qu'une équipe formée d'E.

COMPTES RENDUS CA & BUREAU

Cancès, J.-F. Gerbeau et P. del Moral prennent en charge cette publication à partir du 1er janvier 2005. Le CA l’approuve à l’unanimité. Le CA tient à remercier M. Bergounioux et M. Jeanblanc pour le travail accompli.

9. Journées industrielles.

Les débats maths-industrie marchent bien. A la suite du CA il y a un débat maths-finance, organisé par P. Lascaux et J.-F. Boulier, avec le soutien de la Fondation d’Europlace Finance. La prochaine journée sera consacrée à l’agroalimentaire. Elle aura lieu au printemps 2006. Une autre journée sur « Aéronautique et Espace » se déroulera à Toulouse le 9 Juin 2006.

Il est suggéré de diffuser ces débats maths-industrie en direct en video-streaming. Si cela n’est, pour l’instant, pas possible, les exposés et les débats seront enregistrés et mis à disposition des centres de recherche ou de personnes le souhaitant. Patrick Lascaux et Stéphane Cordier vont étudier la faisabilité de ce projet.

10. Informations sur les actions en cours.

- Métiers des maths : le projet avance, le contrat entre les sociétés va être bientôt signé, mais il manque toujours de l’argent pour boucler le budget.
- Concernant les décisions 2005 de l’Agence Nationale pour la Recherche, le constat est très positif pour les mathématiques en général et pour les mathématiques appliquées en particulier. Pour l’année 2006, la SMAI a soutenu des propositions pour des nouveaux programmes de l’Académie : un projet présenté par J.-P. Kahane, la SMF et la SMAI et deux projets par O. Pironneau et la SMAI, (calcul scientifique intensif et modélisation mathématique en biologie).
- La SMAI a invité la SMF à s’unir à elle afin de faire une action auprès du Ministère afin de discuter de possibles changements dans la procédure de recrutement d’enseignants-chercheurs.

11. La secrétaire de la SMAI, Mme Duneau, part à la retraite le 17/11/05. Un(e) remplaçant(e) est recherchée. Par ailleurs, le CA est informé du remplacement de notre secrétaire éditoriale à mi-temps, s’occupant de la gestion des journaux de la SMAI.

12. Questions diverses S. Cordier présente le serveur CIEL (codes informatiques en Ligne <http://ciel.ccsd.cnrs.fr/>) et demande comment la SMAI pourrait, si elle le souhaite, soutenir cette opération. Un projet de partenariat est en cours avec ESAIM M2AN. Un article pourrait être publié dans Matapli. L’idée d’un prix du meilleur dépôt est évoquée.

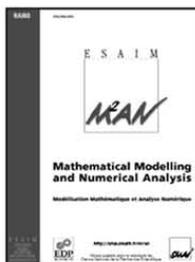


2005 EDP and SMAI Journals

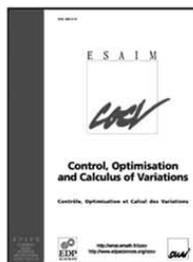
2005

www.edpsciences.org

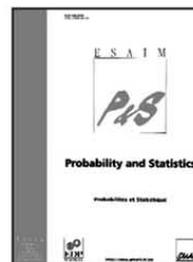
- **RAIRO - Operations Research (RO)**
- **ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis (M2AN)**
- **ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations (COCV)**
- **ESAIM: Probability and Statistics (P&S)**
- **ESAIM: Proceedings**



0764-583X • Vol. 39
6 issues
print & full-text online edition
* France: **674 €**
* Europe: **843 €**
* Rest of the world: **863 €**



1292-8119 • Vol. 11
* Institutions (paper version only):
- Europe: **173 €**
- Rest of the world: **173 €**
* Institutions (online only):
- Europe: **229 €**
- Rest of the world: **229 €**
* Institutions (paper + online versions):
- Europe: **344 €**
- Rest of the world: **344 €**
* Individuals (online only):
- Europe: **55 €**
- Rest of the world: **55 €**



1292-8100 • Vol. 9
* Institutions (paper version only):
- Europe: **86 €**
- Rest of the world: **86 €**
* Institutions (online only):
- Europe: **160 €**
- Rest of the world: **160 €**
* Institutions (paper + online versions):
- Europe: **222 €**
- Rest of the world: **222 €**
* Individuals (online only):
- Europe: **45 €**
- Rest of the world: **45 €**



0399-0559 • Vol. 39
4 issues
print & full-text online edition
* France: **274 €**
* Europe: **344 €**
* Rest of the world: **356 €**



1270-900X
* Electronic access to ESAIM: Proceedings' volumes is **free** of charges.
*France and Europe: VAT included
Rest of the World: without VAT*

ESAIM
EUROPEAN
SERIES
IN APPLIED
AND INDUSTRIAL
MATHEMATICS



Order directly to EDP Sciences

17 av. du Hoggar • B.P. 112 • 91944 Les Ulis Cedex A • France
Tel. 33 (0)1 69 18 75 75 • Fax 33 (0)1 69 86 06 78 • subscribers@edpsciences.org

Les mathématiques à l'ANR en 2005

par Pierre Arnoux, Philippe Flajolet, Vincent Franjou, Christian Kassel

Le texte qui suit a été initialement rédigé pour la Gazette des Mathématiciens (SMF), pour parution dans le volume 107, Janvier 2006.

L'Agence Nationale de la Recherche — ANR — a été créée en février 2005 avec pour rôle de soutenir des projets de recherche « venant de toute la communauté scientifique, financés après mise en concurrence et évaluation par les pairs ». Ce qui nous intéresse ici² est le « Programme Blanc » qui se compose du programme « Non Thématique » (NT) et de son compagnon, le programme « Jeunes Chercheurs » (JC). Selon sa description officielle, « le Programme Blanc donne une impulsion significative à des projets ambitieux qui se positionnent favorablement dans la compétition internationale et qui présentent des objectifs originaux, en rupture avec les itinéraires de recherche bien balisés ».

En 2005, 200 millions d'Euros ont été au total consacrés au programme JC+NT, sur lesquels 30 millions d'Euros étaient réservés aux actions étiquetées JC.

Neuf Conseils Scientifiques Disciplinaires³ (CSD) ont été nommés. Nous fournissons ici le compte rendu relatif au Comité « **Mathématiques et Interactions** », encore appelé poétiquement CSD5. Quelques réflexions plus générales concluent ce compte-rendu.

1. L'APPEL D'OFFRES

L'appel d'offre a été lancé avec une date limite de soumission des projets fixée à début juin 2005 ; suite à un processus complexe, les résultats seront finalement transmis aux responsables de soumissions de projets début octobre 2005.

Les projets sont d'abord déposés sur un site Internet dédié. Le soumissionnaire (sic !) choisit lui-même, pour le projet qu'il dépose, parmi les neuf disciplines du programme :

²Une autre partie des activités de l'ANR concerne des programmes spécifiques dans des domaines comme énergie, environnement, santé, information ; parmi ses missions figure encore le fait de « favoriser les interactions entre laboratoires publics et laboratoires d'entreprise en développant les partenariats ».

³La liste des divers CSD et de leurs membres se trouve sur le site Internet de l'ANR.

LES MATHÉMATIQUES À L'ANR EN 2005

- une discipline principale d'appartenance ;
- le cas échéant, une discipline secondaire.

Nous avons ainsi reçu en juin 2005 des projets « Monos » (ceux qui mettent uniquement en jeu la discipline mathématique) et des projets « Bis » (typiquement : maths plus sciences physiques, ou informatique, ou biologie). Pour les projets Bis, nous pouvions donc intervenir soit en tant que comité principal, soit en tant que comité secondaire.

En 2005, pour les projets où figuraient les mathématiques, les nombres de soumissions ont été les suivants :

	Maths (CSD5) en principal	Maths (CSD5) en secondaire
Jeune Chercheur mono :	25	—
Jeune Chercheur bi :	19	20
Non Thématique mono :	11	—
Non Thématique bi :	32	37
<i>Total :</i>	87	57

Rapportés à l'ensemble des disciplines, les projets en mathématiques (Projets Mono ou Bi-principal en CSD5) représentaient cette année 4% du nombre total des demandes (2200, toutes disciplines confondues).

2. LE COMITÉ (CSD5), LES EXPERTS

Le CSD5 a, en 2005, comporté 11 membres à savoir :

Pierre Arnoux, Thierry Colin, Hakan Eliasson, Philippe Flajolet (Président),
Vincent Franjou, Alice Guionnet, Christian Kassel, Bertrand Maury,
Jacques Tilouine, Jean-Philippe Vert, André Voros.

Ce comité a été nommé par l'ANR après consultation des directions des organismes de recherche et de la MSTP, semble-t-il. La liste couvrait selon nous assez bien la discipline, avec (en gros) 4 mathématiciens purs, 3 mathématiciens appliqués [2 analystes numériques, une probabiliste], et 4 mathématiciens d'interface [informatique, biologie, statistiques, physique]. (Par parenthèse cette configuration intégrait mieux les mathématiques pures que dans le cas de la précédente ACI NIM, dont l'objectif était, il est vrai, autre.)

La première étape du processus consistait à solliciter l'avis d'experts extérieurs au CSD, de manière analogue à ce que pratiquent des agences étrangères comme la NSF. La nomination de ces experts a fait l'objet d'une session du CSD de deux jours, fin juin 2005. Il était demandé que chaque CSD nomme 4 experts pour un projet Mono ou un projet Bi ayant ce CSD comme rattachement principal.

LES MATHÉMATIQUES À L'ANR EN 2005

Nous n'avions par contre à nommer que deux experts lorsque nous n'intervenions qu'en tant que CSD secondaire. Nous avons dans la très grande majorité des cas respecté ces guides. La cause des intersections aléatoires entre les choix indépendants des comités, de fait entre 4 et 6 experts se sont en général trouvés nommés.

En juillet, les projets (un pointeur sur une page ouëbe) ont été envoyés aux experts. Dans le même temps, ils étaient communiqués aux rapporteurs. La date limite de réponse imposée aux experts était début septembre. Les experts se sont trouvés être à environ 80% français (cela est dû en partie au dépôt de dossiers en langue française), mais ce fait n'a semble-t-il pas posé de problème particulier. Le taux de réponse des experts début septembre s'est établi à environ 40% pour le CSD5, ce qui est une assez bonne moyenne en comparaison d'autres disciplines. De la sorte les projets avaient souvent reçu deux ou trois expertises extérieures, parfois quatre. Quelques relances ont permis d'éviter le fait que certains des projets ne reçoivent aucun rapport d'expertise. En parallèle, de juillet à septembre, les contenus des projets étaient bien sûr examinés par les rapporteurs concernés. Les rapports d'experts sont entrés sur le ouëbe et combinent notations et appréciations rédigées. Certains estiment à environ 3 ou 4 heures de temps le travail d'un expert sur un dossier (lecture, écriture des notations et appréciations).

3. L'ÉVALUATION

Les membres du CSD5 se sont réunis $2\frac{1}{2}$ jours mi-septembre 2005 pour réaliser l'évaluation comparative des

$$87 + 57 = 144$$

dossiers dont ils avaient la charge. Chaque rapporteur avait alors connaissance de ses dossiers et des expertises correspondantes. Les délais étaient très tendus et l'on peut regretter :

- (i) que les membres du CSD n'aient pas eu accès, avant la tenue de la session de septembre, aux dossiers sur lesquels ils ne rapportaient pas ;
- (ii) que le temps de préparation de la synthèse des expertises externes par les rapporteurs ait été si court (*in fine*, quelques jours seulement). Il n'y a aucune raison pour que ces défauts de jeunesse, de nature purement technique et en partie liés à un outil informatique encore en rodage ne soient pas corrigés dès l'an prochain.

Le comité s'est tenu, selon nous, de manière très ouverte aux différentes sensibilités mathématiques. Pour partie des $2\frac{1}{2}$ jours de séance, nous nous sommes or-

LES MATHÉMATIQUES À L'ANR EN 2005

ganisés en trois sous-comités, disons pour simplifier, maths pures, maths applis, et interfaces des maths. Chaque sous-comité planchait d'abord sur l'union des dossiers de ses membres, chaque rapporteur présentant et discutant ses propres dossiers — de sorte que le sous-comité se forge une idée collective, plus approfondie qu'il n'aurait été possible en sessions plénière, du classement des dossiers dont il avait la charge. On passait ensuite à une phase plénière où chaque sous comité présentait ses recommandations à l'ensemble du CSD ; puis, discussion, harmonisation, interclassement, et enfin décision finale de classement.

Quant aux critères adoptés, ils sont déjà connus de ceux qui ont réalisés des expertises et ont été repris par les membres du CSD. Le plus simple est de les citer *in extenso*, ce en suivant les rubriques du questionnaire ouèbe (NT) :

- Porteur de Projet : appréciation, commentaire. ...quipes impliquées : appréciation, commentaire.
- Projet : Intérêt scientifique, réalisme du programme de travail, originalité dans le contexte général, positionnement/interaction au niveau international.
- Interdisciplinarité : appréciation, commentaire.
- Demande financière : appréciation, commentaire.

Nous avons pris un appui fort sur ces expertises, mais assumons naturellement la responsabilité des choix que nous avons faits, en situation difficile de « concours » plutôt que « d'examen ». Signalons que le critère d'interdisciplinarité n'était pertinent que pour les projets Bis, des projets de mathématiques pures ou appliquées en solo étant reconnus de plein droit⁴. Comme il est normal, les projets impliquent pratiquement tous plusieurs équipes et une estimation de la plausibilité et de la richesse du montage proposé était tentée.

Pour les projets Bis, il avait été décidé (tant par les présidents de CSD que par l'ANR) que le classement final concernant les dossiers Bis était du ressort du CSD de rattachement principal. Il n'était guère possible de faire autrement, vu la complexité de gestion de $\binom{9}{2} = 36$ intersections entre comités. Dans quelques rares cas, on a pu regretter que des projets que le CSD5 (en position d'avis secondaire) jugeait très bons ne soient pas passés ; on pourrait imaginer à l'avenir de donner des droits à valeur de forcing (des « jokers ») au comité secondaire.

Notons enfin que les projets JC et les projets NT concouraient *a priori* dans des catégories différentes dotées de budgets séparés. Compte tenu d'une pression trop forte sur le budget JC, nous avons procédé à quelques reclassements de projets JC en Projets NT, lorsque les circonstances s'y prêtaient. De la sorte nous es-

⁴Les quatre catégories JC/NT × Monos/Bis disposaient de fait d'enveloppes de financement séparées (établies préalablement par l'ANR en proportion des volumes des demandes de chaque type).

LES MATHÉMATIQUES À L'ANR EN 2005

timons que les jeunes chercheurs en maths ont été *de facto* sensiblement à égalité avec les anciens.

4. LA FINALISATION DU PROGRAMME

L'étape suivant la session de septembre des CSD était le comité de pilotage (le 22 septembre 2005) destiné à harmoniser le programme entre CSD. Nos propositions étant conformes au budget alloué ne posaient pas de problèmes sur ce plan, mais le taux de sélectivité de nos propositions était par trop inférieur à la moyenne prévue (l'objectif fixé par l'ANR était d'environ 25%–30% pour JC et 35%–40% pour NT.) Il a été alors procédé le 22 septembre à quelques ajustements finaux, mais de portée pour nous très limitée. En effet, le comité de pilotage du 22 septembre a dans l'ensemble bien accepté une « exception culturelle » des mathématiques.

Globalement, pour les 87 projets sur lesquels nous avons le pouvoir de décision, la sélectivité (les projets Monos et ceux ayant les maths comme principal) est la suivante :

38% (14/37) pour le programme JC ; **46%** (23/50) pour le programme NT.

(Les dénominateurs tiennent compte des reclassements JC→NT.) Ceci correspond à un financement attribué aux projets d'un montant égal à **4.5 MEuros**. Cette somme représente **2.25%** du budget total JC+NT de l'ANR.

Pour les 57 projets Bis où les maths étaient secondaires, le nombre de projets acceptés est de l'ordre de 20, pour un montant total qui devrait ne pas être inférieur à **2.5 MEuros**. Noter cependant que seule une fraction de cette dernière somme est à prendre en compte au titre d'équipes de mathématiciens.

5. LE FUTUR ?

Disons tout d'abord que nous avons été très favorablement impressionnés par la qualité généralement élevée des soumissions. Dans nombre de cas, en situation de forte compétition et à budget fixé, nous nous sommes vus contraints de refuser des projets que nous estimions dignes de financement. Nous sommes conscients de l'effort que nécessite le montage d'un projet et la préparation des dossiers — nous tenons à en remercier ici tous les responsables. Nous exprimons notre gratitude à tous les membres de la communauté mathématique qui ont accepté de participer à la phase d'expertise des projets en fournissant de nombreuses analyses très précieuses.

LES MATHÉMATIQUES À L'ANR EN 2005

D'un point de vue concret, il nous semble que la recommandation la plus immédiate à adresser à la communauté mathématicienne est la suivante : Ne pas hésiter à soumettre des projets de qualité et **ne pas pratiquer une auto-censure excessive**. Il nous semble bien que la part des mathématiques a, selon le terme même d'un rapport⁵ de l'ANR, été « comprimée ». Nous attribuons ceci d'une part à un **relativement faible volume de propositions** émanant de la communauté des mathématiciens, d'autre part à des **demandes financières souvent sous-dimensionnées** en provenance des mathématiciens. À cet égard, il est curieux que la demande moyenne d'un mathématicien soit voisine de celle d'un spécialiste de sciences humaines et sociales et environ la moitié de celle d'un projet typique dans les autres disciplines.

Le programme NT+JC de cette année doit être reconduit en 2006. Nous exprimons ici la nécessité qu'il soit doté de financements sensiblement accrus. En 2005, les 200 millions d'Euros du « Programme Blanc » représentent 37% du budget total des appels à projets de l'ANR. Nous espérons que cet espace de liberté pour la recherche mathématique verra sa part croître sensiblement dans le budget de l'Agence. Nous exprimons dans le même temps la nécessité que soit respecté pour l'avenir un sain équilibre entre, d'une part, le financement de la recherche sur projets et, d'autre part, le vital soutien de base aux laboratoires, aux équipes, aux groupements de recherche fédérateurs, et à la politique scientifique des organismes.

Pour le CSD5, texte rédigé le 15 décembre 2005 par

Pierre Arnoux
Philippe Flajolet
Vincent Franjou
Christian Kassel

⁵Recommandons à ce sujet et pour une vue d'ensemble le « dossier de presse » (?) daté du 15 novembre 2005 et disponible sur le site de l'ANR.

Nouvelles du CNRS

par Fabrice PLANCHON

SECTION 01 - SESSION D'AUTOMNE 2005

Ce compte-rendu ne suit pas nécessairement l'ordre chronologique du déroulement

Présents : Sorger, Franjou, André, Jouve, Cellier, Baraud, Beffara, Planchon, Sabbah, Baladi, Flavigny, Monchanin, Esteban, Nier, Comets, Colin.

Excusés : Divizio, Trouvé, Fougères, Laumon, Rassouli.

La session se déroule en présence de C. Peskine, directeur scientifique adjoint (DSA) pour les mathématiques et de M. Enock, chargé de mission au département scientifique. Y assistent également ponctuellement L. Bonpunt et S. Cordier, chargés de mission au département scientifique.

La section approuve le procès-verbal de la session du printemps 2005.

1. Intervention du DSA, C.Peskine

Le directeur du département SPM, M. Lannoo a quitté ses fonctions début octobre ; le chargé de mission pour la mise en place du nouveau département MIPPU (et probable futur directeur) Jean-Yves Marzin n'a pas encore assez d'éléments pour intervenir utilement. Quelques points importants :

- *Moyens* : on s'attend à une quinzaine de postes de chercheurs pour 01 au concours 2006, ce qui reste bien en regard d'autres sections (la mobilité vers l'université n'y est pas étrangère...). Pour les postes ITA, la diminution est moins importante, 5-7 postes. Les laboratoires ont rempli des demandes globales de moyens (financiers, appels d'offres, postes), on peut espérer que les DSAs pourront continuer à discuter avec les directeurs de labos, dans le cadre de leur nouvelles attributions.
- *Politique des mathématiques* : J.-F. Munster (directeur scientifique général dans le nouvel organigramme) a interviewé chacun des DSA. C. Peskine a répondu en parlant de 4 priorités : unité et ouverture des mathématiques (en particulier, développer les applications mais sans fléchages) ; interactions avec l'enseignement et la formation de chercheurs ; ressources humaines et recrutements (transparence du recrutement, même si le CN est souvent cité en exemple) ; développement des carrières, mobilité et promotion DR2 (c'est là que le CNRS

est faible dans le dialogue avec les universités). Dernier point : il faut une politique d’infrastructure, énorme travail pour imposer cette vision (informatique, ITA, etc.).

Suit une discussion informelle sur les problèmes posés par la réorganisation en cours. Sur la question des unités liées et associées, il semble que cette notion ne soit pas très pertinente et que la politique actuelle était la présence dans tous les labos. Tout le monde (dans la nouvelle organisation) est sensibilisé à ce problème. Par ailleurs, nous avons des liens naturels avec l’ingénierie, où se fait l’interaction ? (il s’agit d’un département transverse dont personne ne sait comment il va fonctionner) Quel va être le poids des maths dans MIPPU (qui est beaucoup plus large que SPM) ? En contrepartie, on a dans le nouveau département beaucoup de ceux avec qui on peut interagir. Dorénavant, les labos peuvent dépendre de deux départements (ou plus), typiquement MIPPU-Ingénierie. Auparavant, le département était un endroit où l’on partageait les moyens, il semble que cela s’effectuera plutôt au niveau de la nouvelle direction scientifique générale (DSG). Rien ne dit que le département aura le même rôle, entre ce qui remonte et ce qui se fera au niveau des DIRs.

2. Compte-rendu de la réunion exceptionnelle de la CPCN (commission des présidents de section du CN) qui s’est tenue en septembre 2005, à laquelle Fabrice Planchon a participé.

- *Concours* : de nombreuses sections sont surprises que le jury d’admission ait procédé à des déclassements ou n’ait pas pourvu des postes, sans aucun retour d’information vers les jurys d’admissibilité. Le directeur général (DG) rappelle que le jury est souverain, il est éventuellement prêt dans l’avenir à fournir des explications confidentielles aux présidents de section concernés. La CPCN souhaite une discussion sur la composition des différents jurys d’admission (DR et CRs, en particulier avec la mise en place des nouveaux départements scientifiques). Le jury d’admission, par sa composition même (au mieux un seul membre de chaque section présent) ne peut pas prendre de décision basée sur le contenu scientifique ; donc en principe le classement d’une section ne peut être bouleversé que dans des circonstances exceptionnelles. Il est de toute façon indispensable que les règles du jeu soient connues à l’avance, par les jurys d’admissibilité comme par les candidats.
- *Réforme du CNRS* : le rôle exact des DIR n’est toujours pas connu précisément, et l’on ne sait pas comment les nouveaux départements scientifiques vont fonctionner. Les assistantes de gestion scientifique dans les départements disparaissent ; il n’est pas clair qui assurera leur rôle : les assistantes du comité na-

NOUVELLES DU CNRS

tional pour moitié et les directions régionales pour moitié (collecte des rapports ?). La CPCN demande qu’une politique scientifique claire soit définie et menée par les DSA, en lien avec les directeurs de laboratoire. En particulier, elle réfute toute augmentation du nombre de postes fléchés au concours résultant d’éventuelles demandes des DIRs.

- *Projet de loi* (en ligne : www.pactepourlarecherche.fr) : il n’est qu’assez peu détaillé (ceci n’est pas forcément un défaut : les détails pratiques sont le plus souvent dans les décrets qui suivent). Un article 5 sur l’évaluation, mise en place d’agence d’évaluation de la recherche (AER) indépendante des départements scientifiques du CNRS et de la MSTP (ministère). Cette agence évaluera toutes les unités de tous les organismes. Pour les comités d’évaluation (au moins en mathématiques), rien ou presque ne change, si ce n’est l’endroit où se décide leur composition (AER en remplacement du DSA ou de la MSTP pour les unités non CNRS). Du point de vue du comité national, la vraie question est en aval. L’AER enverra le rapport à la tutelle du laboratoire, rien ne dit que le rapport repassera devant la section compétente du CN. Le CN n’est plus mentionné dans le projet qu’en tant qu’organe d’évaluation des personnes. En particulier, qui juge des créations/suppressions/fusions d’unités ? Continuera-t-on à effectuer des missions d’évaluation en propre pour les unités CNRS ? Il est possible que rien ou presque ne change en pratique, mais cela reste extrêmement flou, et relève du fonctionnement interne du CNRS. Il y aura donc une réunion plénière du CN le 9 décembre pour discuter de l’ensemble de toutes ces questions. A noter que le projet de loi n’aborde absolument pas l’évaluation des enseignants-chercheurs.
- *Perspectives budgétaires* : budget en faible augmentation, mais les budgets récurrents vont plutôt baisser. Sur les 3000 postes créés, le CNRS en a obtenu environ 200, auxquels il faut rajouter de l’ordre de 90 postes d’accueil. Sur les 200 postes permanents, la répartition prévue par la direction générale est de 160 ITA et 40 chercheurs. Dans le contexte de départs à la retraite moins importants qu’en 2005, il est à craindre que l’on ait moins de postes au concours 2006. La CPCN souhaite qu’un effort soit fait pour que le bilan comptable ne soit pas négatif de 2005 à 2006.
- *La question des délégations* a été de nouveau évoquée. Ce qui a été dit par le DG : la part nationale est amenée à diminuer, puisque l’on attribue de plus en plus de délégations aux universités lors des renouvellements quadriennaux. La gestion de ces délégations est laissée aux universités concernées. Il y a manifestation des dossiers qui se perdent, vu le nombre d’étapes intermédiaires dans l’évaluation. Le nombre d’intervenants dans le processus est trop élevé,

mais au bout du compte les mathématiques s’en sortent de mieux en mieux. Il est important de toujours demander des délégations par les deux voies (sur le quota du plan quadriennal de l’université et par la voie nationale). Par rapport à l’an dernier : le processus n’a pas encore démarré. Il sera plus ramassé dans le temps a priori. A noter que pour les demandes de post-docs, tout sera bouclé fin décembre (plus tôt, donc, que l’an dernier).

3. Changements organisationnels : à l’occasion du récent départ de M. Lannoo, la section a tenu à le remercier pour son action à la tête du département SPM, et la motion suivante a été approuvée à l’unanimité

<http://cn.math.cnrs.fr/automne2005/motion-01-a05.txt>

4. Affectations des nouveaux entrants (CR/DR)

La section discute des cas ayant posé problème (1er choix du candidat non suivi), et de la pertinence de l’utilisation des affectations en relation avec des questions de politiques scientifiques vis-à-vis des laboratoires intéressés par les candidats. La section (plus exactement le jury) devrait à l’avenir émettre des recommandations plus claires sur ces questions d’affectation (qui sont la prérogative de la direction scientifique). En tout état de cause, le processus conduisant aux affectations doit être relativement transparent et permettre au candidat d’avoir l’occasion de s’exprimer. Les cas ayant provoqué la discussion ont conduit à des affectations qui sont raisonnables scientifiquement, la section les approuve par un vote majoritaire. Les autres affectations de CRs sont confirmées à l’unanimité. Les affectations des DRs nouvellement promus sont également confirmées à l’unanimité.

5. Cas particuliers de laboratoires

Orléans/Tours : avis favorable à la création d’une fédération de recherche. C’est l’occasion pour la direction scientifique de rappeler que ce type de fédération, rassemblant des sites distants géographiquement, n’est aucunement un prélude à une unification des unités, mais a vocation à favoriser la coordination des laboratoires impliqués, dans leur dialogue avec leurs tutelles ainsi qu’au niveau régional.

Statistique et génome (UMR 8071, Évry) / Génome et informatique (UMR 8116, Évry) : avis favorable à l’intégration de l’UMR 8116 dans l’UMR 8071.

Démission Teissier (directeur institut fédératif de Jussieu) : pas de remplaçant prévu actuellement. L’IFJ a permis des actions communes, notamment pour la bibliothèque, il faudra trouver un nouveau directeur.

NOUVELLES DU CNRS

Rouen : la situation n’a pas avancé sur les points évoqués lors de la visite du laboratoire en juin 2005. La section n’a d’autre choix que de demander la mise en FRE.

6. Concours : les auditions et les délibérations du jury pour le concours 2006 auront lieu du 10 au 14 avril. La section décide de ne pas procéder à l’audition des candidats DRs, et de ne pas utiliser d’experts (ce dernier point sous réserve de l’arrêté d’ouverture du concours).

7. Comités d’évaluation : la section approuve la désignation des représentants pour les évaluations d’unités du printemps 2006.

8. Personnels

- Reconstitutions de carrière : avis favorable aux dossiers présentés.
- Titularisations : la section approuve l’ensemble des demandes.
- Promotions CR1 : la section donne un avis favorable à l’ensemble des promouvables, sans effectuer de classement (le budget permettant à l’ensemble de ces promotions d’avoir lieu).
- Accueils en détachement : la section approuve le classement suivant, (en gardant à l’esprit qu’en cas de non-détachement, les classés seront prioritaires lors de l’examen des délégations s’ils ont déposé une demande)
1 Auscher 2 Lagoutière 3 Rosier 4 Lambert 5 Creusé 6 Amroun 6 Benayadi 6 Cieutat 6 Miranville 6 Pittet 6 Tibar 6 Zaidenberg
- Promotions DR
la section note l’abondance d’excellents candidats pour un très faible nombre de promotions possibles, particulièrement au niveau DRCE où ce nombre est quasi-nul. Les critères retenus pour l’examen des dossiers sont consultables en ligne,
www.cnrs.fr/comitenational/sections/critere/section01.htm
Nombre de promos DR pour cette année, sur l’ensemble du CNRS : 100 DR1, 12 DRCE1, 13 DRCE2.
DRCE1 → DRCE2 : 1 J.-Y. Girard 2 J.-P. Bourguignon, J.-L. Loday.
DR1 → DRCE1 : 1 C. Soulé 2 F. Murat
DR2 → DR1 : 1 P. Biane 2 G. Besson 3 K. Chemla 4 L. Cohen
- Cas particuliers de chercheurs
Détachements : la section donne un avis favorable aux diverses demandes présentées, en modulant éventuellement leur durée. Elle rappelle que pour pouvoir se prononcer efficacement sur ce type de demandes, il importe qu’elles soient

faites dans les délais (et non a posteriori, ce qui semble malheureusement la règle de fait), et accompagnées d’un dossier scientifique clair en liaison avec la demande. Par ailleurs, elle souhaite être informée des projets à long terme des chercheurs dans ce type de positions (en particulier lorsqu’ils occupent un emploi permanent), lors des demandes de renouvellement.

Mutations : la section donne un avis favorable aux mutations qu’elle juge scientifiquement justifiées. Elle rappelle que toute demande doit être effectuée dans des délais raisonnables (c’est-à-dire pour être examinée à la session qui précède la date du changement d’affectation demandée), et accompagnée d’un dossier scientifique expliquant et appuyant cette demande, faute de quoi la section ne pourra se prononcer.

La section approuve ensuite plusieurs échanges de service entre chargés de recherche et maîtres de conférence.

9. Colloques-GDRs -Journaux

– Colloques - Écoles : le bilan classé des demandes figure à cn.math.cnrs.fr/automne2005/Colloques-Ecoles-Classement.txt
Les 14 dossiers des Écoles 2006 ont été classés en paquets suivant les critères suivants :

1. Qualité du projet de formation et du projet scientifique ;
2. Qualité et opportunité de l’école ;
3. Pertinence du budget.

Les Écoles sont financées par la formation continue du CNRS et reçoivent des crédits plus importants que les colloques. Il faut donc que les dossiers qui pourraient être financés comme école n’encombrent pas les demandes de colloques. A titre d’information, en 2005 le CNRS a financé 87 écoles, pour un montant de 1,3 million d’euros, dont 9 en mathématiques (dont 3 interdisciplinaires) pour 137000 euros.

L’examen des dossiers de colloques 2006 s’est faite comme l’an passé, puisque malgré les changements en cours au CNRS, la méthode d’attribution est reconduite. Étant entendu que la somme globale allouée n’est pas extensible, un grand nombre de subventions signifie des subventions petites. En 2005, c’est 17 colloques de mathématiques qui ont été soutenus à hauteur de 42000 euros (le département SPM a soutenu 54 colloques, pour 139 000 euros).

NOUVELLES DU CNRS

Les 37 dossiers de colloques 2006 ont été classés en paquets de priorité. Les critères retenus sont les suivants :

1. éligibilité : les dossiers de colloques au CIRM sont écartés, la subvention CNRS étant déjà faite par ce biais ;
2. Qualité du projet scientifique ;
3. Qualité et opportunité du colloque ;
4. Pertinence du budget.

En pratique, le point 1 n'était pas connu de tous, et le projet scientifique n'était pas toujours explicité. Pire, les budgets sont souvent inexploitable, voire incohérents. Par exemple, un budget centré sur la subvention CNRS n'est pas réaliste au vu des sommes allouées. Dès que les modalités pour 2007 seront plus claires, un formulaire type sera mis à disposition des demandeurs, sur le site de la section 01 du Comité National (cn.math.cnrs.fr).

- GDRs : la section approuve les bilans (positifs) des GDRs à mi-parcours et en fin de parcours, ainsi que les demandes de renouvellement et de création qui lui sont présentés. A noter que le CNRS souhaite encourager la constitution de réseaux européens (GDRE), mais que, pour des raisons de facilité administrative, il est recommandé de constituer un GDR qui représente le noeud français dans le GDRE (tout en déposant les demandes simultanément et de façon coordonnée).
- Journaux : la section approuve le renouvellement des subventions demandées.



2005 EDP and SMAI Journals

2005

www.edpsciences.org

- **RAIRO - Operations Research (RO)**
- **ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis (M2AN)**
- **ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations (COCV)**
- **ESAIM: Probability and Statistics (P&S)**
- **ESAIM: Proceedings**

ORDER FORM

NAME _____ LIBRARY/INSTITUTION _____
 STREET _____
 ZIP CODE/CITY _____ COUNTRY _____
 E-MAIL _____ CLIENT NUMBER _____

Payment:

Send me a pro forma
 Check (to EDP Sciences)
 Credit card:
 Visa
 Eurocard/Mastercard
 American Express

DATE/SIGNATURE _____
 Card No: Valid until:

JOURNAL RECOMMENDATION

ATTN _____ DEP./LIBRARY _____
 STREET _____
 ZIP CODE/CITY _____ COUNTRY _____

Dear Librarian/Journal Acquisition Manager,
 I would like to strongly recommend this revue for acquisition for the following reasons:

This journal is a core journal in its field. It covers a wide range of topics within its discipline and is of interest to researchers and students from many specialities. It belongs to every comprehensive collection.

This journal is an essential reference source in my special field of research which I - and several of my colleagues - need to consult regularly.

I will continually be referring students to this journal. It publishes many articles that qualify as "essential reading" in my courses.

I belong to the editorial board of this journal and strongly support its work. I will regularly recommend articles to my colleagues and students.

I have submitted a paper to this journal. Naturally, I will recommend it to my colleagues and students.

Other good reasons for recommending this journal are as follows:

Thank you for your assistance.

NAME/TITLE/POSITION _____ DATE/SIGNATURE _____
 FACULTY/DEPARTMENT _____

Order directly to EDP Sciences
 17 av. du Hoggar • B.P. 112 • 91944 Les Ulis Cedex A • France
 Tel. 33 (0)1 69 18 75 75 • Fax 33 (0)1 69 86 06 78 • subscribers@edpsciences.org

Écologie marine et modélisation : une approche géométrique

par Jean-Christophe POGGIALE

LMGEM - UMR 6117
Centre d’Océanologie de Marseille
Case 901 - Campus de Luminy
13288 Marseille Cedex
poggiale@com.univ-mrs.fr

1. Introduction : Perturbations des écosystèmes

Les écosystèmes marins sont en permanence soumis à des perturbations, qu’elles soient d’origines naturelles comme par exemple l’impact du vent sur un écosystème marin ou le développement d’une épidémie, ou anthropique comme dans le cas de l’introduction d’une espèce exotique invasive ou d’un contaminant dans un milieu. Ces perturbations affectent les dynamiques des écosystèmes qui sont par conséquent maintenues en régimes transitoires. Pour comprendre les conséquences d’une perturbation donnée sur un écosystème donné, il faut appréhender son impact à chaque niveau d’organisation de l’écosystème. Par exemple, un coup de vent qui génère un champ turbulent peut affecter non seulement la circulation à moyenne échelle, mais également créer des conditions d’accès aux sels nutritifs très hétérogènes pour les cellules phytoplanctoniques. Autre exemple, une modification de la température de l’eau peut affecter non seulement la circulation à grande échelle mais également modifier le métabolisme des organismes vivants qui répondront par une modification de leurs fonctions biogéochimiques. La modélisation mathématique est une approche essentielle pour l’intégration de tous ces niveaux d’organisation. Elle vise également à en comprendre les interactions. Cependant, la description d’un écosystème complet, fondée sur la prise en compte de ses composantes jusqu’à celle de la physiologie des individus aboutit à des systèmes d’une complexité trop grande pour être simplement simulés, malgré la rapidité des machines actuelles. Le développement de méthode permettant de simplifier les modèles tout en conservant la dynamique des systèmes est donc nécessaire. Elles permettent un compromis indispensable entre la description détaillée réaliste des écosystèmes et la possibilité de traiter les modèles obtenus analytiquement ou numériquement.

2. Méthodes mathématiques de réduction

Notre approche de la simplification des systèmes est fondée sur la réduction des modèles à des variétés invariantes normalement hyperboliques (Auger et Poggiale, 1998, Auger *et col.*, 1999, 2000a). Les mathématiciens ont souvent cherché à démontrer des théorèmes permettant de réduire la dimension des systèmes dans un souci évident d’en faciliter l’étude. Ainsi, on trouve de nombreux énoncés du théorème de la variété centrale dans différents contextes : équations différentielles ordinaires, aux dérivées partielles, à retard, équations aux différences. Le livre de Carr (Carr, 1981) en fournit une description détaillée et un certain nombre d’applications. C’est un théorème qui précise les conditions d’existence et de régularité de variétés invariantes qui contiennent l’information « non triviale » de la dynamique. Ces variétés sont associées à une singularité non hyperbolique et sont locales. En 1971, Fénichel énonça un théorème de persistance de variété invariante sous de petites perturbations pour des champs de vecteurs (Fénichel, 1971). Parallèlement, Hirsch *et col.*, (1977), ont montré des conditions nécessaires à la persistance et ont introduit la notion de variété normalement hyperbolique. La théorie des perturbations de variétés invariantes trouve son origine dans les travaux de Krylov et Bogoliubov, publiés dans les années 1930 (Krylov et Bogoliubov, 1934). Elle connaît un essor important, sans doute en raison des multiples applications qu’elle engendre, comme l’illustre l’article de Pliss et Sell (2001). Le livre de Wiggins (1994) donne un bon aperçu de cette théorie en dimension finie, en se basant sur le travail de Fénichel. Dans Poggiale et Auger (2004), nous donnons un exemple de modèle prédateur - proie où ce théorème est nécessaire pour comprendre la dynamique du système complet.

3. Perte de normale hyperbolicité

Un problème intéressant et riche en termes d’applications est obtenu lorsque la variété invariante du problème non perturbé contient des points où elle est non normalement hyperbolique. Il existe en effet de nombreux exemples d’applications où les variétés invariantes normalement hyperboliques ne sont pas globalement normalement stables. Lorsque une trajectoire du système arrive dans une région où la variété invariante perd sa normale hyperbolicité, la description fine de la dynamique est nécessaire : la trajectoire reste-t-elle au voisinage de la variété invariante ? Combien de temps ? Part-elle sur une autre branche stable de la variété ou sur une autre variété ? Quelle est alors la dynamique globale ? Cette perte de normale hyperbolicité peut dans certains cas entraîner des phénomènes comme le retard à la bifurcation étudié dans le cadre de la théorie dynamique des

ÉCOLOGIE MARINE ET MODÉLISATION

bifurcations. Des exemples ont été décrit notamment dans (Diener, 1983, Benoît, 1983 et Benoît, 1990) où le « phénomène canard » est étudié. Dans un souci d'exhaustivité, je préciserai que ce phénomène a été introduit pour la première fois dans (Diener, 1981 et Benoît *et col.*, 1981). Une approche géométrique de ce genre de problème a été proposée dans (Dumortier et Roussarie, 1996) et (Dumortier et Roussarie, 2000). Dans ces travaux, l'étude est présentée à travers des exemples, mais de manière suffisamment générale pour pouvoir être étendue. Les auteurs utilisent la méthode des éclatements de singularités pour décrire la dynamique au voisinage des points de la variété invariante où celle-ci perd la propriété de normale hyperbolicité. Dans (Auger *et col.*, 2000b), nous donnons un exemple de modèle de croissance de populations présentant des cycles d'abondance dont le mécanisme est du à l'hétérogénéité spatiale et aux comportements des individus. Cet exemple, dont l'analyse a été effectuée essentiellement numériquement, pourrait être revu à la lumière de méthodes géométriques comme celle de (Dumortier et Roussarie, 2000). De nombreuses applications de cette théorie se présentent par exemple dans les modèles de chaînes trophiques (Muratori et Rinaldi, 1992, De Feo et Rinaldi, 1998). Ces travaux théoriques permettent d'expliquer des observations sur des chaînes trophiques naturelles en milieu aquatique (Scheffer *et col.*, 1997, Scheffer *et col.*, 2000).

4. Conclusion

Cette approche nous a permis de développer des modèles de dynamique de population fondés sur la description de comportements individuels afin de comprendre comment les changements de comportement affectent les densités globales de populations (Auger et Poggiale, 1996, Michalski *et col.*, 1997, Poggiale *et col.* 1998, Poggiale, 1998, Bernstein *et col.* 1999). De la même manière, nous avons développés des modèles décrivant les interactions entre organismes vivants et éléments biogènes. La description détaillée s'impose pour comprendre le rôle de ces organismes dans les cycles biogéochimique et la simplification est nécessaire pour pouvoir intégrer les métabolismes dans les modèles biogéochimiques à grande échelle. En effet, la simplification est une approche qui permet de construire des formulations de processus adaptées à la description des dynamiques transitoires. Les formulation habituellement employées dans les modèles biogéochimiques sont issues d'expérimentations en laboratoire dans lesquelles les individus sont placés en conditions homogènes, à l'équilibre. Dans le milieu, à cause des perturbations environnementales, les individus ne sont jamais dans ces conditions d'équilibre. Les méthodes de simplification permettent de construire des modèles détaillés décrivant les perturbations subies par les individus et d'en

déduire des formulations au niveau des populations ou des communautés, formulations qui peuvent être ensuite introduites dans les modèles biogéochimique à méso-échelle.

Références

- [1] Auger, P., Charles, S., Viala, M., Poggiale, J.C., (2000a), Aggregation and emergence in ecological modelling : integration of the ecological levels, *Ecological Modelling*, 127, 11-20.
- [2] Auger, P., Poggiale, J.C., Charles, S., (2000b), Emergence of Individual Behaviour at the population level : effects of density dependent migration on population dynamics, *Compte Rendus de l'Académie des Sciences, Sciences de la Vie*, 323, 119-127.
- [3] Auger, P., Chiorino, G., Poggiale, J.C., (1999), Aggregation, emergence and immergence in hierarchically organized systems, *Int. J. General Systems*, 27 (4-5), 349-371.
- [4] Auger, P., Poggiale, J.C., (1998), Aggregation and Emergence in Systems of Ordinary Differential Equations, *Mathematical Computer Modelling*, 27, 4, 1-22.
- [5] Auger, P., Poggiale, J.C., (1996), Emergence of Population Growth Models : Fast Migration and Slow Growth, *Journal of Theoretical Biology*, 182, 99-108.
- [6] Benoît E, (1990), Canards et enlacements, extraits des Publications Mathématiques de l'IHES, 72, 63-91.
- [7] Benoît E, (1983), Systèmes lents-rapides dans R^3 et leurs canards, *Astérisque* 109-110, 159-191.
- [8] Benoît E, Callot, J.L., Diener, F., Diener, M., (1981), Chasse au canard, *Collection Mathématique*, 31, 32 (1-3), 37-119.
- [9] Bernstein, C., Auger, P.M., Poggiale, J.C., (1999), Predator Migration decisions, the Ideal Free Distribution and predator-prey dynamics, *The American Naturalist*, 153 (3), 267-281.
- [10] Carr, J., (1981), *Applications of Centre Manifold Theory*, Springer-Verlag, New-York.
- [11] De Feo, O., Rinaldi, S., (1998), Singular homoclinic bifurcations in tritrophic food chains, *Mathematical biosciences*, 148, 7-20.

ÉCOLOGIE MARINE ET MODÉLISATION

- [12] Diener, M., (1983), Canards et bifurcations, dans Outils et modèles mathématiques pour l'automatique, l'analyse des systèmes et le traitement du signal, 3, Publication du CNRS, 289-313.
- [13] Diener, M., (1981), Etude générique des canards, Thèse, Université de Strasbourg.
- [14] Dumortier, F., Roussarie, R., (2000), Geometric singular perturbation theory beyond normal hyperbolicity, dans Multiple Time Scale Dynamical Systems, Edt. C.K.R.T. Jones and A.I. Khibnik, Springer-Verlag, IMA 122.
- [15] Dumortier, F., Roussarie, R., (1996), Canard cycles and Center Manifolds, Memoirs of the American Mathematical Society, 121, number 577.
- [16] Fenichel, N., (1971), Persistence and Smoothness of Invariant Manifolds for Flows, Indiana University Mathematics Journal, 21, 3, 193-226
- [17] Hirsch M.W., Pugh, C.C., Shub, M., (1977), Invariant Manifolds, Lectures Notes in Mathematics, 583, Springer-Verlag.
- [18] Krylov, N., Bogoliubov, N., (1934), The application of methods of nonlinear mechanics to the theory of stationary oscillations, Publication 8 of the Ukrainian Academy of Science, Kiev.
- [19] Michalski, J., Poggiale, J.C., Arditi, R., Auger, P., (1997), Effects of migrations modes on patchy predator-prey systems, Journal of Theoretical Biology, 185, 459-474.
- [20] Muratori, S., Rinaldi, S., (1992), Low and high frequency oscillations in three dimensional food chain systems, SIAM J. Applied Mathematics, 52 (6), 1688-1706.
- [21] Pliss, V.A., Sell, G.R., (2001), Perturbations of normally hyperbolic manifolds with applications to the Navier-Stokes Equations, Journal of Differential Equations, 169, 396-492.
- [22] Poggiale, J.C., Auger, P., (2004), Impact of spatial heterogeneity on a predator-prey system dynamics, C. R. Biologies, 327, 1058-1063.
- [23] Poggiale, J.C., (1998), Predator-Prey Models in Heterogeneous Environment : Emergence of Functional Response, Mathematical Computer Modelling, 27, 4, 63-71.
- [24] Poggiale, J.C., Michalski, J., Arditi R., (1998), Emergence of Donor Control in Patchy Predator-Prey Systems, Bulletin of Mathematical Biology, 60 (6), 1149-1166

ÉCOLOGIE MARINE ET MODÉLISATION

- [25] Scheffer, M., Rinaldi, S., Kuznetsov, (2000), Effects of fish on plankton dynamics : a theoretical analysis, *Canadian J. of Fisheries and Aquatic Sciences*, 57 (6), 1208-1219.
- [26] Scheffer, M., Rinaldi, S., Kuznetsov, Y.A., Van Nes, E.H., (1997), Seasonal dynamics of Daphnia and algae explained as a periodically forced predator-prey system, *Oikos*, 80 (3), 519-532.
- [27] Wiggins, S., (1994), *Normally Hyperbolic Invariant Manifolds in Dynamical Systems*, AMS 105, Springer-Verlag.

Quasi-interpolants splines : exemples et applications

par Paul SABLONNIÈRE

IRMAR et Centre de mathématiques, INSA de Rennes.
20 av. des Buttes de Coësmes,
35043 RENNES Cédex
Paul.Sablonniere@insa-rennes.fr

Résumé

Un **quasi-interpolant spline** (abréviation QI) est un opérateur d’approximation obtenu comme combinaison linéaire de fonctions de base à support borné (B-splines)

$$Qf = \sum_{\alpha \in A} \mu_{\alpha}(f) B_{\alpha}$$

Le coefficient $\mu_{\alpha}(f)$ de la B-spline B_{α} est une forme linéaire agissant sur la fonction f à approcher **dans un voisinage du support de B_{α}** . Le grand avantage de cette approche est que le calcul d’un QI est direct et **ne nécessite pas la résolution d’un système d’équations**, contrairement à ce qui se passe, par exemple, pour un opérateur d’interpolation ou de meilleure approximation au sens des moindres carrés. C’est particulièrement intéressant en dimension 2 ou 3, où le nombre de B-splines peut être relativement grand. Dans cet article, je décris **quelques exemples de QIs quadratiques** de différents types sur des espaces de splines à une ou deux variables. Puis je présente **quelques applications en approximation et en analyse numérique**.

1. Introduction, définitions et notations

Considérons le problème général suivant : approcher une fonction à partir de données discrètes ou de moyennes locales pondérées. Ce problème admet plusieurs solutions classiques, par exemple l’interpolation et l’approximation au sens des moindres carrés par des polynômes ou des fonctions splines polynômiales (dans le sens de fonctions polynômiales par morceaux). Le calcul de l’approximant requiert en général la résolution d’un système d’équations algébriques linéaires. En dimension supérieure ou égale à 2, la taille de ce système peut être très grande et sa résolution peut s’avérer longue ou numériquement instable, ce qui est un handicap sérieux si l’on approche des données en temps réel par exemple. Le grand avantage des quasi-interpolants est que leur calcul est direct et ne nécessite la résolution d’aucun système d’équations. D’autre part, ce sont

QUASI-INTERPOLANTS SPLINES

des opérateurs linéaires de norme assez petite et ils fournissent des approximations presque optimales, en tout cas d’ordre d’approximation maximal pour des données provenant de fonctions régulières. Enfin, ils peuvent fournir l’approximant d’une fonction dans la première étape d’une analyse multirésolution [8]

Soit \mathbb{F} un espace de fonctions, \mathbb{S} un espace de splines polynômiales d’une ou plusieurs variables et \mathbb{P}_n l’espace des polynômes de *degré total* au plus égal à n . On suppose que $\mathbb{P}_n \subset \mathbb{S}$ et $\mathbb{P}_n \subset \mathbb{F}$. On suppose aussi que \mathbb{S} est engendré par une famille de B-splines $\mathcal{B} = \{B_\alpha, \alpha \in A\}$ (ensemble A des indices est fini ou infini suivant que le domaine d’étude est borné ou non). Le terme générique de B-spline désigne une fonction spline polynômiale à support borné. En général, les B-splines de \mathcal{B} sont positives et forment une partition de l’unité : $\sum_{\alpha \in A} B_\alpha = 1$.

Un *quasi-interpolant* est un opérateur linéaire $Q : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{S}$ de la forme

$$Qf = \sum_{\alpha \in A} \mu_\alpha(f) B_\alpha \quad (1)$$

ayant les propriétés suivantes :

- (i) Q est *exact sur* $\mathbb{P}_n : Qp = p, \forall p \in \mathbb{P}_n$,
- (ii) Q est *local* : le coefficient $\mu_\alpha(f)$ ne dépend que des valeurs de f dans un voisinage de $\text{supp}(B_\alpha)$.

Le plan de l’article est le suivant : les sections 2 et 3 présentent des exemples de QIs splines quadratiques C^1 , de type discret ou intégral, sur des partitions uniformes de la droite ou du plan. Les sections 4 à 8 sont consacrées aux applications. La section 4 étudie l’approximation d’une fonction et des ses dérivées partielles d’ordres 1 et 2 par un QI discret et ses dérivées du même ordre ; puis la section 5 propose un algorithme de calcul des points stationnaires de ce QI, qui sont des approximations (du moins on l’espère) de ceux de la fonction approchée. La section 6 décrit une nouvelle formule d’intégration numérique, issue d’un QI discret sur un intervalle, couplée de manière naturelle à la formule de Simpson composée. La section 7 décrit une nouvelle formule de dérivation numérique, que l’on peut utiliser dans une méthode (pseudo)-spectrale. La section 8 montre que l’on peut approcher de manière satisfaisante les zéros d’une fonction par ceux d’un QI discret de cette fonction. Enfin, la section 9 fournit une bibliographie succincte concernant diverses extensions des QIs présentés, à la fois aux splines de degrés supérieurs et aux splines définies sur des partitions non uniformes de

domaines bornés ou non, de la droite, du plan ou de l'espace.

2. Quasi-interpolant splines quadratiques sur \mathbb{R}

Soit $\mathbb{F} = C^2(\mathbb{R})$ et soit $\mathbb{S} = S_2^1(\mathbb{R}, \tau)$ l'espace des *splines quadratiques* de classe C^1 sur la subdivision uniforme $\tau = \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ de la droite réelle (l'étude est plus simple dans ce cas ; pour un intervalle borné, voir la section 6). Une fonction de $C^1(\mathbb{R})$ est dans \mathbb{S} si sa restriction à chaque intervalle $I_k = [k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}]$ est dans \mathbb{P}_2 . Désignons par $B(x)$ la *B-spline quadratique* de support $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$ centré en 0, et posons $B_k(x) = B(x - k)$, on a donc $\text{supp}(B_k) = [k - \frac{3}{2}, k + \frac{3}{2}]$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Donnons les équations locales de $B(x)$ dans chacun des 3 intervalles I_{-1}, I_0 et I_1 de son support. Pour $x \in I_{-1}$, on pose $t = x + \frac{3}{2}$ et $B(x) = \frac{1}{2}t^2$. Pour $x \in I_0$, on pose $t = x + \frac{1}{2}$ et $B(x) = \frac{1}{2} + t(1 - t)$. Pour $x \in I_1$, on pose $t = x - \frac{1}{2}$ et $B(x) = \frac{1}{2}(1 - t)^2$. On a aussi $\hat{B}(y) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-ity)B(t) dt = (\sin(y/2)/(y/2))^3$.

Schoenberg [14] a démontré que l'on pouvait représenter toute spline quadratique $g \in \mathbb{S}$ sous la forme :

$$g(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(g(k) - \frac{1}{8} D^2 g(k) \right) B_k(x). \quad (2)$$

On a évidemment $\mathbb{P}_2 \subset \mathbb{S}$ et l'on en déduit les expressions suivantes des premiers monômes dans la base des B-splines (les monômes sont notés $e_r(x) = x^r, \forall r \geq 0$) :

$$\begin{aligned} e_0(x) = 1 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} B_k(x); & e_1(x) = x &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} k B_k(x); \\ e_2(x) = x^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(k^2 - \frac{1}{4} \right) B_k(x). \end{aligned} \quad (3)$$

2.1 Quasi-interpolant discret

On peut définir un premier opérateur Q de $\mathbb{F} = C^2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{S} = S_2^1(\mathbb{R}, \tau)$ par

$$Qf(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(f(k) - \frac{1}{8} D^2 f(k) \right) B_k(x). \quad (4)$$

C'est un QI car il est exact sur \mathbb{P}_2 et la forme linéaire $\mu_k(f) = f(k) - \frac{1}{8} D^2 f(k)$ n'utilise que les valeurs de f et de $D^2 f$ au point k , centre de $\text{supp}(B_k)$. On l'appelle quasi-interpolant différentiel, et de plus c'est un *projecteur* sur \mathbb{S} car $Qg = g$ pour tout $g \in \mathbb{S}$.

QUASI-INTERPOLANTS SPLINES

Une première variante consiste à remplacer $D^2 f(k)$ par la différence seconde centrée

$$\delta^2 f(k) = f(k-1) - 2f(k) + f(k+1).$$

On obtient ainsi un second opérateur Q^* de $\mathbb{F} = C(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{S} = S_2^1(\mathbb{R}, \tau)$:

$$Q^* f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(f(k) - \frac{1}{8} \delta^2 f(k) \right) B_k(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mu_k^*(f) B_k(x), \quad (5)$$

où

$$\mu_k^*(f) = \frac{1}{8} (-f(k-1) + 10f(k) - f(k+1)).$$

Comme $D^2 = \delta^2$ sur \mathbb{P}_2 , Q^* est aussi exact sur \mathbb{P}_2 et c'est un opérateur local car $\mu_k^*(f)$ n'utilise que les valeurs de f aux trois points entiers de $\text{supp}(B_k)$. Ce n'est plus un projecteur sur \mathbb{S} , en revanche, il n'utilise que les valeurs discrètes de f . On l'appelle quasi-interpolant discret.

On peut calculer exactement la norme infinie de Q^* . En désignant la norme infinie de la fonction f sur \mathbb{R} par $|f|_\infty = \sup\{|f(x)|; x \in \mathbb{R}\}$, on a

$$\|Q\|_\infty = \sup\{|Q^* f|_\infty; |f|_\infty \leq 1\}.$$

Pour cela, il suffit d'écrire $Q^* f$ sous la forme :

$$Q^* f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) \tilde{B}_k(x),$$

où la fonction fondamentale \tilde{B}_k , de support $[k - \frac{5}{2}, k + \frac{5}{2}]$, est définie par

$$\tilde{B}_k = \frac{1}{8} (-B_{k-1} + 10B_k - B_{k+1}).$$

On sait que $\|Q^*\|_\infty$ est égale à la norme de Tchebychev de la fonction de Lebesgue Λ^* de l'opérateur :

$$\|Q^*\|_\infty = |\Lambda^*|_\infty, \quad \Lambda^* = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\tilde{B}_k|.$$

Par un calcul simple, on obtient $\|Q^*\|_\infty = 1.25$. Avec les notations suivantes :

$$|g|_{\infty, k} = \max\{|g(x)|, x \in [k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}]\} \quad \text{et} \quad d_k(f, \mathbb{P}_2) = \inf\{|f - p|_{\infty, k} : p \in \mathbb{P}_2\},$$

on montre que pour tout $f \in C(\mathbb{R})$ et tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$|Q^* f - f|_{\infty, k} \leq (1 + \|Q^*\|_\infty) d_k(f, \mathbb{P}_2) = 2.25 d_k(f, \mathbb{P}_2).$$

QUASI-INTERPOLANTS SPLINES

On voit donc que $Q^* f$ est très proche de la meilleure approximation uniforme de f dans chaque intervalle. On en déduit [9] que, sur la subdivision $h\mathbb{Z}$, et pour une fonction $f \in C^3(\mathbb{R})$, on a

$$|Q^* f - f|_\infty = O(h^3).$$

On a aussi de très bonnes approximations de f' (voir section 7) et de f'' par $(Q^* f)'$ et $(Q^* f)''$ respectivement. Les essais numériques confirment ces bons résultats.

2.2. Quasi-interpolant intégral

On va définir une deuxième variante du quasi-interpolant Q . Pour cela, on utilise les trois premiers moments de la B-spline quadratique B_k (on les calcule directement ou à l'aide de la transformée de Fourier) :

$$m_k^{(0)} = \int_{\mathbb{R}} B_k(x) dx = 1, \quad m_k^{(1)} = \int_{\mathbb{R}} x B_k(x) dx = k, \quad m_k^{(2)} = \int_{\mathbb{R}} x^2 B_k(x) dx = k^2 + \frac{1}{4}.$$

Soit $\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x) dx$ et soit \bar{Q} le QI intégral suivant :

$$\bar{Q}f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \bar{B}_k \rangle B_k,$$

où $\bar{B}_k = \frac{1}{4} (-B_{k-1} + 6B_k - B_{k+1})$.

On vérifie facilement que $\bar{Q}e_r = e_r$ pour $r = 0, 1$. Comme $\langle e_2, \bar{B}_k \rangle = k^2 - \frac{1}{4}$, on obtient, d'après (3),

$$\bar{Q}e_2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (k^2 - \frac{1}{4}) B_k = e_2.$$

Donc \bar{Q} est exact sur \mathbb{P}_2 et c'est un opérateur local. On peut également écrire $\bar{Q}f$ sous la forme

$$\bar{Q}f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, B_k \rangle \bar{B}_k,$$

ce qui montre que la fonction f est définie par des moyennes locales pondérées

$$\bar{\mu}_k(f) = \langle f, B_k \rangle = \int_{k-3/2}^{k+3/2} f B_k,$$

que l'on peut approcher au moyen de formules de quadrature de Gauss (cf par exemple [11]). En introduisant la fonction de Lebesgue $\bar{\Lambda} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\bar{B}_k|$, on peut montrer que

$$\|\bar{Q}\|_\infty \leq |\bar{\Lambda}|_\infty = 1.375,$$

et en déduire, comme à la fin de la section ci-dessus, que l'approximation de f par Qf est d'ordre 3 si f est suffisamment régulière.

3. Quasi-interpolants splines quadratiques sur une triangulation uniforme du plan

Soit τ la *triangulation uniforme* du plan obtenue en traçant les deux diagonales dans tous les carrés unité de sommets les points de $(\mathbb{Z} + \frac{1}{2})^2$. Les centres de ces carrés sont donc les points de \mathbb{Z}^2 .

On note $\varepsilon_1 = (1, 0)$ et $\varepsilon_2 = (0, 1)$ les vecteurs unitaires, puis l'on pose $\varepsilon_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = (1, 1)$ et $\varepsilon_4 = -\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = (-1, 1)$. Comme les arêtes du réseau sont parallèles à ces directions, on parle de réseau à 4 directions (4-direction mesh).

Soit $\mathbb{S} = S_2^1(\mathbb{R}^2, \tau)$ l'espace des *splines quadratiques de classe C^1* sur la triangulation τ . On a évidemment $\mathbb{P}_2 \subset \mathbb{S}$. Il existe une *box-spline* $B \in \mathbb{S}$ dont le support est l'octogone centré à l'origine et de sommets $\{\pm\frac{1}{2}(3\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2), \pm\frac{1}{2}(3\varepsilon_2 \pm \varepsilon_1)\}$. L'espace \mathbb{S} est engendré par la famille des *translatées entières* de B :

$$\mathcal{B} = \{B_\alpha(x) = B(x - \alpha); \alpha \in \mathbb{Z}^2\}$$

Notons que la famille \mathcal{B} n'est pas linéairement indépendante, ce qui pose des problèmes pour l'interpolation ou le lissage classiques, mais pas pour les QIs définis ci-dessous.

3.1 Quasi-interpolant discret

Soit Δf le laplacien de f . Un *premier* QI de type *différentiel* [28] est défini par

$$Qf = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^2} \left\{ f(\alpha) - \frac{1}{8} \Delta f(\alpha) \right\} B_\alpha.$$

A partir des représentations des monômes $e_{rs}(x) = x_1^r x_2^s$ de \mathbb{P}_2 en fonction des B-splines :

$$\begin{aligned} e_{00} &= \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^2} B_\alpha, & e_{10} &= \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^2} \alpha_1 B_\alpha, & e_{01} &= \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^2} \alpha_2 B_\alpha, & e_{11} &= \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^2} \alpha_1 \alpha_2 B_\alpha, \\ e_{20} &= \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^2} \left(\alpha_1^2 - \frac{1}{4} \right) B_\alpha, & e_{02} &= \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^2} \left(\alpha_2^2 - \frac{1}{4} \right) B_\alpha, \end{aligned}$$

on vérifie que Q est *exact sur \mathbb{P}_2* , i.e. $Qp = p$ pour tout $p \in \mathbb{P}_2$. A partir de ce QI différentiel, on peut définir un QI *discret* et un QI *intégral* qui sont aussi exacts sur \mathbb{P}_2 .

QUASI-INTERPOLANTS SPLINES

Comme à une variable, pour construire le QI discret Q^* , on remplace $\Delta f(\alpha)$ par le schéma aux différences classique à 5 points, centré au point α :

$$\Delta^* f(\alpha) = -4f(\alpha) + \frac{1}{8} \sum_{i=1}^2 [f(\alpha + \varepsilon_i) + f(\alpha - \varepsilon_i)],$$

qui vérifie

$$\Delta^* p(\alpha) = \Delta p(\alpha), \quad \forall p \in \mathbb{P}_2.$$

Le QI discret associé s'écrit alors :

$$Q^* f = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^2} \mu_\alpha^*(f) B_\alpha, \quad \text{où } \mu_\alpha^*(f) = \frac{3}{2} f(\alpha) - \frac{1}{8} \sum_{i=1}^2 [f(\alpha + \varepsilon_i) + f(\alpha - \varepsilon_i)].$$

On démontre que $\|Q^*\|_\infty = 1.5$, par conséquent l'ordre d'approximation est égal à 3. En effet, si l'on pose $d_T(f, \mathbb{P}_2) = \inf\{|f - p|_{\infty, T} : p \in \mathbb{P}_2\}$ dans chaque triangle T de la triangulation, on a :

$$|Q^* f - f|_{\infty, T} \leq (1 + \|Q^*\|_\infty) d_T(f, \mathbb{P}_2) = 2.5 d_T(f, \mathbb{P}_2).$$

Comme à une variable, on constate que $Q^* f$ est très proche de la meilleure approximation uniforme de f dans chaque triangle. Donc si $\text{diam}(T) \leq h$ pour tout $T \in \tau$ et si f est par exemple de classe C^3 , on a, comme à la fin de la section 2.1 :

$$|Q^* f - f|_\infty = O(h^3).$$

3.2 Quasi-interpolant intégral

On peut également construire un QI intégral \bar{Q} en utilisant les moments d'ordre ≤ 2 de la spline B_α :

$$m_\alpha^{(0,0)} = \int B_\alpha = 1, \quad m_\alpha^{(1,1)} = \int x_1 x_2 B_\alpha = \alpha_1 \alpha_2,$$

$$m_\alpha^{\varepsilon_r} = \int x_r B_\alpha = \alpha_r, \quad m_\alpha^{2\varepsilon_r} = \int x_r^2 B_\alpha = \alpha_r^2 + \frac{1}{4}, \quad r = 1, 2.$$

On définit alors \bar{Q} par l'expression

$$Qf = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^2} \langle f, \bar{B}_\alpha \rangle B_\alpha,$$

\bar{B}_α étant la combinaison linéaire

$$\bar{B}_\alpha = 2B_\alpha - \frac{1}{4} \{B_{\alpha-\varepsilon_2} + B_{\alpha-\varepsilon_1} + B_{\alpha+\varepsilon_1} + B_{\alpha+\varepsilon_2}\}.$$

QUASI-INTERPOLANTS SPLINES

On vérifie alors facilement que \bar{Q} est exact sur \mathbb{P}_2 et que $\|\bar{Q}\|_\infty \leq 3$. De plus, \bar{Q} est local car le coefficient de B_α n'utilise que des moyennes locales pondérées de f dans la réunion des supports des 5 box-splines centrés au point α et en ses 4 voisins immédiats. Ces moyennes sont toutes du type

$$\int B_\gamma f$$

et peuvent être approchées par les formules de quadratures de Gauss associées au poids B_γ . On obtient ainsi de nouvelles familles de QI discrets basés sur les points de Gauss.

4. Application : approximation d'une fonction et de ses dérivées en dimension 2

On va utiliser le QI quadratique discret de f sur \mathbb{R}^2 vu à la section 3.1 :

$$Q^* f = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^2} \mu_\alpha^*(f) B_\alpha, \quad \text{où } \mu_\alpha^*(f) = \frac{3}{2} f(\alpha) - \frac{1}{8} \sum_{i=1}^2 [f(\alpha + \varepsilon_i) + f(\alpha - \varepsilon_i)]$$

pour approcher une fonction et ses dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à 2. On rappelle que Q^* est exact sur \mathbb{P}_2 , et que $\|Q\|_\infty = 1.5$.

Dans cette section, on utilise les notations suivantes pour les dérivées partielles de f et de son approximant $g = Q^* f$:

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

$$\pi = \frac{\partial g}{\partial x}, \quad \chi = \frac{\partial g}{\partial y}, \quad \rho = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}, \quad \sigma = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}, \quad \tau = \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}.$$

La norme utilisée est toujours la norme du max et l'on note $\|D^3 f\|$ la plus grande norme des quatre dérivées partielles d'ordre 3.

4.1. Estimations d'erreurs

Si $f \in C^3(\mathbb{R}^2)$, on peut démontrer les estimations d'erreurs suivantes [22].

Pour la fonction et ses dérivées partielles premières et secondes, on obtient

$$\|f - Qf\| \leq \frac{19}{48} h^3 \|D^3 f\|, \quad \|p - \pi\|, \|q - \chi\| \leq \frac{17}{4} h^2 \|D^3 f\|,$$

$$\|r - \rho\|, \|s - \sigma\|, \|t - \tau\| \leq \frac{41}{4} h \|D^3 f\|.$$

QUASI-INTERPOLANTS SPLINES

Les constantes indiquées ne sont pas les constantes optimales, mais elles en donnent un ordre de grandeur, qui est raisonnable.

4.2 Majorations des dérivées partielles d’ordres 1 et 2 de Q^*f

En calculant les dérivées partielles d’ordre 1 de Q^*f respectivement aux sommets et aux centres des carrés (elles sont affines par triangle), on obtient les majorations suivantes :

$$\|\pi\| \text{ et } \|\chi\| \leq 2 \max\{\|p\|, \|q\|\}.$$

En calculant les dérivées partielles d’ordre 2 de Q^*f dans chaque triangle de la triangulation (elles sont constantes par triangle), on obtient les majorations suivantes :

$$\|\rho\|, \|\sigma\|, \|\tau\| \leq \frac{25}{8} \max\{\|r\|, \|s\|, \|t\|\}$$

Ceci montre que le QI ne déforme pas excessivement la fonction f qu’il approche.

4.3 Superconvergence en certains points

Supposons que la fonction f ait des dérivées partielles d’ordre 4 bornées. On a alors des développements asymptotiques du type suivant, au *centre*, aux *sommets* et aux *milieux des côtés* d’un carré du réseau :

$$f - Qf = O(h^4)$$

Comme l’erreur est en général en $O(h^3)$, on a donc un phénomène de *superconvergence* en ces points.

En revanche, pour les dérivées partielles premières, on n’a pas ce phénomène aux mêmes points, mais il est probable qu’il se produise en certains points intérieurs du carré.

De nouveau, pour les dérivées partielles secondes, on a quelques phénomènes de *superconvergence*. Considérons le carré $\Omega_h = [-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}]$ subdivisé par ses diagonales en quatre carrés Nord (N), Sud (S), Est (E) et Ouest (W). Par exemple, pour les dérivées partielles $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ sur les triangles (N) et (S), on obtient :

$$(r - \rho)|_N = (r - \rho)|_S = \frac{h^2}{24} D^{40} f(0) + O(h^4)$$

Sur les triangles (E) et (W), en posant $e_{20}|_E = (r - \rho)|_E$ et $e_{20}|_W = (r - \rho)|_W$, on obtient

$$e_{20}|_E = \frac{h}{2} [D^{30} f(0) - D^{12} f(0)] + O(h^2), \quad e_{20}|_W = \frac{h}{2} [-D^{30} f(0) + D^{12} f(0)] + O(h^2),$$

d'où une *superconvergence* pour la moyenne :

$$\frac{1}{2}(e_{20}|E + e_{20}|W) = O(h^2).$$

On a des résultats analogues pour les autres dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$.

5. Un algorithme pour la détermination des points stationnaires de $g = Q^* f$

Compte tenu des résultats ci-dessus sur l'approximation des dérivées de f par celles de $Q^* f$, on propose l'algorithme suivant pour la *recherche des points stationnaires* de $Q^* f$ qui sont à priori voisins des points stationnaires de f (quelques exemples sont donnés dans [?]).

- Calculer $\pi = \frac{\partial g}{\partial x}$ et $\chi = \frac{\partial g}{\partial y}$ aux sommets de la triangulation \mathcal{T} . Ces deux fonctions sont continues et *affines par morceaux*.
- Sélectionner le sous-ensemble $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$ des triangles dans lesquels la *somme des signes* de π (par exemple) est ± 1
- Sélectionner le sous-ensemble $\mathcal{T}'' \subset \mathcal{T}'$ des triangles dans lesquels la *somme des signes* de χ est ± 1
- Dans chaque triangle de \mathcal{T}'' , résoudre le système d'équations linéaires $\pi = \chi = 0$.

On obtient ainsi les *points stationnaires* du quasi-interpolant $g = Q^* f$.

On peut alors faire une étude locale plus précise dans chaque triangle de la triangulation \mathcal{T}'' où se trouve un point stationnaire (on rappelle que les d.p. secondes ρ, σ et τ de g sont *constantes* dans chaque triangle) :

- Etudier le signe de $H = \sigma^2 - \rho\tau$.
 - * si $H < 0$, et si $\rho > 0$ (donc $\tau > 0$), alors g a un *minimum local*.
 - * si $H < 0$, et si $\rho < 0$ (donc $\tau < 0$), alors g a un *maximum local*.
 - * si $H \geq 0$, on a un *point-selle* ou un *point dégénéré*.

- **Remarque :** on peut évidemment permuter les rôles de π et χ dans l'algorithme.

6. Application : quadrature en dimension 1 associée à un QI quadratique discret

Supposons pour simplifier que $I = [a, b] = [0, nh]$ On pose $t_{-2} = t_{-1} = a, t_i = ih$ pour $0 \leq i \leq n, t_{n+1} = t_{n+2} = b; \theta_i = \frac{1}{2}(t_{i-1} + t_i)$, pour $1 \leq i \leq n, \theta_0 = a, \theta_{n+1} = b$ (les noeuds confondus permettent de définir les B-splines quadratiques aux extrémités de I , cf [3][9][26]). Les données sont les $f_i = f(\theta_i), 0 \leq i \leq n + 1$. Le QI discret Q^* s'écrit alors, dans le cas d'un intervalle borné, sous la forme :

$$Q^* f = f_0 B_0 + \sum_{k=1}^n \mu_k^*(f) B_k + f_{n+1} B_{n+1}, \quad \text{où}$$

$$\mu_1^*(f) = \frac{1}{6}h(-2f_0 + 9f_1 - f_2), \quad \mu_n^*(f) = \frac{1}{6}h(-f_{n-1} + 9f_n - 2f_{n+1}),$$

$$\text{et } \mu_k^*(f) = \frac{1}{8}h(-f_{k-1} + 10f_k - f_{k+1}) \quad \text{pour } 2 \leq k \leq n - 1.$$

Une bonne approximation de $\mathcal{I}(f) = \int_a^b f$ est donnée par $\mathcal{I}_2^*(f) = \int_a^b Q^* f$ qui donne la nouvelle formule de quadrature suivante, pour $n \geq 5$:

$$\mathcal{I}_2^*(f) = \int_a^b Q^* f = \frac{h}{9}f_0 + \frac{7h}{8}f_1 + \frac{73h}{72}f_2 + h \sum_{i=3}^{n-2} f_i + \frac{73h}{72}f_{n-1} + \frac{7h}{8}f_n + \frac{h}{9}f_{n+1}.$$

On démontre alors [34] qu'il existe $C_1 > 0$ tel que, pour tout $f \in C^4(I)$:

$$\mathcal{I}(f) - \mathcal{I}_2^*(f) = C_1 h^4 f^{(4)}(\gamma_1), \quad \gamma_1 \in I.$$

Cette formule est "complémentaire" de la formule de Simpson (à $n + 1$ points) notée $\mathcal{I}_2(f)$. Pour celle-ci, on sait qu'il existe $C_2 > 0$ tel que, pour tout $f \in C^4(I)$:

$$\mathcal{I}(f) - \mathcal{I}_2(f) = -C_2 h^4 f^{(4)}(\gamma_2), \quad \gamma_2 \in I.$$

Bien que $\gamma_1 \neq \gamma_2$ en général, en pratique on observe que les erreurs sont presque toujours de signes opposés. De plus, les constantes vérifient $0 < C_1 < C_2 = \frac{1}{180}$. Enfin, la formule extrapolée (notez la jolie symétrie des coefficients) :

$$\tilde{\mathcal{I}}_2(f) = \frac{1}{55}(32\mathcal{I}_2^*(f) + 23\mathcal{I}_2(f)),$$

donne une erreur $\mathcal{I}(f) - \tilde{\mathcal{I}}_2(f) = O(h^5)$. Les essais numériques (sur des fonctions régulières) confirment les résultats ci-dessus, en particulier les signes opposés des erreurs dans la majorité des exemples (cf [33][36][37]).

7. Calculs de dérivées et méthodes pseudo-spectrales

En dérivant $g = Q^* f$, et en posant $g'_i = g(\theta_i), 0 \leq i \leq n + 1$, on obtient les formules de dérivation suivantes.

$$hg'_0 = \frac{1}{3}(-8f_0 + 9f_1 - f_2), \quad hg'_1 = \frac{1}{48}(-56f_0 + 33f_1 + 26f_2 - 3f_3),$$

$$hg'_2 = \frac{1}{48}(-8f_0 + 36f_1 + f_2 - 3f_3),$$

et des formules symétriques pour hg'_{n-1} , hg'_n et hg'_{n+1} . Pour les *points intérieurs*, i.e. pour $3 \leq i \leq n-2$, on a :

$$hg'_i = \frac{1}{16}(f_{i-2} - 10f_{i-1} + 10f_{i+1} - f_{i+2}).$$

Il existe donc une *matrice de dérivation* (pseudo-)spectrale \mathcal{D} (cf [33][37]), de taille $n+2$ et de coefficients $\mathcal{D}(i, j) = B'_j(\theta_i)$, qui au vecteur $y \in \mathbb{R}^{n+2}$ de composantes $y_i = f(\theta_i)$ associe le vecteur « (pseudo-)dérivée » $y' \in \mathbb{R}^{n+2}$ de composantes $y'_i = g'(\theta_i)$:

$$y' = \mathcal{D}y.$$

(les dérivées successives sont donc obtenues à l'aide des puissances de \mathcal{D}).

Supposons f suffisamment dérivable, on obtient alors les erreurs suivantes : pour $3 \leq i \leq n-2$, $g'_i - f'_i = \frac{h^2}{24}f_i^{(3)} + O(h^4)$; à l'origine $g'_0 - f'_0 = -\frac{h^2}{8}f_0^{(3)} + O(h^3)$ et au premier point intérieur $g'_1 - f'_1 = \frac{h^2}{32}f_1^{(3)} + O(h^3)$. On a des résultats analogues à la borne supérieure de l'intervalle, pour $g'_n - f'_n$ et $g'_{n+1} - f'_{n+1}$.

On peut utiliser la matrice de dérivation \mathcal{D} pour résoudre un problème aux limites, par exemple de type Dirichlet, sur l'intervalle I (voir[33] pour d'autres degrés et [10] et [16] pour des exemples de méthodes pseudo-spectrales basées sur des polynômes ou des fonctions trigonométriques).

8. Application : recherche de zéros

On peut approcher les zéros de f par ceux de $g = Q^*f$ qui sont calculables exactement car g est quadratique par morceaux. Voir [33] ou [37] pour un exemple.

9. Extensions diverses

Le présent survol n'est qu'une introduction aux QI quadratiques en dimensions 1 et 2, sur des partitions uniformes, et à quelques-unes de leurs applications. Pour les extensions à d'autres degrés et à des partitions non uniformes, on peut consulter par exemple les livres généraux [2][4][6][7][9][15], les survols [18][19][31][32][34] et les articles [[22][24][39]. Plus récemment, nous avons défini des QI à deux variables sur des triangulations quelconques de type Powell-Sabin [27][25] en utilisant les B-splines introduites par Dierckx [21].

Références

[1] Abréviations : éditeurs, journaux

AdCM=Advances in Comput. Math. (journal).
AKP=A.K. Peters.
AMS=American Mathematical Society.
ATA=Approximation Theory & Applications, ou Analysis, Theory & Applications (journal).
BC=Brooks/Cole, Pacific Grove.
BV=Birkhäuser Verlag, Basel.
CAGD=Comput. Aided Geom. Design (journal).
CMS=Canadian Mathematical Society.
CUP=Cambridge University Press.
H=Hermann, Paris.
IMAJNA=IMA J. Numer. Anal. (journal).
IRMAR=Institut de Recherche Mathématique de Rennes.
ISNM=International Series of Numerical Mathematics (BV).
JAT=J. of Approx. Theory (journal).
JWS=John Wiley & Sons,
K=Kluwer, Dordrecht.
MK=Morgan Kaufmann, San Francisco.
OUP=Oxford University Press.
SIAM=Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia,
SV=Springer-Verlag, Berlin.

Traité généraux

- [2] Bojanov et al. : *Spline functions and multivariate interpolation*, K 1993.
- [3] de Boor : *A practical guide to splines* (revised edition), SV 2001.
- [4] de Boor, Höllig, S. Riemenschneider : *Box-splines*. SV 1993.
- [5] Buhmann : *Radial basis functions*. CUP 2003.
- [6] Cheney, Light : *A course in approximation theory*. BC 2000.
- [7] Chui : *Multivariate splines*, SIAM 1988.
- [8] Chui : *Wavelets, a mathematical tool for signal analysis*. SIAM 199
- [9] DeVore et Lorentz : *Constructive approximation*. SV 1993.
- [10] Fornberg : *A practical guide to pseudospectral methods*. CUP 1998.
- [11] Gautschi : *Orthogonal polynomials*. OUP 2004.

QUASI-INTERPOLANTS SPLINES

- [12] Micchelli : *Mathematical aspects of geometric modeling*, SIAM 1995.
- [13] Powell : *Approximation theory and methods*. CUP 1981.
- [14] Schoenberg : *Cardinal spline interpolation*, SIAM 1973.
- [15] Schumaker : *Spline functions, basic theory*. JWS 1981.
- [16] Trefethen : *Spectral methods in Matlab*. SIAM 2000.
- [17] Warren et Weimer : *Subdivision methods for geometric design*. MK 2002.

Articles et survols

- [18] de Boor : Splines as linear combinations of B-splines. In *Approximation Theory II*, (Eds G.G. Lorentz et al.), AP (1976) 1-47.
- [19] de Boor : Quasi-interpolants and approximation power of multivariate splines. In *Computation of curves and surfaces* (Eds W. Dahmen et al.), K (1990) 313-345.
- [20] Chui, Schumaker, Wang, On spaces of piecewise polynomials with boundary conditions III. Type II triangulations. In : *CMS Conference Proceedings*, Vol. 3 (1983), 67-80,
- [21] Dierckx : On calculating normalized Powell-Sabin B-splines. *CAGD* 15 (1997) 61-78.
- [22] Foucher et Sablonnière : Approximating partial derivatives of first and second order by quadratic spline quasi-interpolants. Congrès MAMERN, Oujda, Maroc, 9-11 mai 2005. Prépublication IRMAR en préparation.
- [23] Jeeawock-Zedek : Interpolation de Lagrange par des splines quadratiques sur un quadrilatère de \mathbb{R}^2 . *M²AN* 26, No 5 (1992) 575-594.
- [24] Lyche et Schumaker : Local spline approximation methods. *JAT* 15 (1975) 294-325.
- [25] Manni et Sablonnière : Quadratic spline quasi-interpolants on Powell-Sabin partitions. A paraître dans *AdCM* (2005).
- [26] Powell : Piecewise quadratic surface fitting for contour plotting. In *Software for numerical mathematics*, (Ed D.J. Evans), AP (1974) 253-271.
- [27] Powell et Sabin : Piecewise quadratic approximation on triangles. *ACM Trans. Math. Software* 3 (1977) 316-325.
- [28] Sablonnière : Bases de Bernstein et approximants splines. Thèse, Lille, 1982.
- [29] Sablonnière : Bernstein-Bézier methods for the construction of bivariate spline approximants, *CAGD* 2 (1985), 29-36.

QUASI-INTERPOLANTS SPLINES

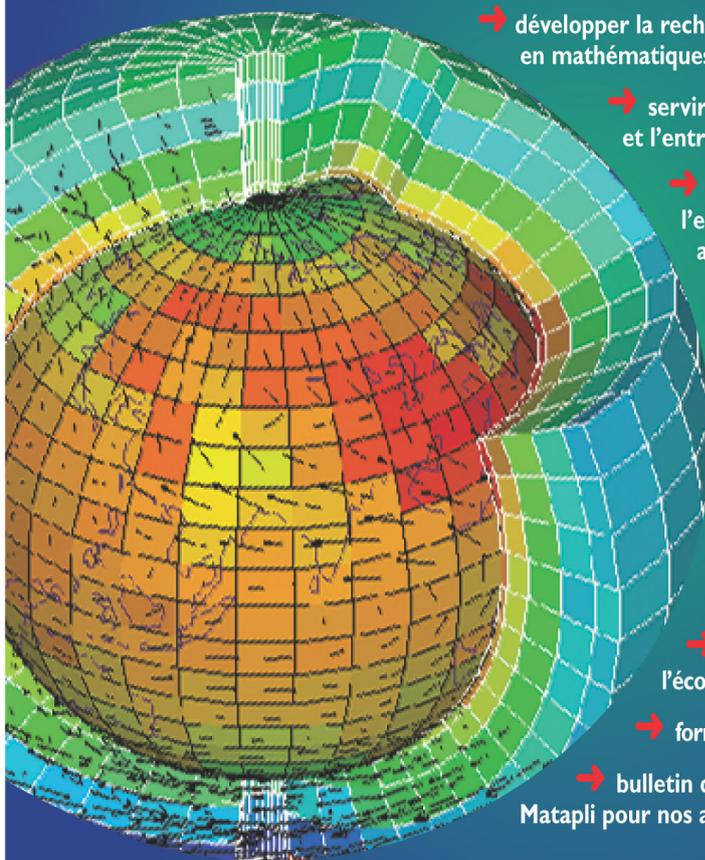
- [30] Sablonnière : Error bounds for Hermite interpolation by quadratic splines on an alpha-triangulation. IMAJNA 7 (1987) 495-508.
- [31] Sablonnière : On some multivariate quadratic spline quasi-interpolants on bounded domains, in : *Modern developments in multivariate approximation* (Eds. Hausmann et al.), ISNM 145, BV (2003) 263-278.
- [32] Sablonnière : Quadratic spline quasi-interpolants on bounded domain of R^d , $d = 1, 2, 3$, Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino 61 (2003), 229-246.
- [33] Sablonnière : Univariate spline quasi-interpolants and applications to numerical analysis. Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino 63 (2005) 107-118.
- [34] P. Sablonnière : Recent progress on univariate and multivariate polynomial and spline quasi-interpolants. In *Trends and applications in constructive approximation*, (Eds M.G. de Bruijn et al.). ISNM 151, BV (2005) 229-245.
- [35] Sablonnière : Refinement equation and subdivision algorithm for quadratic B-splines on non-uniform criss-cross triangulations . In proceedings of *International Conference on Wavelets and Splines*, St Petersburg (July 3-8, 2003). St Petersburg University Press (2005) 84-102.
- [36] Sablonnière : A quadrature formula associated with a quadratic spline quasi-interpolant. Prépublication IRMAR, Décembre 2005.
- [37] Sablonnière : Quasi-interpolants splines : exemples et applications. Congrès RFMAO, Rabat (19-21 septembre 2005). Prépublication IRMAR, Décembre 2005.
- [38] Sablonnière, F. Jeeawock-Zedek : Hermite and Lagrange interpolation by quadratic splines on nonuniform criss-cross triangulations. In *Curves and surfaces*, (Eds Laurent et al.) AKP (1991) 445-452.
- [39] Sablonnière et Sbibih : Spline integral operators exact on polynomials. ATA 10, No 3 (1994) 56-73.

SOCIÉTÉ de MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES et INDUSTRIELLES

SMAI

NOS OBJECTIFS :

- développer la recherche en mathématiques appliquées
- servir d'interface entre l'université et l'entreprise
- contribuer à la réflexion sur l'enseignement des mathématiques appliquées à tous les niveaux



NOS ACTIVITÉS :

- édition scientifique : collection de livres Mathématiques et applications, revues Esaim : COCV, P & S, Proc et M2AN
- organisation de congrès, rencontres et journées industrielles
- en liaison avec le monde industriel, l'école d'été du CEMRACS
- formation continue
- bulletin de liaison Matapli pour nos adhérents



SMAI - Institut Henri Poincaré

11, rue Pierre et Marie Curie - 75 231 Paris Cedex 05 - Tél : 01 44 27 66 62 - Fax : 01 44 07 03 64

<http://smi.emath.fr>

Mathématiques & Applications

Collection de la SMAI éditée par Springer-Verlag

Directeurs de la collection : M. Benaïm et J.-M. Thomas

- Vol. 28 C. Coccozza-Thivent, *Processus stochastiques et fiabilité des systèmes*, 1997, 436 pp., 79,95 €- tarif SMAI : 63,96 €
- Vol. 29 B. Lapeyre, E. Pardoux, R. Sentis, *Méthodes de Monte-Carlo pour les équations de transport et de diffusion*, 1997, 178 pp., 32,95 €- tarif SMAI : 26,36 €
- Vol. 30 P. Sagaut, *Introduction à la simulation des grandes échelles pour les écoulements des fluides incompressibles*, 1998, 282 pp., 53,95 €- tarif SMAI : 43,16 €
- Vol. 31 E. Rio, *Théorie asymptotique des processus aléatoires faiblement dépendants*, 2000, 170 pp., 34,95 €- tarif SMAI : 27,96 €
- Vol. 32 P. Cazes, J. Moreau, P.A. Doudin, *L'analyse des correspondances et les techniques connexes*, 2000, 265 pp., 47,95 €- tarif SMAI : 38,36 €
- Vol. 33 B. Chalmond, *Éléments de modélisation pour l'analyse d'images*, 2000, 331 pp., 63,95 €- tarif SMAI : 51,16 €
- Vol. 34 J. Istas, *Introduction aux modélisations mathématiques pour les sciences du vivant*, 2000, 160 pp., 29,95 €- tarif SMAI : 23,96 €
- Vol. 35 P. Robert, *Réseaux et files d'attente : méthodes probabilistes*, 2000, 386 pp., 63,95 €- tarif SMAI : 51,16 €
- Vol. 36 A. Ern, J.- L. Guermond, *Éléments finis : théorie, applications, mise en œuvre*, 2002, 430 pp., 74,95 €- tarif SMAI : 59,96 €
- Vol. 37 S. Sorin, *A first course on zero-sum repeated games*, 2002, 204 pp., 37,93 €- tarif SMAI : 30,34 €
- Vol. 38 J.F. Maurras, *Programmation Linéaire, Complexité, Séparation et Optimisation*, 2002, 221 pp., 42,95 €- tarif Smai : 34,36 €
- Vol. 39 B. Ycart, *Modèles et Algorithmes Markoviens*, 2002, 272 pp., 47,95 €- tarif SMAI : 38,36 €
- Vol. 40 B. Bonnard, M. Chyba, *Singular Trajectories and their Role in Control Theory*, 2003, 357 pp., 68,52 €- tarif SMAI : 54,82 €
- Vol. 41 A.B. Tsybakov, *Introduction à l'estimation non- paramétrique*, 203, 175 pp., 34,95 €- tarif SMAI : 27,95 €
- Vol. 42 J. Abdeljaoued, H. Lombardi, *Méthodes matricielles - Introduction à la complexité algébrique*, 2004, 377 pp., 68,95 €- tarif SMAI : 55,16 €
- Vol. 43 U. Boscain, B. Piccoli, *Optimal Syntheses for Control Systems on 2-D Manifolds*, 2004, 261 pp., 52,70 €- tarif SMAI : 42,16 €
- Vol. 44 L. Younes, *Invariance, déformations et reconnaissance de formes*, 2004, 248 pp., 47,95 €- tarif SMAI : 38,36 €

- Vol. 45 C. Bernardi, Y. Maday, F. Rapetti, *Discrétisations variationnelles de problèmes aux limites elliptiques*, 2004, 310 pp., 57,95 €- tarif SMAI : 46,36 €
- Vol. 46 J.P. François, *Oscillations en biologie. Analyse qualitative et modèles*, 2005, 179 pp., 35,95 €- tarif SMAI : 28,76€
- Vol. 47 C. Le Bris, *Systèmes multi-échelles. Modélisation et simulation*, 2005, 212 pp., 45,95 €- tarif SMAI : 36,76 €
- Vol. 48 A. Henrot, M. Pierre, *Variation et optimisation de formes. Une analyse géométrique*, 2005, 334 p., 62,95 € - tarif SMAI : 50,36 €
- Vol. 49 B. Bidégaray-Fesquet, *Hiérarchie de modèles en optique quantique. De Maxwell-Bloch à Schrodinger non-linéaire*, 2006, 175 p., 34,95 € - tarif SMAI : 27,96 €
- Vol. 50 R. Dager, E. Zuazua, *Wave Propagation, Observation and Control in 1 - d Flexible Multi-structures*, 2006, 221 p., 42,15 € tarif SMAI : 33,72 €
- Vol. 51 B. Bonnard, L. Faubourg, E. Trélat, *Mécanique céleste et contrôle des véhicules spatiaux*, 2006, 276 p., 54,95 € - tarif SMAI : 43,96 €
- Vol. 52 F. Boyer, P. Fabrie, *Eléments d'analyse pour l'étude de quelques modèles d'écoulements de fluides visqueux incompressibles*, 2006, 400 p., à paraître en décembre 2005,
- Vol. 53 E. Cancès, C. Le Bris, Y. Maday, *Méthodes Mathématiques en Chimie Quantique. Une Introduction*, 2006, 425 p., à paraître en février 2006,
- Vol. 54 J. P. Dedieu, *Points Fixes, Zéros et la Méthode de Newton*, 2006, 165 p., à paraître en mars 2006,
- Vol. 55 P. Lopez, A. S. Nouri, *Théorie Élémentaire et Pratique de la Commande par les Régimes Glissants*, 2006, 420 p., à paraître en mars 2006,
- Vol. 56 J. Cousteix, J. Mauss, *Analyse Asymptotique et Couche Limite*, 2006, 430 p., à paraître en février 2006,

Le tarif SMAI (20% de réduction) et la souscription (30% sur le prix public) sont réservés aux membres de la SMAI.

Pour obtenir l'un de ces volumes, adressez votre commande à :

Springer-Verlag, Customer Service Books -Haberstr. 7

D 69126 Heidelberg/Allemagne

Tél. 0 800 777 46 437 (No vert) - Fax 00 49 6221 345 229 - e-mail : orders@springer.de

Paiement à la commande par chèque à l'ordre de Springer-Verlag ou par carte de crédit (préciser le type de carte, le numéro et la date d'expiration).

Prix TTC en France (5,5% TVA incl.). Au prix des livres doit être ajoutée une participation forfaitaire aux frais de port : 5 €(+ 1,50 €par ouvrage supplémentaire).

Théorie des Jeux : le prix Nobel pour les travaux de R.J. Aumann

par Françoise FORGES¹, Jérôme RENAULT¹, Sylvain SORIN² et Nicolas VIEILLE³

1- CEREMADE, Université Paris-Dauphine

2- Equipe Combinatoire et Optimisation, Université P. et M. Curie - Paris 6 et
Laboratoire d'Econométrie, Ecole Polytechnique

3- Département Economie et Finance, HEC

Francoise.Forges@dauphine.fr, renauld@ceremade.dauphine.fr,
sorin@math.jussieu.fr, vieille@hec.fr

Robert Aumann a apporté une contribution fondamentale à la théorie des jeux - *a method used to analyze strategic interaction among different agents* - dans de nombreux domaines. Le comité Nobel dans ses attendus - *Contributions to Game Theory : Analyses of Conflict and Cooperation* - en souligne plusieurs, - *Robert Aumann's primary contribution consists of using the tools of mathematical analysis to develop concepts and hypotheses, provide them with concise formulations and draw precise conclusions* - qui sont présentés ici : jeux répétés à information complète (J. Renault), jeux répétés à information incomplète (S. Sorin), équilibres corrélés (F. Forges), connaissance commune (N. Vieille).

Ces textes sont la version écrite d'exposés prononcés lors de la session spéciale en l'honneur d' Aumann du *Séminaire Parisien de Théorie des Jeux*, organisée par F. Koessler, R. Laraki, D. Rosenberg et T. Tomala, le 12 Décembre 2005 à l'Institut Henri Poincaré.

1. Les Folk théorèmes

Les Folk théorèmes s'intéressent à la répétition, par des joueurs patients, d'un jeu de base donné. Dans le modèle simple présenté ici (dit d'observation standard), ils disent essentiellement ceci : *l'ensemble des paiements d'équilibres du jeu répété est l'ensemble des paiements réalisables (i.e. que l'on peut obtenir en jouant) et individuellement rationnels (i.e. tels que chaque joueur a au moins son paiement de punition).*

1.1. Le modèle

On considère un jeu de base fixé $G = (N, (A^i)_{i \in N}, (g^i)_{i \in N})$. N est l'ensemble des joueurs. Pour chaque joueur i de N , A^i est l'ensemble d'actions du joueur i et g^i est une application du produit cartésien $A = \prod_{j \in N} A^j$ dans \mathbb{R} , donnant le paiement du joueur i . On suppose G fini : les ensembles N et A^i sont alors finis (et non vides). On s'intéresse à la répétition en temps discret, un grand nombre ou une infinité de fois, du jeu de base. Ce dernier est connu des joueurs. A chaque étape les joueurs choisissent (éventuellement de manière aléatoire) simultanément chacun une action dans leur ensemble d'actions, puis ces actions sont observées publiquement avant de passer à l'étape suivante.

Donnons quelques notations. A est l'ensemble des profils d'actions, $g = (g^i)_{i \in N}$ est la fonction de paiement vectoriel et $\Delta(A)$, resp. $\Delta(A^i)$, est l'ensemble des probabilités sur A , resp. sur A^i . On notera aussi g , resp. g^i , l'extension mixte (c'est-à-dire multilinéaire, ou en espérance) de g , resp. g^i . Rappelons qu'un équilibre de Nash en stratégies mixtes de G est un profil $x = (x^i)_{i \in N}$ dans $\prod_{i \in N} \Delta(A^i)$ tel qu'aucun joueur n'a de déviation strictement profitable, i.e. $\forall i \in N, \forall y^i \in \Delta(A^i)$, $g^i(y^i, x^{-i}) \leq g^i(x)$ (l'indice $-i$ désignant l'ensemble des joueurs autres que i). Dans le jeu répété, l'ensemble des histoires de longueur t est l'ensemble H_t des t -uplets (a_1, \dots, a_t) d'éléments de A , H_0 étant le singleton $\{\emptyset\}$. L'ensemble de toutes les histoires est $H = \cup_{t \geq 0} H_t$, et H_∞ désigne l'ensemble des parties du jeu répété, i.e. des suites (a_1, \dots, a_t, \dots) d'éléments de A .

Une stratégie (dite de comportement) du joueur i dans le jeu répété est une application σ^i de H dans $\Delta(A^i)$. Pour h dans H_t , $\sigma^i(h)$ désigne la probabilité sur A^i jouée par le joueur i en date $t + 1$ si h a été jouée aux dates $1, \dots, t$. On note Σ^i l'ensemble des stratégies du joueur i et $\Sigma = \prod_{i \in N} \Sigma^i$ l'ensemble des profils de stratégies. Un profil de stratégies σ induit alors naturellement une probabilité sur l'ensemble des parties H_∞ (muni de la tribu produit), les tirages aléatoires effectués par les joueurs à chaque étape après une histoire donnée étant indépendants. Passons maintenant à l'évaluation des paiements dans le jeu répété.

Le paiement moyen espéré d'un joueur i jusqu'à une étape $T \geq 1$ est (a_t désignant la variable aléatoire du profil d'actions joué en date t) :

$$\gamma_T^i(\sigma) = \mathbb{E}_\sigma \left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T g^i(a_t) \right).$$

Le jeu (finiment) répété T fois est par définition le jeu $G_T = (N, (\Sigma^i)_{i \in N}, (\gamma_T^i)_{i \in N})$. On peut aussi considérer des paiements escomptés. Pour λ dans $(0, 1]$, le jeu escompté au taux λ est $G_\lambda = (N, (\Sigma^i)_{i \in N}, (\gamma_\lambda^i)_{i \in N})$, où pour tout profil de stratégies

LE PRIX NOBEL POUR LES TRAVAUX DE R.J. AUMANN

σ :

$$\gamma_\lambda^i(\sigma) = \mathbb{E}_\sigma \left(\lambda \sum_{t=1}^{\infty} (1-\lambda)^{t-1} g^i(a_t) \right).$$

Considérer $T = 1$ ou $\lambda = 1$ revient à considérer le jeu « en un coup » G . On s'intéresse ici aux aspects stratégiques de long terme, donc on considérera T grand ou λ proche de zéro. On peut aussi s'affranchir de tout paramètre exogène T ou λ (que les joueurs eux mêmes ne connaissent pas forcément), en définissant directement une notion d'équilibre de long terme dans le jeu infiniment répété G_∞ . On contourne le fait que $\lim_T \gamma_T^i(\sigma)$ peut ne pas exister pour certaines stratégies, en disant qu'un profil de stratégies σ est un équilibre (dit uniforme) de G_∞ si :

- 1) $\forall \varepsilon > 0, \sigma$ est un ε -équilibre de Nash de tout jeu finiment répété assez long, i.e. $\exists T_0, \forall T \geq T_0, \forall i \in N, \forall \tau^i \in \Sigma^i, \gamma_T^i(\tau^i, \sigma^{-i}) \leq \gamma_T^i(\sigma) + \varepsilon$, et
- 2) $((\gamma_T^i(\sigma))_{i \in N})_T$ converge vers un vecteur de \mathbb{R}^N , qui s'appelle alors un paiement d'équilibre (uniforme) de G_∞ .

D'autres définitions d'équilibres sont possibles dans G_∞ (voir Aumann (1959), Sorin (1986), Sorin (1992), pour une présentation des jeux répétés à information complète).

Notons E_∞ l'ensemble des paiements d'équilibres de G_∞ , et E_T (resp. E_λ) l'ensemble des paiements d'équilibres de Nash de G_T (resp. G_λ). On peut appliquer le théorème de Nash/Glicksberg (ensembles de stratégies compacts et convexes, paiements multilinéaires et continus) à G_T et G_λ et en déduire que E_T et E_λ sont compacts non vides. On montre facilement que E_∞ est également compact, et on a pour k dans \mathbb{N}^* : $E_1 \subset E_T \subset E_{kT} \subset E_\infty$, et $E_1 \subset E_\lambda \subset E_{1-(1-\lambda)^{1/k}} \subset E_\infty$.

Les paiements réalisables et individuellement rationnels

On définit l'ensemble des paiements réalisables du jeu comme l'enveloppe convexe de $g(A)$. $\text{conv}g(A) = g(\Delta(A))$ est un polytope qui représente l'ensemble des paiements que l'on peut obtenir dans le jeu répété. Par convexité et compacité, il contient E_∞ (et donc E_T et E_λ).

Pour chaque joueur i de N , on définit le *niveau de punition du joueur i* comme le paiement maximum que peut obtenir ce joueur lorsque les autres joueurs ont décidé publiquement de le punir :

$$v^i = \min_{x^{-i} \in \prod_{j \neq i} \Delta(A^j)} \max_{x^i \in \Delta(A^i)} g^i(x^i, x^{-i}).$$

Remarquons que l'ensemble $\prod_{j \neq i} \Delta(A^j)$ correspond à l'ensemble des probabilités indépendantes jouées par les joueurs autres que i , et que s'il y a au moins 3 joueurs on peut avoir $\min \max \neq \max \min$. v^i s'appelle aussi le *minmax indépendant* du joueur i , et l'ensemble des paiements individuellement rationnels est par définition l'ensemble des paiements tels que chaque joueur a au moins son niveau de punition : $IR = \{u = (u^i)_{i \in N}, u^i \geq v^i \forall i \in N\}$.

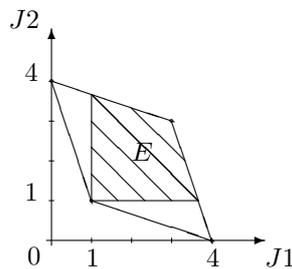
LE PRIX NOBEL POUR LES TRAVAUX DE R.J. AUMANN

Enfin, on note $E = (\text{conv}g(A)) \cap IR$ l'ensemble des paiements réalisables et individuellement rationnels. Etant donné un profil de stratégies σ^{-i} des joueurs autres que i , il est facile de construire, en utilisant le fait que les actions sont observées après chaque étape, une stratégie du joueur i telle que : $\forall T, \gamma_T^i(\sigma^i, \sigma^{-i}) \geq v^i$. On en déduit que E_∞, E_T et E_λ sont des sous-ensembles de E .

L'exemple du « dilemme du prisonnier » :

$$\begin{matrix} & C^2 & D^2 \\ C^1 & (3, 3) & (0, 4) \\ D^1 & (4, 0) & (1, 1) \end{matrix}$$

Il y a deux joueurs, le joueur 1 choisit la ligne, le joueur 2 choisit la colonne, $A^i = \{C^i, D^i\}$ pour tout i , et l'application g est représentée par les couples de la matrice, la première composante (resp. seconde) donnant le paiement du $J1$ (resp. $J2$). On a ici $v^1 = v^2 = 1$, et le seul paiement d'équilibre de Nash de G est $(1,1)$. L'ensemble E est hachuré dans la figure ci-dessous :



1.2. Les Folk théorèmes pour G_∞

Voici une version « du » Folk théorème, ou théorème de la communauté.

Folk théorème.- L'ensemble des paiements d'équilibres de G_∞ est l'ensemble des paiements réalisables et individuellement rationnels : $E_\infty = E$.

A propos de la paternité de ce résultat, citons Aumann (1981) : The Folk theorem « has been generally known in the profession for at least 15 or 20 years, but has not been published ; its authorship is obscure. » On l'appelle encore le théorème du « tout est possible », car il montre qu'à peu près n'importe quel paiement raisonnable peut s'obtenir à l'équilibre.

La preuve est simple. Considérons un paiement u dans E . Comme u est réalisable, il existe une partie $h = (a_1, \dots, a_t, \dots)$ telle que pour tout joueur i ,

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T g^i(a_t) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} u^i.$$

LE PRIX NOBEL POUR LES TRAVAUX DE R.J. AUMANN

Nous appellerons h le plan principal de la stratégie, et jouer selon h pour un joueur i en date t signifie jouer la i -ème composante de a_t . Pour chaque couple de joueurs distincts (i, j) , fixons $x^{i,j}$ dans $\Delta(A^j)$ de façon à ce que $(x^{i,j})_{j \neq i}$ réalise le min dans l’expression de v^i . Fixons maintenant un joueur i dans N , et définissons une stratégie σ^i . σ^i commence en date 1 par jouer selon le plan principal, et continue de jouer selon h tant que tous les autres joueurs le font. Si à une certaine date $t \geq 1$, pour la première fois un joueur j ne joue pas selon le plan principal, alors σ^i joue à toutes les dates ultérieures la probabilité $x^{j,i}$ (si pour la première fois à la même date plusieurs joueurs sortent du plan principal, on punit celui de ces joueurs qui est le plus petit, selon un ordre total sur N préalablement fixé). Il est facile de voir que $\sigma = (\sigma^i)_{i \in N}$ est un équilibre de G_∞ de paiement u . \square

Dans le dilemme du prisonnier, on a par exemple (3,3) dans E_∞ , et l’équilibre ainsi construit est particulièrement simple : commencer et continuer de jouer C^i tant que l’autre joueur j joue C^j ; jouer D^i si l’autre joueur a déjà joué au moins une fois D^j . Dévier à une certaine date rapportera à cette étape 4 au lieu de 3 au joueur i , mais pour ensuite avoir un paiement inférieur à 1 à chaque étape ultérieure.

Certains des équilibres construits via le Folk théorème sont critiqués car rien n’assure qu’un joueur i aura intérêt, le cas échéant, à punir un joueur j qui vient de quitter le plan principal pour la première fois. On peut alors s’intéresser à la notion suivante d’équilibre sous-jeux parfait (ESJP pour aller vite). Etant donné une histoire h de H et un profil de stratégies σ , on définit la stratégie de continuation $\sigma[h]$ comme le profil de stratégies $\tau = (\tau^i)_{i \in N}$, où : $\forall i \in N, \forall h' \in H, \tau^i(h') = \sigma^i(hh')$, où hh' est l’histoire h suivie de h' . Un ESJP de G_∞ est alors défini comme un profil de stratégies σ dans Σ tel que pour toute histoire h dans H , $\sigma[h]$ est un équilibre de G_∞ ; et on note E'_∞ l’ensemble des paiements de ces équilibres. Un équilibre sous-jeux parfait étant un équilibre de G_∞ (prendre $h = \emptyset$), on a : $E'_\infty \subset E_\infty = E$. En 1976, Aumann et Shapley, ainsi que Rubinstein, ont démontré indépendamment, avec de légères différences de formulation (voir les éditions de 1994), que ce raffinement d’équilibre ne changeait en fait absolument rien ici.

Folk théorème parfait. - $E'_\infty = E_\infty = E$.

La preuve se résume là aussi à construire un ESJP à partir d’un paiement réalisable et individuellement rationnel. Par rapport à la preuve du Folk théorème, il faut modifier la phase de punition. L’idée est que si à une certaine date t , les joueurs jouaient selon le plan principal et le joueur j en sort, les joueurs $-j$ se mettent à punir le joueur j jusqu’à une certaine date \bar{t} , puis quoiqu’il arrive tout le monde oublie tout et revient, comme à l’étape 1, au début du chemin principal. Une possibilité est de calculer, à la fin de l’étape t , le nombre \bar{t} de manière à ce que le

LE PRIX NOBEL POUR LES TRAVAUX DE R.J. AUMANN

paiement moyen espéré du joueur j jusqu'à la date \bar{t} , soit inférieur à $v^j + 1/t$. Une autre possibilité est de prendre simplement $\bar{t} = 2t$. \square

1.3. Les Folk théorèmes escomptés

Passons maintenant aux paiements d'équilibres escomptés. Dans le dilemme du prisonnier avec un taux d'escompte $\lambda \in (0, 1]$, réexaminons l'équilibre précédent de G_∞ de paiement $(3, 3)$. Se mettre à jouer D^i pour la première fois peut augmenter à une étape le paiement du joueur i de 1, pour perdre ensuite à chaque étape au moins 2. On aura donc un équilibre de paiement $(3, 3)$ dans G_λ si : $1 \leq 2 \sum_{t=1}^\infty (1-\lambda)^t = 2(1-\lambda)/\lambda$, soit si les joueurs sont suffisamment patients au sens où $\lambda \leq 2/3$. En général, on a toujours $E_\lambda \subset E_\infty = E$, et la question se pose de la convergence (au sens de la distance de Hausdorff) de E_λ vers E .

Le contre-exemple suivant à trois joueurs est dû à Forges, Mertens et Neyman (1986) : $\begin{pmatrix} (1, 0, 0) & (0, 1, 0) \\ (0, 1, 0) & (1, 0, 1) \end{pmatrix}$. Le joueur 1 choisit la ligne, le joueur 2 choisit la colonne et le joueur 3 n'a qu'une stratégie et donc ne choisit rien ici ! Ce jeu est essentiellement un jeu « à somme nulle » entre les joueurs 1 et 2, et dans tout équilibre de G_λ chacun de ces joueurs choisit, indépendamment à chaque étape, ses deux actions avec probabilité 1/2. Donc $E_\lambda = \{(1/2, 1/2, 1/4)\}$, alors que $(1/2, 1/2, 1/2) \in E$, on n'a pas en général la convergence de E_λ vers E . On a toutefois le résultat suivant, Sorin (1986).

Folk théorème escompté. - Supposons qu'il y ait 2 joueurs, ou qu'il existe $u = (u^i)_{i \in N}$ dans E tel que pour tout i , $u^i > v^i$. Alors $E_{\lambda \rightarrow 0} = E$.

On peut aussi définir les équilibres sous-jeux parfaits de G_λ comme des stratégies en équilibre de Nash dans tout sous-jeu de G_λ . Notons E'_λ l'ensemble (compact) des paiements de tels équilibres. On a $E_1 \subset E'_\lambda \subset E_\lambda \subset E$, et pour avoir la convergence, on ajoute une condition de dimension sur le polytope E , Fudenberg Maskin, (1986) et (1991) :

Folk théorème parfait escompté. - Si E a un intérieur non vide, alors $E'_{\lambda \rightarrow 0} = E$.

Les preuves des deux derniers théorèmes utilisent des punitions « strictes », et dans le cas sous-jeux parfait on utilise aussi des phases de récompense pour, le cas échéant, inciter les joueurs à punir. Un exemple où on n'a pas la convergence de E'_λ vers E est le jeu à deux joueurs : $\begin{pmatrix} (1, 0) & (1, 1) \\ (0, 0) & (0, 0) \end{pmatrix}$. Dans tout équilibre sous-jeux parfait escompté, le joueur 1 doit choisir la ligne du haut à chaque étape quoiqu'il se soit passé avant, et donc $E'_\lambda = \{(1, 1)\}$ pour tout λ .

LE PRIX NOBEL POUR LES TRAVAUX DE R.J. AUMANN

Donnons maintenant un exemple économique d'équilibre sous-jeux parfait es-compté (voir la première référence). Considérons un oligopole composé de n firmes identiques, produisant un seul bien avec un coût de production marginal constant $c > 0$. Chacune des entreprises doit choisir son prix de vente, et les consommateurs achètent uniquement à l'entreprise meilleur marché (ou en cas d'égalité, à parts égales aux entreprises les moins chères). On note $D(p)$ le nombre de consommateurs prêts à acheter une unité du bien au prix p , et on suppose la demande toujours satisfaite. Chaque entreprise cherche à maximiser son profit, qui vaut $\pi(p) = D(p)(p - c)$ si l'entreprise propose seule le plus bas prix p , et qui vaut zéro si l'entreprise ne vend rien. Supposons que π admette un maximum en un prix $\hat{p} > c$.

Si on joue le jeu une fois, le seul prix d'équilibre sera égal au coût marginal c , les profits étant nuls. Afin de tenir compte des possibilités dynamiques d'ajustement des prix, considérons le jeu répété avec un taux d'escompte λ . Examinons le profil de stratégies où tout le monde joue \hat{p} jusqu'au cas éventuel où quelqu'un dévie, et alors à partir de ce moment chacun joue le prix c . Le paiement d'une entreprise si tout le monde joue selon ce profil est $\pi(\hat{p})/n$, et une entreprise qui dévie de cette stratégie en jouant p à une certaine date, aura au plus à partir de là : $\lambda\pi(p) + (1 - \lambda)0 = \lambda\pi(p)$. Donc si les joueurs sont suffisamment patients au sens où $\lambda \leq 1/n$, on aura un ESJP où le prix observé est le prix de collusion (ou de monopole) \hat{p} .

1. 4. Les Folk théorèmes finiment répétés

Concluons cette partie avec les équilibres des jeux finiment répétés. Dans le dilemme du prisonnier, on montre par récurrence que pour tout T , E_T se réduit à $\{(1, 1)\}$, (Sorin, (1986)). Donc le « bon » paiement $(3, 3)$ ne peut être approché par des équilibres du jeu finiment répété, et on n'a pas la convergence de E_T vers E . Là encore, on définit les ESJP de G_T comme des profils de stratégies σ en équilibre de Nash dans tout sous-jeu : $\forall t \in \{0, \dots, T - 1\}, \forall h \in H_t, \sigma[h]$ est un équilibre de Nash du jeu restant, i.e. de G_{T-t} . On note E'_T l'ensemble (compact) des paiements d'ESJP de G_T , et on a : $E_1 \subset E'_T \subset E_T \subset E$. Citons deux derniers Folk théorèmes, dont les preuves utilisent là encore judicieusement plan principal, phases de punitions et phases de récompense. Les convergences sont au sens de Hausdorff.

Folk théorème finiment répété (Benoît et Krishna, 1987).- *Supposons que pour chaque joueur i il existe x dans E_1 tel que $x^i > v^i$.*

Alors $E_T \xrightarrow{T \rightarrow \infty} E$.

Folk théorème parfait finiment répété (Benoît et Krishna (1985), Gossner (1995)).- *Supposons que pour chaque joueur i , il existe x et y dans E_1 tel que $x^i > y^i$ et que E est d'intérieur non vide. Alors $E'_T \xrightarrow{T \rightarrow \infty} E$.*

LE PRIX NOBEL POUR LES TRAVAUX DE R.J. AUMANN

Notons enfin qu’un modèle de jeu répété avec perturbation et rationalité limitée permet de *réduire* l’ensemble des paiements d’équilibre (Aumann et Sorin (1989)).

2. Jeux répétés à information incomplète

L’essentiel des travaux d’Aumann concernant la théorie des jeux à information incomplète a été écrit avec M. Maschler et est reproduit dans Aumann and Maschler (1995). Il s’agit initialement d’une série de rapports de Mathematica (entreprise de consulting fondée par O. Morgenstern) pour United States Arms Control and Disarmament Agency entre 1966 et 1968.

Aumann apporte là au niveau du modèle, des concepts et des résultats, toutes les fondations de la théorie des jeux répétés à information incomplète, qui va connaître un développement considérable aussi bien au niveau théorique qu’à celui des applications.

2.1. Le modèle

En suivant le modèle d’Harsanyi (1967-68), un jeu à information incomplète est représenté par une famille finie $G^\ell, \ell \in K$, de jeux stratégiques, où les joueurs et les ensembles de stratégies sont les mêmes, et par une probabilité p sur K . L’état de la nature, k , est une variable aléatoire sur K de loi p qui détermine le jeu joué G^k . Il reste à spécifier l’information initiale des joueurs.

Le cadre le plus simple est celui de 2 joueurs à *manque d’information d’un côté* : le joueur 1 connaît k , le joueur 2 n’a aucune information. On considère de plus ici le cas de jeu à somme nulle (jusqu’en 3.8) : chaque G^ℓ est déterminé par une matrice réelle $I \times J$, notée A^ℓ .

La partie se déroule par étapes : à l’étape n le joueur 1 choisit l’action $i_n \in I$, le joueur 2 choisit $j_n \in J$, le résultat est $g_n = A_{i_n j_n}^k$ mais seul le couple (i_n, j_n) est annoncé. L’histoire après le coup n - ou avant le coup $n + 1$ - est $h_n = (i_1, j_1, \dots, i_n, j_n)$. Le paiement moyen correspondant est la moyenne de Césaro $\bar{g}_n = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n g_m$.

La description de ce jeu $\Gamma(p)$ est connue des 2 joueurs.

On s’intéresse au jeu répété un grand nombre de fois : le coeur du problème est la transmission d’information sur k , par le joueur informé, via ses actions, au joueur non informé.

2.2 Utilisation de l’information : Lemme d’éclatement et opérateur de concavification

Un premier résultat fondamental (et de portée beaucoup plus générale) est qu’il est nécessaire d’étudier simultanément tous les jeux $\Gamma(p), p \in P$ où $P = \Delta(K)$ désigne l’ensemble des probabilités sur l’ensemble K . Il est basé sur le lemme suivant :

LE PRIX NOBEL POUR LES TRAVAUX DE R.J. AUMANN

Lemme 1.- Soit $\{p_r, r \in R\}$ une famille de points de P , dont l’enveloppe convexe contient p . Alors il existe une probabilité de transition θ de K vers R qui représente l’éclatement de p sur $\{p_r, r \in R\}$.

Explicitement, si on a la décomposition barycentrique :

$$p = \sum_r \lambda_r p_r, \quad \sum_r \lambda_r = 1, \quad \lambda_r \geq 0,$$

θ est donné par :

$$\theta(r|k) = \lambda_r \frac{p_r^k}{p^k}$$

et l’on a $Prob(r) = \lambda_r$ et $Prob(k|r) = p_r^k$. □

Soit Cav l’opérateur de concavification sur P : étant donné f de P dans \mathbb{R} , $Cav f$ est la plus petite fonction, concave et plus grande que f , sur P .

On déduit aisément du lemme précédent le résultat suivant qui exprime l’utilisation stratégique de l’information. (Ici $\Gamma(p)$ correspond à un jeu long et différentes versions des paiements sont possibles (cf. 2.1)).

Corollaire 2.- Si, pour tout p dans P , le joueur 1 peut obtenir $f(p)$ dans $\Gamma(p)$, il peut également obtenir $Cav f(p)$.

En effet si, à ε près, $Cav f(p)$ s’écrit $\sum_r \lambda_r f(p_r)$ avec $p = \sum_r \lambda_r p_r, \sum_r \lambda_r = 1, \lambda_r \geq 0$, le joueur 1 utilise, si son information est k , la loterie $\theta(.|k)$ et joue avec probabilité $\theta(r|k)$ la stratégie α_r qui garantit $f(p_r)$ dans $\Gamma(p_r)$. □

Introduisons alors le jeu « non révélateur » $D(p)$ où le joueur informé ignore son information et joue chaque jour dans $X = \Delta(I)$ (plutôt que dans X^K , en utilisant sa connaissance de k). Sa valeur est $u(p)$ avec

$$u(p) = \text{val} \sum_{\ell} p^{\ell} A^{\ell}.$$

(où val est l’opérateur $\max \min = \min \max$). On obtient donc :

Théorème 3.- Le joueur 1 peut obtenir $Cav u(p)$ dans $\Gamma(p)$.

2.3. Martingale des probabilités a posteriori

On fait ici une analyse duale de la précédente en calculant la quantité d’information transmise par le joueur 1. Soit p la probabilité initiale et $x_{\ell} \in \Delta(I), \ell \in K$, une stratégie du joueur 1 dans le jeu en une étape. Il joue donc l’action $i \in I$ avec la probabilité x_{ℓ}^i . La probabilité a posteriori sur K , si i est joué, est $p(i)$ avec

$$p(i)^{\ell} = \frac{p^{\ell} x_{\ell}^i}{\sum_m p^m x_m^i}.$$

La propriété fondamentale est le lien entre la distance d aux stratégies non révélatrices et la variation d’information.

LE PRIX NOBEL POUR LES TRAVAUX DE R.J. AUMANN

Lemme 4

$$d[(x, p), X] \leq E(\|p - p(i)\|_1).$$

En effet avec $\bar{x} = \sum_k p^k x_k \in X$ on obtient

$$\sum_k p^k \|x_k - \bar{x}\|_1 = \sum_i \bar{x}^i \|p - p(i)\|_1.$$

□

2.4. Lim v_n

Dans le jeu $\Gamma_n(p)$ répété n fois le théorème du minmax s'applique : ce jeu a une valeur $v_n(p)$ et on peut supposer la stratégie σ du joueur 1 connue du joueur 2 (max min). Celui-ci est donc en mesure de calculer à chaque étape $n + 1$ l'élément $\sigma(h_n) \in X^K$ utilisé par 1 puis, après l'action i_{n+1} , la variation de p_n à p_{n+1} de la probabilité conditionnelle sur K . p_n joue le rôle d'une variable d'état du processus et la suite $\{p_n\}$ est une martingale. Si à chaque étape n le joueur non informé joue optimal dans le jeu non révélateur $D(p_n)$ son gain est $u(p_n)$, modulo le fait que le joueur 1 ne joue pas non révélateur. Le paiement étant Lipschitz (de constante L) cet écart est donc contrôlé par le Lemme 4. Cela permet d'obtenir une majoration du paiement dans le jeu en n étapes :

Théorème 5. - La valeur v_n de $\Gamma_n(p)$ satisfait :

$$v_n(p) \leq \text{Cav } u(p) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Introduisons E_n , l'opérateur d'espérance conditionnelle après l'histoire h_n . Alors

$$E_n(g_n) \leq u(p_n) + L E_n(\|p_{n+1} - p_n\|)$$

d'après l'étude précédente. En faisant la moyenne, en prenant l'espérance et en utilisant l'inégalité de Jensen on obtient l'inégalité cherchée car $\{p_n\}$ étant une martingale bornée, sa variation totale en norme L^1 est $O(\sqrt{n})$. □

On obtient finalement le résultat suivant :

Théorème 6

$$\text{Lim } v_n = \text{Cav } u.$$

2.5. Valeur asymptotique et valeur uniforme

L'étude développée plus haut utilise le théorème du minmax : on considère un jeu de durée fixée n , on calcule sa valeur v_n puis on étudie sa limite. On parle alors de valeur asymptotique et d'autres critères peuvent être utilisés (par exemple paiement escompté) conduisant au même résultat.

LE PRIX NOBEL POUR LES TRAVAUX DE R.J. AUMANN

Une approche alternative repose sur les propriétés des stratégies définies indépendamment de la longueur du jeu (voir la section 2.1). On dira que le jeu $\Gamma_\infty(p)$ possède une valeur $v_\infty(p)$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une stratégie σ du joueur 1 et un nombre d'étapes N tels que pour tout $n \geq N$ et toute stratégie τ du joueur 2 on ait

$$E_{p,\sigma,\tau}(\bar{g}_n) \geq v_\infty(p) - \varepsilon$$

(on dit que le joueur 1 se garantit v_∞) et la propriété duale pour le joueur 2. On définit de manière analogue les notions de minmax et maxmin pour Γ_∞ .

La preuve du théorème 3 montre que le joueur informé peut se garantir $\text{Cav } u$. On remarque qu'une stratégie du joueur 2 construite par concaténation de stratégies optimales dans des jeux Γ_n de durées croissantes permet également, via le théorème 5 de garantir $\text{Cav } u$ d'où le résultat :

Théorème 7.- $\Gamma_\infty(p)$ possède une valeur et

$$v_\infty(p) = \text{Cav } u(p).$$

2.6. Le jeu à paiement vectoriels

La preuve proposée ci-dessus ne construit pas explicitement de stratégie optimale du joueur non informé. Une utilisation du théorème d'approchabilité de Blackwell (1956) pour les jeux à paiements vectoriels permet d'y remédier. On considère le jeu répété joué comme Γ et où le paiement de l'étape est le vecteur $R_n = \{A_{i_n, j_n}^\ell, \ell \in K\}$. On montre alors le résultat suivant :

Théorème 8.- Soit $\alpha \in \mathbb{R}^K$. L'orthant $\alpha + \mathbb{R}_-^K$ est approchable par le joueur 2 si et seulement si :

$$\langle \alpha, q \rangle \geq u(q), \quad \forall q \in P.$$

Une stratégie d'approchabilité garantit donc $\text{Cav } u$.

2.7. La structure de signaux

Une extension naturelle du modèle (en particulier pour couvrir le cas de jeux sous forme extensive) est de considérer le cas où les coups ne sont pas annoncés. On se donne donc 2 familles de matrices $I \times J$, H_1^ℓ et H_2^ℓ à valeurs dans des espaces de signaux (éventuellement aléatoires) et si (i, j) est joué le signal du joueur 1 (resp. 2) est $H_1^\ell(i, j)$ (resp. $H_2^\ell(i, j)$). Le point crucial est que utiliser ou transmettre son information ne sont plus des notions équivalentes pour le joueur 1. Le concept pertinent est le second, conduisant à la définition de stratégie non révélatrice.

Formellement $x \in X^K$ est non révélatrice si les lois $x_\ell H_2^\ell(j) = \sum_i x_i^\ell H_2^\ell(i, j)$ sont, pour tout $j \in J$, indépendantes de $\ell \in K$ (ou de manière équivalente si la probabilité conditionnelle à tout signal s , $p(s)$, est égale à p). On définit alors

LE PRIX NOBEL POUR LES TRAVAUX DE R.J. AUMANN

$u(p)$ comme la valeur du jeu non révélateur à p et le théorème 7 s’étend (avec une preuve significativement plus complexe).

2.8. Manque d’information des 2 côtés

Toujours dans le cadre de jeux à somme nulle considérons le modèle avec *manque d’information des 2 côtés* (et avec signaux standards : les coups sont annoncés). On se donne 2 ensembles finis K et M et une probabilité produit $p \times q$ sur $K \times M$ ainsi qu’une famille de matrices $I \times J, A^{km}, k \in K, m \in M$. Le couple (k, m) est tiré suivant $p \times q$ et le joueur 1 (resp. 2) est informé de k (resp. m). On définit comme plus haut le jeu $\Gamma_\infty(p, q)$.

On introduit le jeu non révélateur de valeur $u(p, q) = \text{val} \sum_{k,m} p^k q^m A^{km}$ et l’on montre que le joueur 1 possède une stratégie non révélatrice lui garantissant $\text{Vex}_q u(p, q)$ (la plus grande fonction définie sur $\Delta(K) \times \Delta(M)$, convexe en q et inférieure à u).

Une application du Corollaire 2 implique qu’il peut se garantir également $\text{Cav}_p \text{Vex}_q u(p, q)$. Un résultat de Stearns (1967) (voir Aumann and Maschler (1995) Chapter 3) permet alors d’obtenir la caractérisation suivante :

Théorème 9

$$\text{Maxmin } \Gamma_\infty(p, q) = \text{Cav}_p \text{Vex}_q u(p, q)$$

$$\text{Minmax } \Gamma_\infty(p, q) = \text{Vex}_q \text{Cav}_p u(p, q)$$

En particulier, contrairement au cas manque d’information d’un côté, il existe des jeux sans valeur. Une explication heuristique est la suivante : une meilleure réponse d’un joueur consiste d’abord à extraire le maximum d’information de la stratégie de son adversaire puis d’utiliser son information privée.

2.9. Somme non nulle

Les contributions concernant le cas à somme non nulle et manque d’information d’un côté sont plus préliminaires mais toutes aussi fondamentales. Pour décrire des stratégies d’équilibre on introduit des notions de « joint plans », qui correspondent à des suites alternées d’étapes de « signalling » (où le joueur informé révèle partiellement son information : la martingale des a posteriori évolue) et d’étapes de « jointly controlled lottery » où les joueurs génèrent, via leurs coups, des variables aléatoires contrôlées, qui déterminent l’histoire future.

Les résultats de base du domaine sont exposés dans Zamir (1992), pour le cas à somme nulle, et dans Forges (1992), pour le cas à somme non nulle.

De nombreuses extensions sont établies dans Mertens, Sorin and Zamir (1994). On trouvera dans Sorin (2002) une présentation récente, pour le cas à somme nulle, faisant le lien avec les jeux stochastiques.

3. Equilibre corrélé

Le jeu de base $G = (N, (A^i)_{i \in N}, (g^i)_{i \in N})$ consiste en un ensemble de joueurs N ainsi que, pour chaque joueur $i \in N$, un ensemble d'actions A^i et une fonction de paiement $g^i : A \rightarrow \mathbb{R}$, où $A = \prod_{j \in N} A^j$. On suppose les ensembles N et A^i finis.

3.1. Distribution d'équilibre corrélé

Une *distribution d'équilibre corrélé* (Aumann (1974)) est une distribution de probabilité sur A , $q \in \Delta(A)$, qui satisfait une liste d'inégalités linéaires. Supposons que $a = (a^i)_{i \in N}$ soit sélectionné suivant q et que chaque joueur i soit seulement informé de a^i . Les inégalités expriment que a^i maximise le paiement espéré du joueur i suivant la distribution conditionnelle⁶ $q(\cdot | a^i)$ sur $A^{-i} = \prod_{j \neq i} A^j$ étant donné a^i :

$$\sum_{a^{-i} \in A^{-i}} q(a^{-i} | a^i) g^i(a^i, a^{-i}) \geq \sum_{a^{-i} \in A^{-i}} q(a^{-i} | a^i) g^i(b^i, a^{-i})$$

$$\forall i \in N, \forall a^i \in A^i : q(a^i) > 0, \forall b^i \in A^i$$

ou, de façon équivalente : $\forall i \in N, \forall a^i, b^i \in A^i$

$$\sum_{a^{-i} \in A^{-i}} q(a^i, a^{-i}) g^i(a^i, a^{-i}) \geq \sum_{a^{-i} \in A^{-i}} q(a^i, a^{-i}) g^i(b^i, a^{-i}) \quad (6)$$

L'interprétation la plus simple est que q caractérise un système de corrélation mis au point par les joueurs avant le début du jeu G . Ce système sélectionne une *recommandation* $(a^i)_{i \in N}$ suivant q et transmet a^i en secret à chaque joueur i . Les joueurs choisissent ensuite simultanément une action, qui peut être différente de la recommandation. Seules les actions effectivement choisies déterminent les paiements. Si q satisfait les inégalités ci-dessus, aucun joueur n'a intérêt à dévier *unilatéralement* de la recommandation qui lui est faite.

En ajoutant la condition (non-linéaire) que q soit une distribution indépendante ($q((a^i)_{i \in N}) = \prod_{i \in N} q(a^i) \forall (a^i)_{i \in N}$), on retrouve l'*équilibre de Nash* en stratégies mixtes (Nash (1951)). Dans ce cas, chaque joueur choisit son action individuellement, sans qu'aucun système de corrélation ne soit nécessaire.

3.2. Fondements

Plongeons le jeu G dans un environnement *bayésien* : soit Ω l'ensemble (fini) des états du monde et pour chaque joueur i , une distribution de probabilité p^i sur Ω et une partition \mathcal{P}^i de Ω . On note E_{p^i} l'espérance associée à p^i . Un élément ω de

⁶On utilise la même notation q pour la distribution de probabilité sur A , ses marginales sur A^i et ses conditionnelles.

LE PRIX NOBEL POUR LES TRAVAUX DE R.J. AUMANN

Ω spécifie tous les paramètres pertinents qui peuvent être inconnus des joueurs⁷; p^i représente les croyances a priori du joueur i sur Ω , et \mathcal{P}^i , son information : le joueur i est informé de l'élément $P(\omega)$ de \mathcal{P}^i qui contient l'état du monde ω . Soit $\alpha^i(\omega)$ l'action choisie par le joueur i en ω ; on suppose que $\alpha^i(\cdot) : \Omega \rightarrow A^i$ est mesurable par rapport à \mathcal{P}^i , c'est-à-dire que le joueur i connaît son action. Le joueur i est *Bayes-rationnel* en ω si

$$E_{p^i}(g^i(\alpha)|\mathcal{P}^i)(\omega) \geq E_{p^i}(g^i(\alpha^i, \alpha^{-i})|\mathcal{P}^i)(\omega) \quad \forall \alpha^i \in A^i \quad (7)$$

c'est-à-dire si l'action $\alpha^i(\omega)$ qu'il choisit effectivement maximise son paiement espéré étant donné son information. Aumann (1987) démontre le résultat suivant :

Théorème.- *Sous l'hypothèse de probabilité a priori commune ($p^i = p, i \in N$), si chaque joueur est Bayes-rationnel en chaque état du monde, la distribution du profil d'actions α est une distribution d'équilibre corrélé.*

D'un point de vue bayésien, l'équilibre corrélé apparaît donc comme un concept de solution plus naturel que l'équilibre de Nash. Les joueurs conditionnent leurs décisions à toutes les informations dont ils disposent sur le jeu, et il n'y a aucune raison d'exclure que ces informations puissent être corrélées.

3.3. Equilibre corrélé et représentation canonique

En oubliant le point de vue bayésien et en conservant l'hypothèse de probabilité a priori commune, on peut voir Ω comme un ensemble d'événements aléatoires quelconques. Le jeu originel G et $(\Omega, p, (\mathcal{P}^i)_{i \in N})$ définissent alors un jeu *étendu* dans lequel un élément $\omega \in \Omega$ est d'abord sélectionné suivant p et chaque joueur i apprend quel élément de sa partition \mathcal{P}^i contient ω . Les joueurs choisissent ensuite simultanément leurs actions, qui déterminent leurs paiements. Une stratégie (déterministe, ou « pure ») du joueur i dans le jeu étendu est une fonction $\alpha^i(\cdot) : \Omega \rightarrow A^i$ mesurable par rapport à \mathcal{P}^i .

Un *équilibre corrélé* est la donnée de $(\Omega, p, (\mathcal{P}^i)_{i \in N})$ et d'un équilibre de Nash du jeu étendu, c'est-à-dire d'un profil de stratégies $(\alpha^i)_{i \in N}$ telles qu'aucun joueur ne profite d'une déviation unilatérale. Formellement, les inégalités (7) doivent être satisfaites, pour chaque $i \in N$. Le théorème précédent peut alors se relire de la façon suivante : la distribution sur A induite par un équilibre corrélé $[(\Omega, p, (\mathcal{P}^i)_{i \in N}), (\alpha^i)_{i \in N}]$ est une distribution d'équilibre corrélé, au sens de (6). On se réfère à ce dernier résultat comme à la *représentation canonique* des équilibres

⁷Le caractère fini de Ω n'est pas sans perte de généralité si les « paramètres pertinents » couvrent les hiérarchies de croyance des joueurs sur leurs actions mutuelles (voir Mertens et Zamir (1985) et les commentaires d'Aumann (1987, section 4.c)).

LE PRIX NOBEL POUR LES TRAVAUX DE R.J. AUMANN

corrélés : sans perte de généralité, on peut supposer que $\Omega = A$, \mathcal{P}^i est la partition engendrée par A^i et α^i est l'identité ($i \in N$).

Exemple

$N = \{1, 2\}$, $A^i = \{C^i, D^i\}$ où C^i est une action « pacifique » et D^i , une action « agressive » ; les fonctions de paiements (g^1, g^2) sont décrites par la matrice suivante :

	C^2	D^2
C^1	(6, 6)	(2, 7)
D^1	(7, 2)	(0, 0)

Supposons qu'un signal aléatoire ω soit sélectionné dans $\Omega = \{\text{faible, moyen, intense}\}$ de façon uniforme et que chaque joueur observe un aspect différent du signal : $\mathcal{P}^1 = \{\text{non intense, intense}\}$ et $\mathcal{P}^2 = \{\text{faible, non faible}\}$. Considérons les stratégies $\alpha^1(\text{non intense}) = C^1$, $\alpha^1(\text{intense}) = D^1$, pour le joueur 1 et $\alpha^2(\text{faible}) = D^2$, $\alpha^2(\text{non faible}) = C^2$, pour le joueur 2. On vérifie aisément que ces quantités définissent un équilibre corrélé. La distribution correspondante est

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc} C^2 & D^2 \end{array} \\
 \begin{array}{c} C^1 \\ D^1 \end{array} & \begin{array}{cc} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{array}
 \end{array} \tag{8}$$

et le paiement espéré de chacun des deux joueurs est 5. Cette distribution peut être utilisée directement pour faire des recommandations aux joueurs avant le début du jeu. Quand les joueurs sont contraints à jouer indépendamment, le jeu a trois équilibres de Nash : deux équilibres purs (C^1, D^2) , (D^1, C^2) et un équilibre mixte où chaque joueur recourt à la stratégie $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$, de paiement espéré $\frac{14}{3}$ pour chacun d'eux. L'équilibre corrélé décrit par (8) est en dehors de l'enveloppe convexe des équilibres de Nash et améliore le paiement espéré $\frac{14}{3}$ tout en restant équitable.

3.4. Existence

Tout équilibre de Nash est un équilibre corrélé et l'existence d'un équilibre de Nash mixte est garantie dans tout jeu fini, par un théorème de point fixe (Nash (1951)). L'existence d'un équilibre corrélé ne pose donc pas de problème. Cependant, la linéarité du système d'inégalités (6) permet d'obtenir une démonstration directe d'existence d'équilibre corrélé, qui ne repose que sur un théorème de séparation (Hart et Schmeidler (1989), Nau et McCardle (1990)). L'ensemble des distributions d'équilibre corrélé forme un polyèdre convexe ; les propriétés géométriques de l'ensemble des équilibres de Nash au sein de ce polyèdre ont été étudiées (voir notamment Nau et al. (2004)).

3.5. Complexité

Le paragraphe précédent suggère que les équilibres corrélés sont plus maniables que les équilibres de Nash. Gilboa et Zemel (1989) donnent un contenu précis

LE PRIX NOBEL POUR LES TRAVAUX DE R.J. AUMANN

à cette intuition en montrant que la complexité de nombreux problèmes calculatoires est « NP-hard » pour l'équilibre de Nash et *polynômiale* pour l'équilibre corrélé. Parmi ces problèmes, citons par exemple : « le jeu G possède-t-il un équilibre de Nash (resp., un équilibre corrélé) qui donne un paiement au moins égal à r à chaque joueur (pour un nombre r donné) ? » et « le jeu G possède-t-il un équilibre de Nash (resp., un équilibre corrélé) unique ? »

3.6. Mise en œuvre

Les joueurs de G peuvent-ils mettre en œuvre un équilibre corrélé en l'absence d'un système de corrélation, c'est-à-dire d'un médiateur fiable ? Barany (1992) donne une première réponse positive pour les jeux qui comptent au moins quatre joueurs : les équilibres corrélés coïncident alors avec les équilibres de Nash d'un jeu étendu où les joueurs échangent des messages sans coût avant le début de G . De nombreuses variantes et extensions de ce résultat ont suivi (voir par exemple Ben Porath (1998), Gerardi (2004), Lehrer (1996), Lehrer et Sorin (1997), Urbano et Vila (2002)).

3.7. Apprentissage

Les décideurs bayésiens d'Aumann (1987) sont parfaitement rationnels. Les modèles d'apprentissage permettent d'étudier le comportement de long terme de joueurs dont la rationalité est limitée. De multiples dynamiques ont été considérées pour rendre compte de l'optimisation plus ou moins myope des joueurs. Sous certaines procédures d'adaptation spécifiques, qui traduisent typiquement que les agents limitent le regret de leurs choix stratégiques, les distributions empiriques des actions convergent vers les distributions d'équilibre corrélé (voir par exemple Foster et Vohra (1997), Hart et Mas Colell (2000)). Cependant, les dynamiques d'évolution classiques, comme celle du « réplicateur », peuvent très bien *éliminer* toutes les stratégies qui ont probabilité positive dans un équilibre corrélé (voir par exemple Viossat (2005)).

3.8. Equilibre corrélé subjectif, fondements (suite)

Le point de vue bayésien adopté ci-dessus laisse la possibilité de probabilités a priori p^i *subjectives*, différentes suivant les joueurs. Le concept de solution correspondant est l'équilibre corrélé subjectif, déjà considéré dans Aumann (1974). L'équilibre corrélé subjectif est peu restrictif : il peut par exemple donner un paiement espéré positif aux deux joueurs d'un jeu à somme nulle. Cependant, c'est le concept de solution approprié si on applique un principe de rationalité minimale à l'analyse introspective des joueurs avant le début du jeu (voir Brandenburger et Dekel (1987)).

3.9. Extensions : étapes multiples, information incomplète, coalitions, raffine-

LE PRIX NOBEL POUR LES TRAVAUX DE R.J. AUMANN

ments, etc.

Jusqu’ici, on s’en est tenu à un jeu G sous forme stratégique, dans lequel les joueurs ont la même information et prennent leurs décisions simultanément. Si le jeu comporte plusieurs étapes, en particulier des choix du hasard à l’origine de différences d’information des joueurs, l’approche précédente est toujours valable, car elle s’applique à la forme stratégique du jeu. On parle alors d’*équilibres corrélés en forme stratégique*. Mais d’autres extensions du concept d’Aumann sont concevables : le système de corrélation peut intervenir tout au long du jeu, les joueurs peuvent transmettre de l’information au médiateur qui incarne le système de corrélation, etc. (voir Forges (1986), Myerson (1986a)).

On s’est aussi limité aux déviations unilatérales. Mais on peut envisager des *équilibres corrélés résistant aux coalitions* (voir par exemple Ray (1996)).

Enfin, on a défini un équilibre corrélé comme un équilibre de Nash d’une extension du jeu. Dans ce type de définition, on peut faire appel à des raffinements de l’équilibre de Nash (suivant le modèle, équilibre parfait, sous-jeu parfait...). L’une des difficultés est que le théorème de représentation canonique n’est plus nécessairement valide (voir Dhillon et Mertens (1996), Myerson (1986a, 1986b), Gerardi (2004)).

4. Connaissance commune et consensus

4.1. Connaissance mutuelle et commune

Un événement est *connaissance commune* de plusieurs personnes si chacun sait que cet événement se réalise, chacun sait que chacun le sait, chacun sait que chacun sait que chacun le sait, etc... Un exemple simple et célèbre, qui apparaît notamment dans les Littlewood’s miscellany (Bollobas (1953)), permet de cerner cette notion. Imaginons trois personnes dans une même salle, portant chacune un chapeau pouvant être vert ou rouge – soit 8 configurations possibles. Supposons un instant que les trois chapeaux soient rouges et qu’aucune des 3 personnes ne connaisse la couleur de son propre chapeau. La personne $i = 1$ (resp. $i = 2, 3$) sait qu’au moins un des chapeaux est rouge, puisqu’elle en voit deux rouges, et sait que les personnes 2 et 3 le savent aussi – ce fait est donc connaissance *mutuelle*. Imaginons qu’un observateur externe annonce qu’un des chapeaux est rouge, ce que tout le monde sait. La seule différence est que cette information est maintenant connaissance *publique* (ou commune). Si l’observateur demande maintenant successivement (et publiquement) aux personnes 1, 2 et 3 si elles sont en mesure de déduire la couleur de leur chapeau, la personne 3 pourra répondre par l’affirmative, ce qui était impossible avant l’annonce publique. De fait : (i) l’annonce publique n’apprend rien à la personne 1 quant à la couleur de son chapeau, (ii) du point de vue de 2, l’annonce de la personne 1 est compatible avec le fait qu’il ait un chapeau rouge ou vert, car 2 voit le chapeau rouge de 3, (iii) les annonces

LE PRIX NOBEL POUR LES TRAVAUX DE R.J. AUMANN

de 1 et 2 sont incompatibles avec le fait que le joueur 3 ait un chapeau vert, car sinon, 2 aurait été en mesure de déduire de l’annonce de 1 que son propre chapeau était rouge.

4.2. Le théorème du consensus

Le théorème du consensus (Aumann (1976)) est mathématiquement élémentaire, mais déroutant sous l’angle conceptuel. Soit un espace de probabilité (Ω, \mathcal{A}, p) , muni de deux partitions \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 , telles qu’aucun des atomes de $\mathcal{P}_1 \vee \mathcal{P}_2$ ne soit de probabilité nulle. Sur le plan de l’interprétation, Ω est l’ensemble des états du monde considérés comme possibles, \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 représentent l’information de deux agents 1 et 2 – si $\omega \in \Omega$ se réalise, l’agent i reçoit comme « signal » l’atome $P_i(\omega)$ de \mathcal{P}_i contenant ω : P_i décrit la capacité de i à distinguer les états de Ω – et p est la distribution *a priori* de l’état du monde, supposée commune aux deux agents.

Un événement $E \in \mathcal{A}$ est connaissance commune en $\omega \in \Omega$, si l’atome de $\mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_2$ contenant ω est inclus dans E . On peut aisément se convaincre que cette notion correspond à la définition informelle du paragraphe précédent (ainsi, l’agent 1 sait que l’agent 2 sait que E se réalise, puisque pour chaque état $\omega' \in P_1(\omega)$ que 1 considère comme possible, on a $P_2(\omega') \subset E$; etc...).

Fixons un événement $A \in \mathcal{A}$ arbitraire, et notons $q_i = p(A|P_i)$ la probabilité *a posteriori* que i assigne à A sur la base de l’information dont il dispose : $q_i(\omega) = p(A \cap P_i(\omega)) / p(P_i(\omega))$.

Théorème 1 .- *Supposons que, pour $\pi_1, \pi_2 \in [0, 1]$, l’événement $E = \{q_1 = \pi_1, q_2 = \pi_2\}$ soit connaissance commune en un état $\omega \in \Omega$. Alors $\pi_1 = \pi_2$.*

Si les croyances *a posteriori* des deux agents sont connaissance commune, elles ne peuvent qu’être égales.

Preuve. Notons F l’atome de $\mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_2$ contenant ω . Ainsi, F est une union (disjointe) d’atomes de \mathcal{P}_1 : $F = \cup_j P_1^j$. Comme $q_1(\omega) = \pi_1$ en tout point de F , on a

$$\pi_1 = \frac{p(A \cap P_1^j)}{p(P_1^j)}, \text{ soit } p(A \cap P_1^j) = \pi_1 p(P_1^j) \text{ pour chaque } j. \text{ En sommant sur } j, \text{ on obtient } p(A \cap F) = \pi_1 p(F). \text{ Le même raisonnement appliqué au joueur 2, conduit à } \pi_1 = \pi_2. \quad \square$$

4.3. Une application : les résultats de no-trade

L’échange entre agents économiques est souvent attribuée à deux sources possibles : des différences de « goûts » (avec pour conséquence que l’acheteur est prêt, pour posséder le bien, à payer un prix supérieur au prix auquel le vendeur sera prêt à s’en défaire), ou des différences « d’opinion » (notamment sur les marchés financiers où certaines transactions apparaissent comme des paris sur l’évolution des cours). Le premier cas de figure correspond à l’existence de

LE PRIX NOBEL POUR LES TRAVAUX DE R.J. AUMANN

gains objectifs à l'échange, tandis que dans le second, l'échange repose sur le fait qu'une des parties dispose d'une information de meilleure qualité.

Le théorème du paragraphe précédent offre un éclairage nouveau sur cette question, au travers des résultats dits de « no-trade », dont nous présentons maintenant une version simple, dans le cadre du modèle décrit ci-dessus.

Supposons ainsi que l'ensemble des états du monde possibles et pertinents soit un espace de probabilité (Ω, \mathcal{A}, p) fini, doté de deux partitions \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 . Deux joueurs interagissent au sein d'un jeu (à information incomplète), où les ensembles d'actions disponibles sont notés A_1 et A_2 . De façon plus précise, les deux joueurs reçoivent au préalable une information sur l'état ω au travers de leurs partitions, et choisissent simultanément des actions $a_1(\omega)$ et $a_2(\omega)$ (mesurables par rapport à l'information dont ils disposent), et reçoivent alors un paiement (utilité) $u_i(\omega, a_1(\omega), a_2(\omega))$, qui dépend du véritable état du monde ainsi que des actions choisies par chacun d'eux.

Parmi les actions disponibles, on distingue une action $\bar{s}_i \in A_i$ – *statu quo* – qui correspond à l'option de ne pas participer à l'échange.⁸

Dans ce contexte, une stratégie du joueur i est une fonction $a_i(\omega)$ (mesurable par rapport à \mathcal{P}_i), décrivant l'action prise en fonction de l'information disponible. Un équilibre (de Nash) est un couple de stratégies $(a_1(\cdot), a_2(\cdot))$, tel qu'aucun des deux joueurs ne peut améliorer son utilité espérée en changeant unilatéralement de stratégie. Formellement, pour toute stratégie $b_1(\cdot)$, on a alors

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) u_1(\omega, b_1(\omega), a_2(\omega)) \leq \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) u_1(\omega, a_1(\omega), a_2(\omega))$$

(ainsi que la propriété symétrique).

L'hypothèse d'absence de gains objectifs à l'échange peut se formaliser en supposant que le *statu quo* (\bar{s}_1, \bar{s}_2) est un optimum *ex ante*, au sens où toute paire de stratégie $(a_1(\cdot), a_2(\cdot))$ telle que

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) u_i(\omega, a(\omega)) \geq \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) u_i(\omega, \bar{s}), \text{ pour } i = 1, 2,$$

vérifie nécessairement $a_i(\omega) = \bar{s}_i$, pour tout $i = 1, 2$ et $\omega \in \Omega$.

On a alors le résultat suivant (voir Milgrom et Stokey (1982)).

Théorème 2 .- *En l'absence de gains objectifs à l'échange, le statu quo $(a_1(\cdot), a_2(\cdot)) = (\bar{s}_1, \bar{s}_2)$ est le seul équilibre du jeu.*

Ainsi, en l'absence de gains à l'échange, et dès que les croyances des joueurs sont déduites d'une distribution a priori commune, il n'y a pas d'échange possible.

4.4. Systèmes sémantique et syntaxique

⁸Dès qu'un joueur choisit cette option, le paiement ne dépend plus que de ω , puisqu'aucun échange n'a lieu.

LE PRIX NOBEL POUR LES TRAVAUX DE R.J. AUMANN

Le théorème du consensus crée des difficultés de nature conceptuelle. La preuve suppose implicitement que l'ensemble Ω , ainsi que les partitions \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 , sont eux-même connaissance commune des agents. D'autre part, les états du monde sont supposés décrire dans leur intégralité les aspects pertinents de la situation étudiée. Ces aspects incluent notamment les croyances des joueurs relatives aux croyances des autres joueurs. Peut-on décrire ces états du monde ? Que connaissent les joueurs du modèle $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, p)$, aussi appelé *système sémantique de croyances* ? La perception de ces difficultés a conduit au développement de travaux, dont nous proposons ici un bref aperçu.

La première façon de traiter de ces problèmes conceptuels consiste à se cantonner à un niveau verbal ou conceptuel. Une seconde façon, décrite ci-dessous, consiste à construire de manière explicite le système sémantique à partir d'un autre formalisme plus primitif.

Cette approche – dite syntaxique – est essentiellement de nature hiérarchique. L'approche de Mertens et Zamir (1985) consiste à se donner un ensemble d'*états de la nature* (incompatibles entre eux) relatifs à la « réalité objective » (le temps qu'il fait,..). Le premier niveau de la hiérarchie spécifie les croyances (distributions de probabilité) des joueurs sur les états de la nature. Le second niveau spécifie les croyances des joueurs relatives aux états de la nature ainsi qu'aux croyances de niveau 1.⁹ Et ainsi de suite... Le système sémantique est alors obtenu comme limite (projective) de ces croyances de niveaux successifs. Un état du monde est identifié à un état de la nature et à la suite infinie des croyances de tous niveaux de chacun des joueurs.

Une construction syntaxique pour l'essentiel équivalente repose sur l'utilisation de « formules » et non de probabilités, et relève de la logique modale (cf. Hintikka (1962), Kripke (1959), Fagin et al. (1995)). On se donne un « alphabet », dont les lettres peuvent représenter des événements « naturels » élémentaires. Sur cet alphabet, on construit des formules (de longueur finie) en utilisant les opérateurs logiques (« non », « et ») ainsi que des opérateurs notés p_i^α , qui s'interprètent comme « i attribue une probabilité au moins α à... », et en respectant des règles classiques de syntaxe. Un état du monde est alors défini comme une liste L de formules, *complète* et *cohérente* (pour toute formule f , L contient f ou sa négation, mais une seule des deux), ainsi que *fermée* (L contient toutes les conséquences logiques des formules de L). Un état apparaît alors comme l'ensemble des « propositions vraies » dans cet état. La perception des relations entre approches syntaxique et sémantique remonte à Harsanyi (1967-68), auquel ces travaux ont valu le premier prix Nobel de théorie des jeux en 1994.

⁹Ces croyances de niveau 2 doivent satisfaire à quelques propriétés de cohérence avec les croyances de niveau 1.

5. Conclusion

Les thèmes présentés ici sont loin de couvrir toute la production d’Aumann dans le cadre des jeux stratégiques (ou non coopératifs) : il faudrait également citer les résultats sur les jeux presque compétitifs (§27)¹⁰, l’extension du théorème de Kuhn aux jeux infinis (§28), les techniques de purification (§30) ainsi que les travaux sur la rationalité limitée (§24, §25, §34, §35), rationalité et connaissance (§36, §37) et les articles depuis 1995 en particulier sur « épistémologie interactive » et « communication gratuite ».

Par ailleurs l’interaction théorie des jeux/économie s’opère essentiellement chez Aumann (comme chez beaucoup de théoriciens de sa génération) au niveau des jeux coalitionnels (ou coopératifs) qui constituent l’essentiel du volume II des *Collected Papers*. On doit y ajouter l’ouvrage fondamental *Values of Non-Atomic Games* (1974), écrit avec L.S. Shapley. Une des contributions majeures d’Aumann dans ce champ a été le modèle d’économie avec un continuum d’agents - et les théorèmes d’équivalence dans le cadre de la théorie d’équilibre général qui y sont liés (§46, §47, §51). Une présentation de certains aspects apparaît dans son exposé à l’International Congress of Mathematicians (Helsinki, 1978) (§63).

Parmi les autres domaines auxquels Aumann a contribué, citons, en particulier : la théorie des noeuds (sa thèse, §10), l’analyse fonctionnelle (§65 - §73), la théorie de l’utilité (§14, §15, §17)...

Une présentation d’ensemble de ses travaux peut être trouvée dans l’introduction de Hart and Neyman (1995).

Références

- [1] Advanced information on the Bank of Sweden Prize in Economic Sciences in Memory of Alfred Nobel : Robert Aumann’s and Thomas Schelling’s Contributions to Game Theory (2005) *Analyses of Conflict and Cooperation*. <http://nobelprize.org/economics/laureates/2005/adv.html>
- [2] Aumann, R. J. (1974) Subjectivity and correlation in randomized strategies, *Journal of Mathematical Economics*, **1**, 67-96.
- [3] Aumann, R.J. (1976) Agreeing to disagree, *Annals of Statistics*, **4**, 1236-1239.
- [4] Aumann, R.J. (1981) Survey of repeated games, *Essays in Game Theory and Mathematical Economics in Honor of Oskar Morgenstern*, Mannheim : Bibliographisches Institut, 11-42.

¹⁰le § renvoie à la numérotation des *Collected Papers*.

LE PRIX NOBEL POUR LES TRAVAUX DE R.J. AUMANN

- [5] Aumann, R. J. (1987) Correlated equilibrium as an expression of Bayesian rationality, *Econometrica*, **55**, 1-18.
- [6] Aumann, R.J. (1999) Interactive epistemology I : knowledge, *International Journal of Game Theory*, **28**, 263–300.
- [7] Aumann, R.J. (1999) Interactive epistemology II : probability, *International Journal of Game Theory*, **28**, 301–314.
- [8] Aumann, R.J. (2000) *Collected Papers*, M.I.T. Press.
- [9] Aumann, R.J. and S. Hart (1992, 1994, 2002) (eds.) *Handbook of Game Theory I, II, III*, North-Holland.
- [10] Aumann, R.J. and A. Heifetz (2002) Incomplete information, *Handbook of Game Theory, III*, Aumann R.J. and S. Hart (eds.), Chapter 43, North-Holland.
- [11] Aumann, R.J. and M. B. Maschler (1995) *Repeated Games with Incomplete Information*, (with the collaboration of R.E. Stearns), MIT Press.
- [12] Aumann, R.J. and L. Shapley (1974) *Values of Non-Atomic Games*, Princeton U.P.
- [13] Aumann, R.J. and L. Shapley (1994) Long term competition - A game theoretic analysis, *Essays in Game Theory in Honor of Michael Maschler*, N. Meggido (ed.), Springer-Verlag, 1-15.
- [14] Aumann, R.J. and S. Sorin (1989) Cooperation and bounded recall, *Games and Economic Behavior*, **1**, 5-39.
- [15] Barany, I. (1992) Fair distribution protocols or how players replace fortune, *Mathematics of Operations Research*, **17**, 327-340.
- [16] Ben-Porath, E. (1998) Correlation without mediation : expanding the set of equilibrium outcomes by cheap pre-play procedures, *Journal of Economic Theory*, **80**, 108-122.
- [17] Benoît, J.P. and V. Krishna (1985) Finitely repeated games, *Econometrica*, **53**, 905-922.
- [18] Benoît, J.P. and V. Krishna (1987) Nash equilibria of finitely repeated games, *International Journal of Game Theory*, **16**, 197-204.
- [19] Blackwell, D. (1956) An analog of the minmax theorem for vector payoffs, *Pacific Journal of Mathematics*, **6**, 1-8.
- [20] Bollobás, B., ed. (1953) *Littlewood's miscellany*. Cambridge : Cambridge University Press
- [21] Brandenburger, A. and Dekel, E. (1987) Rationalizability and correlated equilibria, *Econometrica*, **55**, 1391-1402.
- [22] Dhillon, A. and Mertens, J. F. (1996) Perfect correlated equilibria, *Journal of Economic Theory*, **68**, 279-302.

LE PRIX NOBEL POUR LES TRAVAUX DE R.J. AUMANN

- [23] Fagin, R, J.Y. Halpern, M. Moses and M.Y. Vardi (1995) *Reasoning About Knowledge*. MIT Press, Cambridge
- [24] Forges, F. (1986) An approach to communication equilibrium, *Econometrica*, **54**, 1375-1385.
- [25] Forges, F. (1992) Repeated games of incomplete information : non-zero-sum, *Handbook of Game Theory, I*, Aumann R.J. and S. Hart (eds.), Chapter 6, North-Holland.
- [26] Forges, F., J.-F. Mertens and A. Neyman (1986) A counterexample to the Folk theorem with discounting, *Economic Letters*, **20**, 7.
- [27] Foster, D. and Vohra, R. (1997) Calibrated learning and correlated equilibrium, *Games and Economic Behavior*, **21**, 40-55.
- [28] Fudenberg, D. and E. Maskin (1986) The Folk theorem in repeated games with discounting or with incomplete information, *Econometrica*, **54**, 533-554.
- [29] Fudenberg, D. and E. Maskin (1991) On the dispensability of public randomization in discounted repeated games, *Journal of Economic Theory*, **53**, 428-438.
- [30] Geanakoplos, J. (2002) Common knowledge, *Handbook of Game Theory with Economic Applications, II*, Aumann R.J. and S. Hart (eds.), Chapter 40, North-Holland.
- [31] Gerardi, D. (2004) Unmediated communication in games with complete and incomplete information, *Journal of Economic Theory*, **114**, 104-131.
- [32] Gilboa, I. and E. Zemel (1989) Nash and correlated equilibria : some complexity considerations, *Games and Economic Behavior*, **1**, 80-93.
- [33] Gossner, O. (1995) The Folk theorem for finitely repeated games with mixed strategies, *International Journal of Game Theory*, **24**, 95-107.
- [34] Harsanyi, J. (1967-68) Games with incomplete information played by 'Bayesian' players, parts I-III, *Management Science*, **8**, 159-182, 320-334, 486-502.
- [35] Hart, S. and A. Mas-Colell (2000) A simple adaptive procedure leading to correlated equilibrium, *Econometrica*, **68**, 1127-1150.
- [36] Hart, S. and D. Schmeidler (1989) Existence of correlated equilibria, *Mathematics of Operations Research*, **14**, 18-25.
- [37] Hart, S. and A. Neyman (1995) (eds.) *Game and Economic Theory : Selected Contributions in Honor of Robert J. Aumann*, University of Michigan Press.
- [38] Hintikka, J. (1962) *Knowledge and Belief*, Cornell University Press, Ithaca.
- [39] Kripke, S. (1959) A completeness theorem in modal logic, *Journal of Symbolic Logic*, **24**, 1-14.
- [40] Lehrer, E. (1996) Mediated talk, *International Journal of Game Theory*, **25**, 177-188.

LE PRIX NOBEL POUR LES TRAVAUX DE R.J. AUMANN

- [41] Lehrer, E. and S. Sorin (1997) One-shot public mediated talk, *Games and Economic Behavior*, **20**, 131-148.
- [42] Lewis, D. (1969) *Convention*, Harvard University Press, Cambridge.
- [43] Mertens, J.-F. (1987) Repeated Games, *Proceedings of the I.C.M. Berkeley, 1986*, Gleason, A.N. (ed.), Providence, A.M.S., 1528-1577.
- [44] Mertens, J.-F., Sorin S. and S. Zamir (1994) *Repeated Games*, Core D.P 9420, 9421, 9422.
- [45] Mertens, J.F. and S. Zamir (1985) Formulation of Bayesian analysis for games with incomplete information, *International Journal of Game Theory*, **14**, 1–29.
- [46] Milgrom, P. and N. Stokey (1982) Information, trade and common knowledge, *Journal of Economic Theory*, **26**, 17–27.
- [47] Myerson, R. B. (1986a) Multistage games with communication, *Econometrica*, **54**, 323-358.
- [48] Myerson, R. B. (1986b) Acceptable and predominant correlated equilibria, *International Journal of Game Theory*, **15**, 133-154.
- [49] Nau, R.F. and K. F. McCardle (1990) Coherent behavior in noncooperative games, *Journal of Economic Theory*, **50**, 424-444.
- [50] Nau, R. F., S. Gomez Canovas and P. Hansen (2004) On the geometry of Nash equilibria and correlated equilibria, *International Journal of Game Theory*, **32**, 443-453.
- [51] Ray, I. (1996) Coalition-proof correlated equilibrium : A definition, *Games and Economic Behavior*, **17**, 56-79.
- [52] Rubinstein, A. (1994) Equilibrium in supergames, *Essays in Game Theory in Honor of Michael Maschler*, N. Meggido (ed.), Springer-Verlag, 17-28.
- [53] Sorin, S (1986) On repeated games with complete information, *Mathematics of Operations Research*, **11**, 147-160.
- [54] Sorin, S (1992) Repeated games with complete information, *Handbook of Game Theory, I*, Aumann R.J. and S. Hart (eds.), Chapter 4, North-Holland.
- [55] Sorin, S (2002) *A First Course on Zero-Sum Repeated Games*, Springer.
- [56] Urbano, A. and J. E. Vila (2002) Computational complexity and communication : coordination in two-player games, *Econometrica*, **70**, 1893-1927.
- [57] Viossat, Y.(2005) Replicator dynamics and correlated equilibrium : elimination of all strategies in the support of correlated equilibria, *Cahier du Laboratoire d'Econométrie, Ecole Polytechnique*, 2005-014.
- [58] Zamir, S. (1992) Repeated games of incomplete information : zero-sum, *Handbook of Game Theory, I*, Aumann R.J. and S. Hart (eds.), Chapter 5, North-Holland.

Exposition « Au delà du compas : la géométrie des courbes »

par Caterina CALGARO ¹

Du 27 mars au 15 avril 2006

Université des Sciences et Technologies de Lille

Espace Culture et Bibliothèque Universitaire

[http ://www.univ-lille1.fr/math/Expo.htm](http://www.univ-lille1.fr/math/Expo.htm)

Cette exposition, proposée à l’initiative de l’UFR de Mathématiques de l’Université des Sciences et Technologies de Lille et de l’Association pour la création de la Cité des Géométries de Maubeuge, est organisée par l’Espace Culture et l’UFR de Mathématiques de l’USTL.

Les origines de la géométrie sont évidemment inconnues, comme celles des nombres, de la parole, de la danse, etc. La droite et le cercle sont les premières lignes avec lesquelles prend naissance la *géométrie*, mot qui signifie *mesure de la Terre*. L’existence de résultats géométriques on les retrouve dans les ruines des temples et constructions de l’antiquité (frises périodiques, pavages réguliers, rapports de longueur des divers éléments de l’architecture,...), dans la construction des villes aux avenues perpendiculaires, des temples aux colonnes équidistantes, etc.

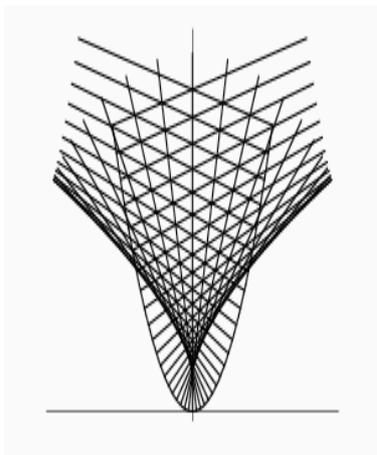
L’exposition *Au delà du compas, la géométrie des courbes*, réalisée par Franco Conti (ENS Pise) et Enrico Giusti (Université de Florence), se propose de nous faire parcourir à grands traits un chapitre passionnant de la géométrie, depuis plus de trois mille ans. On commence par l’étude des courbes, à partir des plus simples d’entre elles : le cercle et la droite. La règle et le compas sont les instruments les plus simples pour les construire, mais d’autres instruments existent pour tracer des droites ou des courbes plus compliquées. Les mathématiciens ont étudié ces nombreuses autres courbes, pour en découvrir les propriétés, en particulier celles que l’on retrouve dans les applications liées à la science, à la technique et parfois dans la vie de tous les jours (le mécanisme de Watt ou celui de Peaucellier, le quadrilatère articulé, etc).

En étudiant ces courbes, en les classant, les mathématiciens ont alors constaté que les coniques des Grecs étaient définies par des équations du second degré. Ils ont ensuite regardé les courbes définies par des équations de degré supérieur, afin

¹Laboratoire Paul Painlevé - UMR 8524, Université Sciences et Technologies -Lille, UFR de Mathématiques, 59655 Villeneuve d’Ascq Cedex - France

EXPOSITION : LA GÉOMÉTRIE DES COURBES

d’aller au-delà des courbes mécaniques, c’est-à-dire traçables par un mécanisme. Ils ont donc considéré les courbes algébriques, définies par leurs équations, puis les courbes transcendentes, ouvrant ainsi un immense champ de recherche. De l’ellipse à la spirale d’Archimède, des sections coniques à l’enveloppe ou la courbure d’une courbe, de la cycloïde aux fractales, cette exposition permet de parcourir des siècles d’histoire, d’inventions conceptuelles, d’applications pratiques. Outre les faits et les résultats qui sont présentés dans cette exposition, ce qui en fait un de ses attraits est qu’elle est très interactive : à l’aide d’une quarantaine d’expériences, le public peut actionner lui-même les systèmes articulés et en comprendre le principe, ou observer les propriétés de la cycloïde, ou vérifier les propriétés les plus simples des coniques. Même un élève de 6^e peut voir, expérimenter, découvrir. Il aura le temps plus tard, s’il le souhaite, d’étudier la théorie de façon formelle, technique. Pour le moment, c’est un espace de découvertes qui lui est offert.



L’exposition a fait le tour de nombreuses villes d’Italie (plus de 350000 visiteurs) et a été présentée pendant toute l’année 2000 au Palais de la Découverte à Paris. Le public concerné est très vaste : les élèves de tous niveaux ainsi que les étudiants universitaires, les enseignants de mathématiques ainsi que des autres disciplines. Elle peut être visitée aussi bien en famille qu’en classe, des fiches techniques d’approfondissement accompagneront les objets de l’exposition et des visites guidées seront organisées. Des conférences tout public de collègues mathématiciens de Lille et d’autres universités seront proposées pendant la durée de l’exposition.

Annonces de Colloques

par Boniface NGONKA

Février 2006

PLANIFICATION D'EXPÉRIENCES ET ANALYSE D'INCERTITUDES POUR LES GROS
CODES NUMÉRIQUES : APPROCHES STOCHASTIQUES

2 et 3 février 2006, à Toulouse

<http://www.lsp.ups-tlse.fr/Fp/Dupuy/jourfev06/index.htm>

OPTIMISATION, ANALYSE MULTIVOQUE ET ANALYSE NON-LINÉAIRE

2 et 3 février 2006, à Pau

Mars 2006

3RD INTERNATIONAL CONFERENCE ON HIGH PERFORMANCE SCIENTIFIC COM-
PUTING - MODELING, SIMULATION AND OPTIMIZATION OF COMPLEX PROCESSES

du 6 au 10 mars 2006, à Hanoi, Vietnam

<http://www.iwr.uni-heidelberg.de/HPSCHanoi2006>

COLLOQUE « JOURNÉES EXTRÊMES »

du 16 au 17 mars 2006, à Lille

<http://math.univ-lille1.fr/~barme/extremesalille>

Avril 2006

MATHEMATICS OF OPTIMIZATION AND DECISION

du 18 au 21 avril 2006, en Guadeloupe

<http://gala.univ-perp.fr/~aussel/CIMODE06/>

IFAC WORKSHOP ON CONTROL APPLICATIONS OF OPTIMISATION (CAO'06)

du 26 au 29 avril 2006, ENS Cachan, Paris

<http://www.ens-cachan.fr/cao06/>

Mai 2006

NONSMOOTH DYNAMICAL SYSTEMS ANALYSIS, CONTROL, SIMULATION AND
APPLICATIONS

du 29 mai au 2 juin 2006, INRIA Rocquencourt

<http://www.inrialpes.fr/bipop/schoolnonsmooth>

ANNONCES DE COLLOQUES

INTERNATIONAL CONFERENCE ON NONLINEAR PROGRAMMING WITH APPLI-
CATIONS 2006

du 29 mai au 1er juin 2006, Shanghai, Chine

<http://www.polyu.edu.hk/~ama/events/conference/NPA2006/an1.htm>

Juin 2006

6ÈME CONFÉRENCE INTERNATIONALE AIMS « DYNAMICAL SYSTEMS, DIFFE-
RENTIAL EQUATIONS AND APPLICATIONS »

du 25 au 28 juin 2006, Poitiers

<http://aimsciences.org/AIMS-Conference/2006/>

SIXIÈME CONGRÈS INTERNATIONAL COURBES ET SURFACES

du 29 juin au 5 juillet 2006, Avignon

<http://www.lille.ensam.fr/avignon/main.htm>

Juillet 2006

21ST EUROPEAN CONFERENCE ON OPERATIONAL RESEARCH

du 2 au 5 juillet 2006, Reykjavik

<http://www.euro2006.org/>

NEW TRENDS IN VISCOSITY SOLUTIONS AND NONLINEAR PDE

du 24 au 28 juillet 2006, Lisbonne

<http://www.math.ist.utl.pt/~dgomes/newtrends/>

Août 2006

COLLOQUE MATHÉMATIQUES ET PHONOLOGIE : QUELS OUTILS MATHÉMATIQUES
POUR LA MODÉLISATION EN PHONOLOGIE ?

31 Août au 1er Septembre 2006, Orléans

<http://www.univ-orleans.fr/mapmo/membres/maitine/matphono.html>

Septembre 2006

CIMPA SCHOOL ON OPTIMIZATION AND CONTROL

du 28 août au 8 Septembre 2006 à Castro Urdiales (Cantabria, Espagne)

<http://www.cimpa-icpam.org/Francais/Prog2006/Espagne206.html>

INTERNATIONAL CONFERENCE ON APPLIED ANALYSIS AND DIFFERENTIAL EQUA-
TIONS

du 4 au 9 Septembre 2006 à Iasi, Roumanie

<http://www.math.uaic.ro/~icaade/>

Comptes Rendus de Manifestations

Compte rendu de la « Première conférence de mathématiques du Pacifique Sud »

Nouméa, Nouvelle-Calédonie, 29 août-2 septembre 2005

par *Henri Bonnel*

La Première conférence de mathématiques du Pacifique Sud (SPCM2005), co-organisée par l'Université de la Nouvelle-Calédonie (U.N.C.), University of South Pacific (U.S.P.) Fidji, l'Université de la Polynésie Française (U.P.F.) Tahiti, et l'I.R.D. (Institut de recherche pour le développement) de Nouméa, s'est déroulée avec succès dans les locaux de l'I.R.D. de Nouméa pendant une semaine (du 29.08 au 2.09 2005).

Cette conférence internationale, d'une certaine manière une conséquence des « Assises de la Recherche Française dans le Pacifique » qui ont eu lieu à Nouméa en 2004, où les sciences fondamentales n'ont pas ou peu été représentées, a réuni environ 40 chercheurs de 12 pays en montrant le rôle important des mathématiques pour le progrès général. Une preuve de la réussite de cette initiative a été la décision prise par la communauté mathématique présente à la clôture de SPCM-2005 d'organiser un cycle de telles conférences tous les deux ans dans le Pacifique Sud. La prochaine conférence SPCM 2007 aura lieu à Fidji fin janvier 2007, et SPCM 2009 sera accueillie par U.P.F. (Tahiti) en août 2009.

Cette manifestation internationale, première de ce genre en Nouvelle-Calédonie, a permis la mise en place des coopérations scientifiques entre les chercheurs de l'U.N.C., de l'I.R.D de Nouméa, de l'U.S.P. et de l'U.P.F. À une plus longue portée, cette conférence a créé la possibilité d'échanges scientifiques entre des chercheurs du Pacifique Sud et des chercheurs d'autres régions du monde (Europe, Amérique, Asie ...). Ce colloque a permis également au Pacifique Sud de remarquer la place importante des mathématiques françaises dans le contexte scientifique international. Dans l'autre sens, les métropolitains ont pu découvrir que même aux antipodes, à part le charme incontestable de la Nouvelle-Calédonie, les mathématiques sont très appréciées vu l'enthousiasme et les résultats scientifiques des mathématiciens de l'équipe ERIM (EA 3791) de l'U.N.C. et des autres mathématiciens du Pacifique Sud.

COMPTE RENDUS DE MANIFESTATIONS

Le thème principal de SPCM2005 a été « Optimisation et Contrôle Optimal ». D'autres domaines de recherche mathématique comme : l'Algèbre, la Géométrie algébrique, Probabilités et Systèmes dynamiques ont aussi été présents.

Henri Bonnel, Directeur de l'équipe ERIM de l'U.N.C., organisateur de la conférence, a annoncé l'ouverture de SPCM2005. Charles Washetine, membre du Gouvernement de la Nouvelle-Calédonie chargé de la recherche, Sonia Lagarde, Première Vice-présidente de la Province Sud, François-Xavier Bieuville, Représentant du Haut-Commissaire, ainsi que Fabrice Colin, Directeur de l'I.R.D. de Nouméa et Alain Fages, Président de l'U.N.C. ont salué cette initiative et ont souhaité la bienvenue aux participants. Finalement les co-organisateurs Jito Vanualailai, Directeur du Département de Mathématiques de l'U.S.P. et Jean-Marie Gouraud, Directeur de l'équipe GAATI de l'U.P.F., ont souligné l'importance pour les mathématiques du Pacifique Sud de SPCM2005.

La conférence s'est déroulée dans de très bonnes conditions en deux sessions parallèles : la première dédiée entièrement à l'Optimisation et Contrôle optimal, la deuxième étant consacrée aux autres domaines mathématiques présents à SPCM2005. À part les exposés réguliers (30 minutes) SPCM2005 a accueilli les conférenciers pléniers (exposés d'une heure) suivants :

- J.-M. Bonnisseau (Université Paris 1)
- P. L. Combettes (Université Paris 6)
- M. de Lara (CERMICS, École nationale des ponts et chaussées, Paris)
- M. Ehrgott (University of Auckland)
- M. Fukushima (Kyoto University)
- A.-N. Iusem (IMPA, Rio de Janeiro)
- V. Jeyakumar (University of New South Wales)
- L. Paunescu (University of Sydney)
- L. Qi (The Hong Kong Polytechnic University)

A noter que 8 parmi les 9 conférenciers pléniers ont présenté des résultats liés à l'Optimisation. Les exposés réguliers concernant l'Optimisation et le Contrôle ont été assurés par : H. Bonnel, R. Burachik, Y. Kaya, M.G.M. Khan, M. Mangeas, T. Pennanen, C. Sagastizabal, B. Sharma, M. Solodov et J. Vanualailai.

Les actes du colloque seront publiés dans un numéro spécial du « Pacific Journal of Optimization ». Le programme complet et les résumés des exposés sont disponibles sur le site de SPCM2005 :

<http://www.univ-nc.nc/Recherche/labo/erim/lastconf/confsp.htm>

Résumés de thèses

par Adel BLOUZA

Il est rappelé aux personnes qui souhaitent faire apparaître un résumé de leur thèse ou de leur HDR que celui-ci ne doit pas dépasser une trentaine de lignes. Le non-respect de cette contrainte conduira à une réduction du résumé (pas forcément pertinente) par la rédactrice en chef, voire à un refus de publication.

HABILITATIONS À DIRIGER DES RECHERCHES

Olivier Perrin

Quelques contributions à la statistique spatiale

Soutenue le 18 octobre 2005

Université de Toulouse I

Je choisis de présenter ce qui constitue la part la plus importante de mon activité de recherche, à savoir la modélisation et l'estimation de champs aléatoires non stationnaires (au second ordre ou au sens faible). Le cadre d'étude de cette non-stationnarité trouve son origine dans les travaux de Guttorp et Sampson (1986, 1992 et 1994). Ces derniers proposent de modéliser la non-stationnarité des processus aléatoires, indexés continument par \mathbb{R}^n , $n \geq 1$, (en pratique $n = 1, 2$ ou 3) grâce à une transformation (ou déformation) de l'espace des indices (le support du champ) afin de se ramener à une structure connue (stationnaire ou stationnaire et isotrope) pour laquelle on dispose de techniques d'estimation et de prévision classiques. Cette idée de déformer l'espace des indices se trouve déjà, au moins pour les processus indexés par \mathbb{R} , dans l'article de Stock (1988). Déformer l'espace des indices peut se généraliser de différentes façons. En effet, on peut imaginer qu'une déformation n'a plus pour but de rendre stationnaire ou isotrope (dans la suite isotrope signifie stationnaire et isotrope) un champ aléatoire a priori non stationnaire. Nous pouvons par exemple décider de transformer l'espace des indices pour se ramener à une structure du type « drap brownien fractionnaire » *i.e.* à un champ gaussien à accroissements superficiels stationnaires. Nous pouvons

aussi considérer que la transformation n'est pas obligatoirement de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n , mais par exemple de \mathbb{R} dans un espace de plus grande dimension. Finalement, nous pouvons généraliser cette notion de stationnarité par déformation de la manière suivante : grâce à une transformation, se ramener de la non-stationnarité à une structure spécifiée à l'avance pour laquelle il est possible d'utiliser des techniques idoines. C'est donc autour de ces deux notions « non-stationnarité » et « déformation de l'espace des indices » que je vais tenter d'articuler une grande partie de mes travaux de recherche.

Didier Aussel

Contributions en analyse multivoque et en optimisation

Soutenue le 17 novembre 2005

Université de Montpellier II

Les mots-clés qui caractérisent les travaux présentés dans ce mémoire sont : analyse multivoque, analyse non lisse, inéquations variationnelles, convexité généralisée et optimisation.

Ce mémoire est structuré en cinq parties. Les deux premières parties sont consacrées à deux thèmes centraux des mathématiques de l'optimisation et de la décision : les principes variationnels et les résultats d'existence de solutions d'inéquations variationnelles. Les résultats obtenus fournissent les bases sur lesquelles sont bâties les applications en convexité généralisée et en optimisation.

Plus précisément, en première partie une approche unificatrice de l'analyse non lisse est proposée, via la notion de sous-différentiel abstrait, et l'on étudie dans ce cadre les principes variationnels « lisses » et les inégalités de valeur moyenne avec ou sans contraintes, ainsi que leurs nombreuses applications. Dans la deuxième partie, on prouve des résultats d'existence très généraux pour inéquations variationnelles définies par des applications multivoques quasimonotones. La troisième partie est dédiée à l'obtention de caractérisations sous-différentielles ou épigraphiques de diverses convexités généralisées : essentiellement la quasi-convexité, la pseudoconvexité, la faible convexité et la convexité approximative. Dans la quatrième partie, nous développons toute une théorie autour de la notion d'*opérateur normal*. Un ensemble complet de propriétés de cet opérateur (non vacuité, semi-continuité...) et d'applications en optimisation quasiconvexe (résultats

RÉSUMÉS DE THÈSES

d’existence, conditions nécessaires et conditions suffisantes d’optimalité) est obtenu, montrant ainsi la pertinence de l’approche. Enfin le mémoire se termine par l’étude du bon comportement asymptotique dans le cas de problèmes d’optimisation avec contraintes.

Samir Adly

Analyse des problèmes unilatéraux convexes et non-convexes : résultats d’existence et de stabilité

Soutenue le 24 novembre 2005

Université de Limoges

L’activité principale des travaux de recherches présentés dans le mémoire consiste à développer des outils d’analyse en vue de les appliquer à l’étude théorique (résultats d’existence et de stabilité) et numérique (discrétisation par éléments finis, étude des schémas numériques ad-hoc) à une large classe de problèmes variationnels. Les applications de ces problèmes se trouvent en mécanique unilatérale où le modèle s’écrit sous forme de systèmes d’équations ou d’inéquations aux dérivées partielles traduisant en général un bilan de mouvements ou d’énergies. Nous pouvons citer par exemple les problèmes de la mécanique du contact avec ou sans frottement.

L’autre axe de recherche est l’étude de la stabilité (au sens de Lyapounov) des systèmes dynamiques du second ordre avec application au frottement sec de type Coulomb. Il est connu que la présence du frottement sec peut influencer le comportement et la performance des systèmes mécaniques et induire plusieurs phénomènes tels que l’adhérence-glissement (« stick-slip »), l’amortissement des vibrations dans un matériau ou les cycles limites dans certains cas. Notre objectif est d’obtenir des résultats d’attractivité globale ou locale de l’ensemble des points stationnaires des problèmes de contact dynamiques du second ordre.

Jacques Giacomoni

Contribution à l'étude de problèmes elliptiques ou paraboliques singuliers

Soutenu le 26 novembre 2005

Université Paul Sabatier, Toulouse

Ce mémoire présente un ensemble de résultats concernant l'étude de quelques problèmes aux dérivées partielles non linéaires elliptiques et paraboliques singuliers. Ces problèmes se rencontrent dans divers domaines de la biologie, de l'optique non linéaire, de la chimie, de la mécanique. L'existence et les propriétés des solutions sont discutées (entre autres : comportement asymptotique, régularité, estimations a priori, multiplicité). On fait appel à un large panel de méthodes (méthodes variationnelles, méthodes topologiques, bifurcation et méthodes d'équations différentielles en exploitant la symétrie radiale) pour résoudre les difficultés liées à la présence de la singularité. Ceci permet d'établir des résultats précis concernant la structure de l'ensemble des solutions.

Judith Vancostenoble

Contrôle et stabilisation de systèmes d'équations aux dérivées partielles

Soutenu le 28 novembre 2005

Université Paul Sabatier, Toulouse

Nous présentons divers travaux principalement dans le domaine du contrôle et de la stabilisation des équations aux dérivées partielles. Les thèmes abordés sont les suivants :

- nulle contrôlabilité de systèmes paraboliques dégénérés ou en domaines non bornés ;
- stabilisation et contrôle intermittent d'équations d'ondes ;
- contrôlabilité et stabilité de modèles en aéroacoustique ;
- propriétés qualitatives de modèles de dynamique des populations ;
- optimalité d'estimations d'énergie pour des équations d'ondes amorties ;
- « explosion » en temps fini de solutions bornées d'équations différentielles ordinaires.

Yves Renard

Analyse mathématique et numérique de problèmes de contact, de frottement et de fissuration

*Soutenue le 30 novembre 2005
Université Paul Sabatier, Toulouse*

Les thématiques abordées dans le mémoire vont de l'analyse mathématique des modèles de contact avec frottement en petites déformations aux algorithmes numériques de résolution en passant par l'analyse numérique des méthodes d'éléments finis, l'étude des problèmes discrétisés et le calcul dans les domaines fissurés.

Le modèle statique (en fait incrémental) dit problème de Signorini avec frottement de Coulomb est analysé. Plusieurs formulations faibles sont proposées dont certaines sont classiques et d'autres moins. Un résultat partiel d'unicité est présenté. Il s'agit du premier résultat de ce type pour ce modèle où il a été conjecturé que des multi-solutions existent pour un coefficient de frottement aussi petit que l'on veut. Bien qu'aucune multi-solution n'ait été exhibée pour le moment dans ce cadre.

Des analyses numériques sont présentées qui sont optimales pour le problème de contact sans frottement. Une estimation d'erreur est aussi présentée pour le problème de Signorini avec frottement de Coulomb qui est non optimale. C'est la première estimation d'erreur existant pour ce modèle. Elle est présentée dans le cadre d'unicité précité.

Des algorithmes numériques pour la résolution des problèmes discrets sont présentés et comparés. Ensuite le modèle dynamique est étudié. L'introduction d'une perturbation massique sur le bord de frottement qui redonne l'unicité de la solution est discutée. Sur un modèle mono-dimensionnel, cette perturbation sélectionne une solution particulière dite à retard maximal.

Des schémas en temps sont décrits et analysés du point de vue de leur stabilité. Un schéma strictement conservatif en énergie est donné. Cependant, il est constaté dans la plupart des schémas, de fortes instabilités de la pression de contact et du déplacement normal sur le bord de contact. Pour remédier à cela il est proposé une stratégie de redistribution de la masse dont on montre qu'elle redonne l'unicité de la solution et la conservativité de l'énergie du problème semi-

discrétisé en espace.

Concernant les domaines fissurés, une analyse de la méthode Xfem proposée par N. Moës est faite. Cette méthode permet de représenter la fissure indépendamment du maillage. Des améliorations sont proposées et une analyse numérique de l’erreur est faite.

Francis Filbet

Contributions à l’analyse mathématique et à la simulation numérique de quelques équations cinétiques

*Soutenue le 6 décembre 2005
Université Paul Sabatier, Toulouse*

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été regroupés en quatre chapitres traitant successivement de la modélisation en physique des plasmas et des faisceaux, des méthodes de type Fourier-Galerkin pour les opérateurs de collisions (équation de Boltzmann), de l’analyse des méthodes de type volumes finis pour des équations cinétiques (modèles de coagulation-fragmentation) et enfin des différents modèles intervenant dans la description mathématique du chimiotactisme.

Les résultats donnés dans le premier chapitre mettent en avant l’utilisation de schémas eulériens pour la simulation numérique de l’équation de Vlasov. D’une part, nous étudions le modèle paraxial couramment utilisé pour l’étude d’une coupe transverse d’un faisceau de particules. L’objectif de ce travail est de faire le point sur la modélisation paraxiale et de justifier mathématiquement les travaux des physiciens. D’autre part, un autre travail concerne l’étude du système de Vlasov-Maxwell avec la prise en compte de conditions aux limites entrantes.

Dans le deuxième chapitre, nous nous intéressons à la simulation numérique de gaz raréfiés (modèles collisionnels cinétiques). L’objectif de cette partie est de proposer une alternative au méthode Monte-Carlo fondée sur les schémas spectraux (méthode de type Fourier-Galerkin). Nous donnons un cadre général permettant d’appliquer la méthode spectrale à une large classe d’opérateurs de type Boltzmann. Cette approche permet d’obtenir une bonne précision dans l’approximation de la solution de l’équation de Boltzmann mais reste coûteuse en temps de

RÉSUMÉS DE THÈSES

calcul. Nous introduisons alors des algorithmes rapides permettant de rivaliser avec les méthodes Monte-Carlo.

La troisième partie est consacrée à l’analyse de schémas volumes finis pour les équations cinétiques. Nous proposons des méthodes originales pour traiter des équations de coagulation-fragmentation. Cette approche permet de réaliser des simulations numériques d’une grande précision et ainsi d’indiquer des directions de recherches sur le comportement asymptotique de la solution exacte (existence de solutions auto-similaires, phénomène de perte de masse, etc.).

Enfin dans le dernier chapitre, nous étudions des modèles cinétiques pour décrire le mouvement de cellules ou de bactéries. À partir de développements asymptotiques nous obtenons plusieurs modèles macroscopiques du type parabolique et hyperbolique (ces modèles ont été récemment proposés dans la littérature). Nous développons alors des méthodes numériques d’ordre élevé permettant de conserver certaines propriétés importantes du modèle continu (positivité de la densité, état stationnaire, entropie).

Sidi Mahmoud Kaber

**Approximations numériques d’ordre élevé de fonctions discontinues.
Applications aux lois de conservation.**

Soutenue le 9 décembre 2005

Université Paris 6

Mes activités de recherche tournent autour de la question suivante : comment calculer une approximation numérique précise d’une fonction discontinue ? La motivation première est le post-traitement de solutions numériques obtenues par des méthodes spectrales appliquées à la résolution de lois de conservation non linéaires. Il y a deux difficultés dans l’approximation spectrale de ce type d’équations : le calcul de la solution *entropique*, intrinsèque aux lois de conservation et le *phénomène de Gibbs*, lié au fait qu’on utilise des polynômes pour approcher des fonctions discontinues. La première difficulté peut être réglée par la méthode de *viscosité spectrale évanescence* qui consiste à ajouter à l’équation une viscosité spectralement petite qui n’agit que sur les hautes fréquences. Cette viscosité est à la fois suffisamment forte pour stabiliser les calculs et assez faible pour ne pas détériorer la précision spectrale. Le phénomène de Gibbs est traité par

RÉSUMÉS DE THÈSES

des techniques de *filtrage*. J'ai travaillé sur des filtrages linéaires (de type convolution) et des filtrages non linéaires (approximations rationnelles dites de type Padé généralisé). La deuxième partie de mon travail porte sur la combinaison de l'analyse multiéchelle ou multirésolution et de la méthode des Volumes Finis (VF). Suivant Harten, nous proposons d'utiliser la représentation multiéchelles (RM) de la solution numérique pour détecter les zones de singularités de la solution. On peut alors combiner deux types de flux numériques : l'un, simple, est utilisé dans les zones de calcul où l'écoulement est régulier, l'autre plus performant (ENO) mais plus compliqué à mettre en œuvre et plus coûteux en temps de calcul est utilisé dans les zones où la structure de l'écoulement l'exige. Le schéma VF associé a été appliqué avec succès au calcul d'écoulements compressibles conduisant à des gains significatifs de temps de calcul. Nous avons défini aussi un nouveau schéma adaptatif où l'évolution de l'EDP est effectuée sur une grille adaptative formée de cellules correspondant à divers niveaux de résolution. L'idée est d'exprimer la solution numérique dans une base d'ondelettes en n'utilisant que les ondelettes nécessaires à la représentation de la fonction pour une tolérance fixée. Nous avons effectué l'analyse de ce schéma pour des maillages structurés. Puis étendu le schéma aux maillages triangulaires pour l'appliquer à la dynamique des gaz compressibles.

Olivier Garet

Quelques problèmes de mécanique statistique

Soutenue le 12 décembre 2005

Université d'Orléans

Les travaux présentés relèvent d'une branche des probabilités que l'on appelle la mécanique statistique. L'idée générale est que l'on étudie des systèmes infinis de particules en essayant d'établir le lien entre les propriétés microscopiques et les propriétés macroscopiques.

La première partie traite des mesures de Gibbs gaussiennes, classiques et quantiques. On y étudie finement la structure de l'ensemble des mesures de Gibbs classiques et quantiques ainsi que des dynamiques stochastiques de gradient canoniquement associées. Une attention particulière est accordée à l'influence de la transition de phase.

RÉSUMÉS DE THÈSES

On étudie ensuite des problèmes associant percolation et mesure de Gibbs, à savoir l'existence de transition de percolation associée à des hamiltoniens quadratiques perturbés et des théorèmes de limite centrale pour la répartition des phases dans les modèles Ising et Potts. On s'intéresse enfin à la percolation de premier passage et aux problèmes de compétition associés. On montre en particulier des théorèmes de forme asymptotique et de grandes déviations pour la percolation de premier passage sur l'amas de percolation Bernoulli et l'on étudie des problèmes de coexistence/non-coexistence entre des espèces qui se propagent de manière analogue à ce qui se passe en percolation de premier passage.

Serge Gratton

Fast and robust solvers in Scientific Computing. Applications in Geosciences.

Soutenue le 13 décembre 2005 2005

Université Paul Sabatier, Toulouse

The availability of very powerful computers enables the solution of larger and more complex problems in various applications. This has favoured the use of very sophisticated models, but has also stimulated many questions in the domain of numerical analysis. Most of the questions are related to the design of algorithms that are fast and accurate. Simulations tend to replace real-life experiments, because they are often cheaper, but it is of primary interest to be sure that a result obtained using a fast parallel computer is also close to the phenomenon that a real-life experiment would have produced.

The interplay of these two questions (computational efficiency and accuracy) is ubiquitous in the domain of linear algebra too. The domain of the solution of linear systems of equations provides numerous examples of this duality. For example, a perfect iterative method would be a method able to use efficiently a parallel machine to drive a stopping criterion down to a target value as quickly as possible.

In this work, we explore tools that enable us to obtain fast and accurate solutions on modern parallel architectures. We present theoretical tools for the analysis of the sensitivity and estimators for the reliability of the solution. These theoretical tools enable the analysis of complex solution methods without performing a complicated step-by-step study of round-off error propagation. A careful use of

RÉSUMÉS DE THÈSES

these theoretical tools is also a key ingredient in relaxed solution methods to introduce better parallelism and accelerate the computations. This will be clearly demonstrated on inexact Krylov methods and on preconditioning techniques for the solution of linear systems.

These ideas are being integrated in a set of CERFACS routines for the solution of linear systems that is very popular, as measured by the two thousand downloads of this software.

Most of the ideas presented here will be supported by numerical experiments on real-life applications in Data Assimilation for Geosciences and Electromagnetics.

Guillaume James

Ondes non linéaires en milieu discret

Soutenue le 15 décembre 2005 2005

Université Paul Sabatier, Toulouse

Ce travail porte sur l'étude mathématique d'ondes non linéaires dans des milieux unidimensionnels discrets, représentés par des réseaux hamiltoniens infinis. Nous nous intéressons à des oscillations spatialement localisées, pour lesquelles le système tend à l'infini vers une configuration d'équilibre (superposée dans certains cas à des ondes périodiques de très petite amplitude). Nous considérons des modes localisés non linéaires (« breathers »), spatialement localisés et périodiques en temps, et des ondes solitaires pulsatoires (« travelling breathers ») qui présentent les mêmes caractéristiques dans un repère en translation uniforme. Ces types d'oscillations font l'objet d'études intensives dans différents domaines de la physique théorique et expérimentale, par exemple en physique du solide, en optique non linéaire et en biophysique. Nous nous intéressons ici à leurs propriétés d'existence et de stabilité.

Pour différents modèles (réseaux de Fermi-Pasta-Ulam et de Klein-Gordon), nous considérons tout d'abord des ondes solitaires pulsatoires dont la vitesse de propagation et la fréquence d'oscillation interne sont commensurables. Leur étude se ramène à celle d'un système réversible d'équations différentielles avec avance et retard, dont la taille peut être arbitrairement grande. Nous montrons pour certains types de non-linéarités l'existence d'ondes solitaires pulsatoires de petite amplitude, dont la partie principale est décrite par l'équation de Schrödinger

RÉSUMÉS DE THÈSES

non linéaire, et qui admettent à l’infini des oscillations non amorties exponentiellement petites par rapport à l’amplitude de l’onde solitaire.

Par ailleurs, afin d’étudier des solutions non propagatives telles que les breathers, nous considérons le cas d’une dynamique « spatiale » suivant la coordonnée d’espace non bornée n , qui joue alors le rôle d’un « temps » discret. Cela nous conduit à démontrer un théorème de réduction à une variété centrale, pour des itérations d’applications en dimension infinie dont la partie linéaire est un opérateur non borné avec une propriété de séparation spectrale. Ce résultat général permet par exemple de montrer l’existence de breathers de petite amplitude dans le modèle de Fermi-Pasta-Ulam. Ces solutions correspondent aux orbites d’une certaine itération dans un espace de fonctions périodiques en temps, qui tendent vers 0 lorsque $n \rightarrow \pm\infty$.

Au delà du régime des petites amplitudes, nous complétons ces résultats par une étude numérique de l’existence et de la stabilité des solutions.

THÈSES DE DOCTORAT D’UNIVERSITÉ

Cédric Baudrit

Directeur de thèse : Didier Dubois

**Représentation et propagation de connaissances incertaines et imprécises :
Application à l’évaluation des risques liés aux sites et sols pollués.**

Soutenue le 19 octobre 2005

Université Toulouse

Actuellement, les choix relatifs à la gestion des sites potentiellement pollués s’appuient, notamment, sur une évaluation des risques pour l’homme et l’environnement. Cette évaluation est effectuée à l’aide de modèles qui simulent le transfert de polluant depuis une source de pollution vers une cible vulnérable, pour différents scénarii d’exposition. La sélection des valeurs des paramètres de ces modèles s’appuie autant que possible sur les données recueillies lors des investigations de terrain (phase de diagnostic de site). Or pour des raisons de délais et de coûts, l’information recueillie lors de cette phase de diagnostic est toujours incomplète ; elle est donc entachée d’incertitude. De même, les modèles de transferts et d’exposition présentent également des incertitudes à intégrer dans les procédures. Cette notion globale d’incertitude doit être prise en compte dans

RÉSUMÉS DE THÈSES

l'évaluation du risque pour que les résultats soient utiles lors la phase décisionnelle.

L'incertitude sur les paramètres peut avoir deux origines. La première provient du caractère aléatoire de l'information due à une variabilité naturelle résultant de phénomènes stochastiques. On parle alors d'incertitudes de variabilité ou d'incertitudes stochastiques. La seconde est liée au caractère imprécis de l'information lié à un manque de connaissance et qui résulte par exemple d'erreurs systématiques lors de mesures ou d'avis d'experts. On parle alors d'incertitudes épistémiques. Dans le calcul de risque, ces deux notions sont souvent confondues alors qu'elles devraient être traitées de manière différente.

L'incertitude en évaluation des risques a surtout été appréhendée dans un cadre purement probabiliste. Cela revient à supposer que la connaissance sur les paramètres des modèles est toujours de nature aléatoire (variabilité). Cette approche consiste à représenter les paramètres incertains par des distributions de probabilité uniques et à transmettre l'incertitude relative à ces paramètres sur celle du risque encouru par la cible, en appliquant en général la technique dite Monte Carlo. Si cette approche est bien connue, toute la difficulté tient à une définition cohérente des distributions de probabilité affectées aux paramètres par rapport à la connaissance disponible. En effet dans un contexte d'évaluation des risques liés à l'exposition aux polluants, l'information dont on dispose concernant certains paramètres est souvent de nature imprécise. Le calage d'une distribution de probabilité unique sur ce type de connaissance devient subjectif et en partie arbitraire.

L'information dont on dispose réellement est souvent plus riche qu'un intervalle mais moins riche qu'une distribution de probabilité. En pratique, l'information de nature aléatoire est traitée de manière rigoureuse par les distributions de probabilité classiques. Celle de nature imprécise est traitée de manière rigoureuse par des familles de distributions de probabilité définies au moyen de paires de probabilités cumulées hautes et basses ou, à l'aide de théories plus récentes, au moyen de distributions de possibilité (aussi appelées intervalles flous) ou encore au moyen d'intervalles aléatoires utilisant les fonctions de croyance de Dempster-Shafer.

Un des premiers objectifs de ce travail est de promouvoir la cohérence entre la manière dont on représente la connaissance sur les paramètres des modèles du risque et la connaissance dont on dispose réellement. Le deuxième objectif est de proposer différentes méthodes pour propager l'information de nature aléatoire et

RÉSUMÉS DE THÈSES

l'information de nature imprécise à travers les modèles du risque tout en essayant de tenir compte des dépendances entre les paramètres. Enfin, ces méthodes alternatives ont été testées sur des cas synthétiques puis sur des cas réels simplifiés, notamment pour proposer des moyens de présenter les résultats pour une phase décisionnelle.

- Calcul de dose : Transfert d'un polluant radioactif (le strontium) depuis le dépôt jusqu'à l'homme, au travers de la consommation d'un aliment (le lait de vache).
- Risque toxique après un déversement accidentel de trichloréthylène (TCE) au dessus d'une nappe d'eau (modèle semi analytique).
- Risque pour la santé liée aux sols pollués par des retombées de plomb.

Fabien Lavergne

Directeurs de thèse : Germain Garcia - Sophie Tarbouriech

**Méthodologie de synthèse de lois de commandes non-linéaires et robustes :
Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

*Soutenue le 21 octobre 2005
Université Toulouse II (Le Mirail)*

Le travail présenté dans ce mémoire de thèse s'inscrit dans le cadre de la commande non-linéaire et robuste des avions de transport. Le but de cette thèse est de coupler les propriétés de la commande non-linéaire (adaptation aux non-linéarités de l'avion, synthèse de correcteurs explicites, facilité de réglage une fois la synthèse réalisée, généricité des lois de commande obtenues) à des propriétés de robustesse indispensables à l'activité aéronautique. En effet, pour garantir la sécurité des vols tant en pilotage manuel qu'en pilotage automatique, les lois de commande doivent présenter des propriétés fortes de stabilité et de performances robustes.

Après une introduction au contexte industriel et de recherche du sujet de thèse, une partie « techniques, méthodes et outils » nous permet de mettre en avant les contributions du travail de thèse dans les domaines de la commande non-linéaire robuste et de la modélisation automatique.

La technique de commande non-linéaire robuste présentée, appelée commande RMI (Robust Multi-Inversion) s'appuie sur la technique désormais classique d'inversion de la dynamique, notamment étudiée à Airbus depuis quelques années

RÉSUMÉS DE THÈSES

(Fabrice VILLAUME, Jean DUPREZ) et qu'elle robustifie par l'adjonction d'une boucle supplémentaire d'observation.

Nous présentons aussi un outil de génération automatique de modèles non-linéaires, multivariés et embarquables, ainsi que les méthodes afférentes basées sur les réseaux de neurones. Cet outil est nécessaire à l'industrialisation des lois de commandes non-linéaires basées modèles.

La partie applicative de la thèse souligne ensuite les particularités du système « avion » et propose des architectures de lois de commande, des trajectoires de référence associées, et la validation avancée de l'ensemble par simulations sur simulateur certifié.

Enfin, après une conclusion sur le bilan de la thèse et les perspectives envisageables, nous proposons des annexes permettant d'approfondir certains aspects de notre étude.

Mots clés : Pilote automatique, atterrissage automatique, décollage automatique commande automatique du vol, commande non-linéaire, robustesse, réseaux de neurones, dynamique du vol, modélisation, inversion de la dynamique, commande RMI.

Nathalie Villa-Vialaneix

Directeur de thèse : Louis Ferré

Éléments d'apprentissage en statistique fonctionnelle - Classification et régression fonctionnelles par réseaux de neurones et support vector machine.

Soutenue le 21 octobre 2005

Université Toulouse II (Le Mirail)

Dans ce travail, nous présentons d'abord les résultats d'un travail interdisciplinaire dans lequel nous avons utilisé les qualités d'adaptation des perceptrons multi-couches pour la prédiction de cartes géographiques d'occupation du sol. Dans la suite de la thèse, nous nous focalisons sur la généralisation de l'utilisation des réseaux de neurones et des SVM au traitement de données fonctionnelles. Le but est de disposer d'outils non linéaires pour l'étude de ce type de données. Une partie de nos travaux est basée sur une approche semi-paramétrique utilisant une généralisation de la méthode de régression inverse au cadre fonctionnel. Enfin, nous explorons une approche différente par la construction de noyaux pour SVM qui prennent en compte la nature spécifique des données. Dans tous ces

RÉSUMÉS DE THÈSES

travaux, la théorie de l'apprentissage statistique joue un rôle important et nous nous attachons, autant que possible, à expliciter des résultats de convergence des méthodes décrites.

Pierre Martinon

Directeur de thèse : J. Noailles - J. Gergaud

Résolution numérique de problèmes de contrôle optimal par les méthodes homotopiques simpliciales

Soutenue le 4 novembre 2005

ENSEEIH- Toulouse

On s'intéresse ici à la résolution numérique de problèmes de contrôle optimal peu réguliers. On utilise à la base les méthodes dites indirectes, à la fois précises et rapides, mais en pratique parfois très sensibles à l'initialisation.

Cette difficulté nous amène à utiliser une démarche homotopique, dans laquelle on part d'un problème apparenté plus facile à résoudre. Le « suivi de chemin » de l'homotopie connectant les deux problèmes, est ici réalisé par un algorithme de type simplicial.

On s'intéresse en premier lieu à un problème de transfert orbital avec maximisation de la masse utile, puis à deux problèmes présentant des arcs singuliers. Dans les deux cas les algorithmes implémentés nous ont permis de résoudre les problèmes posés.

Les perspectives futures liées à ces travaux comprennent en particulier l'étude de problèmes à contraintes d'état, également délicats à résoudre par les méthodes indirectes. Par ailleurs, on souhaite comparer cette approche avec les méthodes directes, qui impliquent la discrétisation totale ou partielle du problème.

Mots clés : contrôle optimal, méthodes de tir, conditions nécessaires, principe du Maximum, contrôle bang-bang, arcs singuliers, homotopie, méthode simpliciale.

Macaire Batchi

Directeurs de thèse : Chérif Amrouche - Jean Batina

**Etude mathématique et numérique des phénomènes de transferts thermiques
liés aux écoulements instationnaires en géométrie axisymétrique**

Soutenue le 17 novembre 2005

Université de Pau et des Pays de l'Adour

L'étude des problèmes relatifs aux transferts thermiques convectifs instationnaires en écoulement axisymétrique a permis d'obtenir des résultats numériques qui ont donné lieu à une interprétation physique cohérente et une comparaison en bon accord avec des résultats antérieurs. L'objet de cette étude, tant du point de vue théorique que numérique, visait essentiellement à considérer des conditions aux limites non homogènes, périodiques en temps, associées aux équations de Navier-Stokes et de l'énergie, et dont le but est d'obtenir des solutions périodiques en temps. L'analyse au plan mathématique a permis de mettre en évidence l'existence des solutions fortes en 2D par la méthode de Galerkin et en utilisant les arguments de compacité. L'hypothèse de périodicité en temps prise en compte grâce à l'instationnarité imposée à l'écoulement, nous a permis d'établir un résultat d'existence de solutions fortes reproductives de notre problème. Les solutions du problème thermique sont obtenues en tenant compte des estimations a priori portant sur la vitesse et aussi des hypothèses appropriées de la température de paroi. Nous proposons ensuite une résolution numérique en espace par la méthode spectrale de Galerkin dont la base de projection construite à partir des polynômes de Chebyshev vérifie les conditions aux limites homogènes. Le problème discret non linéaire obtenu est résolu par l'algorithme classique de Newton. L'intégration en temps du problème instationnaire est réalisée par un schéma d'ordre 2 de Crank-Nicolson dans lequel la source de pulsation placée à l'entrée de la conduite est à prendre en compte dans le relèvement des conditions aux limites à chaque instant du traitement.

Sébastien Martin

Directeurs de thèse : Guy Bayada - Carlos Vasquez

Contribution à la modélisation de phénomènes de frontière libre en mécanique des films minces.

Soutenue le 21 novembre 2005

INSA Lyon

Cette thèse est consacrée à l’analyse mathématique, à la modélisation et au calcul scientifique des problèmes d’interface dans des milieux fluides de faible épaisseur. Les problèmes d’interface liquide-gaz de type cavitation apparaissent dans la plupart des mécanismes lubrifiés et leur modélisation a toujours été un sujet très discuté en tribologie. Celle-ci a initialement utilisé (et utilise encore) des inéquations variationnelles mais l’inadéquation de ce modèle qui est non conservatif a conduit à introduire de manière heuristique une modélisation basée sur un système hyperbolique-elliptique. Cependant, cette nouvelle modélisation fait apparaître, elle aussi, ses limitations dès lors que l’on s’intéresse à des conditions de fonctionnement plus réalistes. Parmi ces limitations, on peut citer :

- la possibilité d’utiliser ce modèle en présence de rugosités. Il s’agit, du point de vue mathématique, de l’homogénéisation d’une équation en pression-saturation,
- la prise en compte de la déformation élastique de surfaces solides due à la pression hydrodynamique du fluide adjacent. Pour cela, il est habituel en élastohydrodynamique (E.H.D.) de modifier les coefficients de l’équation de l’écoulement par l’introduction d’un terme intégral (déformation du type Hertz). La modélisation de la cavitation intervient dans la partie hydrodynamique et, par suite, sur l’ensemble du couplage.
- la possibilité de justifier ou non ce modèle à partir d’une description bifluide rigoureuse de l’écoulement et d’en déduire ainsi une procédure de calcul du frottement associé à l’écoulement mince.

Nous étudions ces différents aspects qui permettent de justifier la pertinence du modèle de cavitation considéré.

Julien Bidot

Directeur de thèse : Bernard Grabot

Un cadre général intégrant les approches pour ordonnancer sous incertitudes

Soutenue le 28 novembre 2005

Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tarbes

L'élaboration et la mise en œuvre d'un ordonnancement dans un contexte industriel doivent souvent prendre en compte le caractère non déterministe de l'environnement d'exécution pour pouvoir assurer une certaine performance. Pour cela, il est important de produire et de maintenir un ordonnancement robuste avec une qualité satisfaisante tout en respectant des contraintes sur le temps de recherche et sur la mémoire.

Nous proposons une nouvelle classification des techniques utilisées pour construire des ordonnancements sous incertitudes qui permet de comparer toutes les approches et les systèmes d'ordonnancement et de planification en fonction de la manière dont sont prises les décisions ; c'est-à-dire, elles prennent en compte l'incertitude (*proaction*) ou non ; elles sont remises en cause (*révision*) ou non et elles sont prises au fur et à mesure sur un horizon glissant plus ou moins long (*progression*).

Nous présentons aussi un modèle d'élaboration et d'exécution d'ordonnements basé sur notre classification. Il s'agit d'un automate qui se développe au fur et à mesure de l'exécution. Les états de cet automate sont des ordonnancements flexibles et plus ou moins complets représentés sous forme de réseaux de contraintes. On passe d'un état à un autre de cet automate lorsque des contraintes sont violées ou lorsque certaines conditions sont vérifiées ; par exemple, on doit sélectionner et ordonnancer un nouveau groupe d'opérations pour anticiper l'exécution. Les approches proactives, progressives et de révision sont intégrées dans cet automate.

Enfin, nous proposons une instanciation de notre modèle de génération et d'exécution en utilisant les composants ILOG Solver et Scheduler. Il s'agit de résoudre un problème d'ordonnement d'atelier à cheminements multiples étendu dans la mesure où il comporte des ressources alternatives, des coûts d'allocation et de retard ainsi que des incertitudes temporelles et de ressources. Un modèle probabiliste du problème est utilisé et des indicateurs de robustesse sont utilisés pour qualifier les solutions. Des techniques de propagation de contraintes avec re-

RÉSUMÉS DE THÈSES

cherche de grands voisinages sont combinées avec de la simulation Monte Carlo pour prendre des décisions.

Mots clés : Ordonnancement, planification de tâches, incertitudes, satisfaction de contraintes, robustesse, flexibilité, optimisation combinatoire

Ahmed Touhami

Directeurs de thèse : M. Daydé - D. Ruiz

Utilisation des filtres de Tchebycheff et construction de préconditionneurs spectraux pour l'accélération des méthodes de Krylov

Soutenue le 25 novembre 2005

ENSEEIHTToulouse

Le contexte de ce travail est l'algèbre linéaire numérique. Plus précisément, on s'est intéressé à des préconditionnements pour les méthodes de Krylov, basés sur une connaissance de certains espaces propres.

Ces techniques sont en particulier très utiles lorsque l'on résout une séquence de systèmes linéaires avec la même matrice mais différents seconds membres.

L'information sur les espaces propres est extraite dans une phase d'initialisation, ou au cours de la résolution du premier système, et utilisée dans la résolution des systèmes suivants. L'approche développée dans cette thèse se base sur l'utilisation des filtres polynômiaux de Tchebycheff et sur la construction de préconditionneurs spectraux pour l'accélération des méthodes de Krylov.

Mots-clés : polynômes de Tchebycheff, méthode de Lanczos, gradient conjugué, filtrage, déflation, cycle à deux grilles, préconditionnement spectral, préconditionnement adaptatif, systèmes non linéaires, systèmes augmentés, méthodes de Krylov.

Houari Khenous

Directeurs de thèse : P. Laborde-Y. Renard

Problèmes de contact unilatéral avec frottement de Coulomb en élastostatique et élastodynamique. Etude mathématique et résolution numérique

Soutenue le 25 novembre 2005

INSA Toulouse

La modélisation des problèmes de contact pose de sérieuses difficultés conceptuelles, mathématiques et informatiques bien plus complexes que celles qui proviennent de la mécanique des structures linéaire classique. Motivés par le rôle fondamental que joue le contact dans les applications en calcul de structures, nous nous intéressons aux problèmes de contact unilatéral et frottement (statique et dynamique) en petites déformations. Cette thèse est consacrée à l'étude de certaines formulations et méthodes pour résoudre ce problème et se décompose en deux grandes parties. La première partie est consacrée à la présentation de la discrétisation hybride du problème de contact unilatéral avec frottement de Coulomb. Une formulation avec projection est étudiée et un résultat d'existence et d'unicité est donné pour le problème discret. Différentes méthodes de résolution sont présentées (Newton, méthode itérative, points fixes, Uzawa) et comparées en termes de nombre d'itérations et en termes de robustesse par rapport au coefficient de frottement. La deuxième partie concerne le problème de contact élastodynamique. Plusieurs schémas classiques d'intégration en temps (la θ -méthode, schéma de Newmark, point milieu) sont présentés dans cette partie. On donne aussi de nouvelles stratégies (schéma de Paoli et Schatzman, schéma avec la loi de contact équivalente, schéma avec la matrice de masse équivalente) pour venir à bout des difficultés rencontrées avec les schémas précédents. Cette dernière méthode nous permet de conserver l'énergie du problème et de montrer un résultat d'existence d'une solution lipschitzienne pour le problème de contact élastodynamique discret. Ces résultats sont validés par des simulations numériques.

Mots clés : élasticité, contact unilatéral, frottement de Coulomb, bipotentiel de De Saxcé, frottement de Tresca, inéquations variationnelles, méthode de Newton, schémas d'intégration en temps, conservation de l'énergie, stabilité, matrice de masse équivalente, simulations numériques.

Pierre Crispel

Directeurs de thèse : P. Degond - M-H Vignal - J-F Roussel

**Modélisation et simulation de la transition de l’arc électrique primaire vers
l’arc électrique secondaire sur un panneau solaire de satellite**

Soutenue le 30 novembre 2005

ONERA-Toulouse

Dans ce travail nous avons développé divers schémas numériques pour la description fluide d’un plasma quasi-neutre en expansion dans le vide entre deux électrodes. Le modèle de référence de notre étude est le modèle bifluide (ions et électrons) Euler-Poisson. Les simulations font apparaître qu’à l’extrémité du plasma injecté à la cathode, des électrons sont émis vers l’anode sous la forme d’un faisceau. Ce modèle fournit une bonne description du plasma, mais l’existence d’une condition de stabilité numérique sur le pas de temps liée à la quasi-neutralité engendre des coûts de calcul prohibitifs pour l’application physique à laquelle nous nous intéressons (arcs électriques, plasma froids extrêmement denses).

A partir de ce modèle, une première stratégie conduisant à une première gamme de schémas consiste à explorer la limite formelle quasi-neutre dans Euler-Poisson. Il en ressort un modèle de plasma quasi-neutre dont la dynamique est liée au faisceau électronique auquel il doit être couplé par la résolution d’un modèle d’interface. Ceci est réalisé et implémenté en 1D.

Une seconde stratégie est d’explorer l’existence d’un schéma asymptotiquement stable dans la limite quasi-neutre pour décrire le modèle bifluide Euler-Poisson (ici le couplage entre faisceau et plasma ne pose plus problème). Par une reformulation de l’équation de Poisson, nous montrons qu’il existe un algorithme de coût explicite permettant d’obtenir un schéma pour lequel le pas de temps et le pas d’espace sont indépendants de la quasi-neutralité du plasma. Cet algorithme est implémenté en 1D et en 2D, sa stabilité est étudiée sur plusieurs cas-tests.

Au cours de cette thèse ont aussi été réalisées des études de modélisation OD, autour des phénomènes de gaine d’arc et d’amorce de l’arc dans le contexte du chargement des panneaux solaires dans l’espace. Cette étude permet de modéliser les conditions aux limites de potentiel électrique et d’injection du plasma relatives à l’application physique étudiée.

Véronique Bagland

Directeurs de thèse : P. Laurençot - M. Lemou

Etude mathématique de quelques modèles issus de la théorie cinétique

Soutenue le 2 décembre 2005

Université Paul Sabatier, Toulouse

Dans cette thèse, on s'intéresse à différentes équations issues de la théorie cinétique. Tout d'abord, on considère une équation de Landau pour les particules de Fermi-Dirac. On montre l'existence d'une solution au problème de Cauchy associé et on détermine les états d'équilibre. Ensuite, dans une deuxième partie, on s'intéresse aux systèmes de moments pour l'équation de Boltzmann en relativité restreinte et on détermine les espaces de moments relativistes adéquats. Dans une troisième partie, on étudie les états stationnaires d'une équation de Kac avec thermostat dans le cas où la section efficace est supposée non-intégrable. Finalement, la quatrième partie est consacrée à l'étude d'une équation issue de la théorie de la coagulation, l'équation de Oort-Hulst-Safronov, qui est approchée par une suite d'équations discrètes.

Wen-Chi Lu

Directeurs de thèse : F. Mora-Camino - M. de Coligny

Contribution au suivi automatique de trajectoires par un avion : commande plate et réseaux de neurones

Soutenue le 7 décembre 2005

Université Paul Sabatier, Toulouse

Ce travail de thèse aborde le problème de la synthèse de lois de guidage avion basées sur le suivi dynamique de trajectoires de référence. Il s'agit donc d'établir des lois génériques qui s'appliquent de façon continue, quelle que soit la trajectoire de référence, contrairement aux systèmes de guidages actuels qui sont basés sur le suivi en séquence de modes de guidage prédéfinis. Un état de l'art est réalisé concernant les techniques de synthèse de lois de suivi de trajectoires, de même que pour les lois de pilotage des avions de transport. Après avoir rappelé la notion de 'sorties plates' pour un système dynamique non linéaire, les principaux éléments de la commande dite 'plate' qui en résulte, sont introduits. La question de la platitude de la dynamique du vol est alors abordée et il est démontré que

la trajectoire suivie par le centre de gravité d'un avion constitue une sortie plate de sa dynamique de guidage. Compte tenu de la complexité des phénomènes aérodynamiques associés au vol des aéronefs, cette propriété de platitude est reconnue être de nature implicite. Il est proposé dans cette étude de procéder à l'inversion de la dynamique de guidage, afin d'obtenir des consignes de pilotage adéquates au suivi de trajectoire, en utilisant des réseaux de neurones. La question de l'apprentissage d'un réseau de neurones réalisant cette inversion est alors étudiée. Les performances obtenues dans le cas d'un tel réseau de neurones pour un avion léger sont alors étudiées. Une structure de commande destinée au suivi de trajectoire est alors proposée, celle-ci étant basée sur la commande plate, l'inversion neuronale et une correction en ligne. Les résultats obtenus par simulation numérique pour différentes trajectoires de référence sont présentés et analysés.

Jérôme Demange

Directeur de thèse : Dominique Bakry

Des équations à diffusion rapide aux inégalités de Sobolev sur les modèles de la géométrie.

*Soutenue le 8 décembre 2005
Université Paul Sabatier, Toulouse*

Nous démontrons dans comment l'étude d'équations à diffusion rapide telles que

$$\partial_t u = \Delta u^{1-1/n}, \quad n \in \mathbb{R}, \quad n > 2,$$

conduit à établir des inégalités de Sobolev sous des conditions de courbure minorée et de dimension finie sur l'opérateur différentiel Δ . Nous distinguons trois cas : tout d'abord lorsque la courbure est positive ou nulle et la dimension est finie $n > 2$. Dans ce cas, s'il existe une fonction strictement convexe, nous établissons une famille d'inégalités de Sobolev généralisées qui interpole entre une inégalité de Sobolev logarithmique et une inégalité de Sobolev avec dimension n . Ce résultat généralise ce qui est connu sur l'espace euclidien, de courbure nulle.

Dans un deuxième temps, nous étudions le cas où la courbure est strictement positive et la dimension n est finie. Nous établissons à nouveau des familles d'inégalités qui interpolent entre une inégalité de Sobolev logarithmique et une inégalité de Sobolev avec dimension n . Nous établissons également des versions améliorées de ces inégalités, ainsi que des estimations de la vitesse de convergence à l'équilibre de ces équations à diffusion rapide. En outre, nous prouvons

qu’une équation donnée conduit à plusieurs inégalités, et réciproquement. Ces résultats généralisent ce qui est connu sur le modèle de la sphère de dimension n . Dans un troisième temps, nous étudions le cas plus difficile de la courbure négative $-\rho < 0$, et de la dimension finie n : nous établissons l’existence d’une inégalité de Sobolev de dimension n dès lors qu’il existe une fonction $T > 0$ telle que :

$$\nabla \nabla T > \frac{\rho}{n-1} T.$$

Sur le modèle donné par l’espace hyperbolique, cette inégalité redonne l’inégalité de Sobolev de cet espace. Dans un dernier temps, nous présentons des résultats sur des inégalités de Harnack sous la condition de courbure positive ou nulle, et dimension finie, qui généralisent ceux existant.

Mots clés : Inégalités de Sobolev, méthodes d’Entropie, équations à diffusion rapide, critère de courbure-dimension.

Géraldine Quinio

Directeurs de thèse : P. Degond - F. Rogier

Modélisation numérique de la génération d’un plasma d’air dans un écoulement

Soutenue le 9 décembre 2005

INSA, Toulouse

Afin de diminuer la signature radar d’une entrée d’air d’aéronef, un dispositif envisagé consiste en l’ionisation partielle de l’air au niveau de l’entrée d’air. L’objectif de la thèse est de développer des modèles mathématiques et numériques permettant de mieux appréhender les principaux mécanismes physiques intervenant dans la génération d’un plasma d’air à pression atmosphérique soumis à un vent. Une analyse asymptotique d’un modèle 0D de cinétique de création d’un plasma d’air dans un écoulement a été effectuée. Le maintien du plasma repose sur la présence des métastables permettant de détacher des électrons d’ions négatifs et sur la vitesse de l’écoulement porteur. Dans un second temps, nous nous sommes intéressés au dispositif des décharges capillaires générant une décharge homogène dans l’air à pression atmosphérique. Un modèle 0D a été conçu afin de comprendre les principaux mécanismes physiques intervenant dans l’initiation de la décharge. Les simulations numériques ont montré l’importance des phénomènes aux parois. Enfin, une dernière partie est consacrée à l’élaboration et à l’étude

RÉSUMÉS DE THÈSES

d'un modèle numérique bidimensionnel d'une décharge continue Pointe Négative Plan dans une entrée d'air. Le modèle est constitué d'un système d'équations non-linéaires de convection/diffusion/réactions couplées à l'équation de Poisson. Le courant induit par la circulation du plasma dans le circuit extérieur est relié au potentiel par une équation différentielle ordinaire en temps. Les simulations numériques montrent que lorsque le vent devient important, la formation périodique de canaux plasmiques dérivant ensuite le long de l'écoulement porteur est observée.

Guillaume Dufour

Directeurs de thèse : M. Massot - P. Villedieu

Modélisation multi-fluide eulérienne pour les écoulements diphasiques à inclusions dispersées

Soutenue le 12 décembre 2005

Université Paul Sabatier, Toulouse

Les écoulements diphasiques à inclusions dispersées, constitués d'une phase liquide dispersée sous forme de gouttelettes dans une phase gazeuse porteuse, sont à la base d'un grand nombre d'applications. Nous pouvons en particulier citer le cas de l'injection de carburant dans un moteur ou les applications à propulsion solide. Nous proposons dans cette thèse la modélisation et la simulation de ce type d'écoulements dans un formalisme multi-fluide eulérien. Cette approche, introduite par Y. Tambour en 1985, repose sur une discrétisation de l'espace des phases en taille des gouttes. L'intérêt de cette méthode réside dans sa capacité, contrairement à ce que permet le modèle bi-fluide classique, à prendre en compte des phénomènes complexes dépendant de la distribution en taille des gouttes tels que la fragmentation secondaire et la coalescence.

Dans un premier temps, nous donnons la marche à suivre pour obtenir ce type de modèle, en nous appuyant sur l'équation cinétique régissant l'évolution du brouillard de gouttes. Nous faisons alors le lien avec le modèle bi-fluide et proposons, en nous inspirant des méthodes de moments, une extension au second ordre du modèle multi-fluide, ce qui permet de limiter le phénomène de diffusion numérique et d'utiliser cette méthode avec une discrétisation peu fine (et donc de gagner en temps de calcul). Cet aspect est mis en évidence par l'étude

RÉSUMÉS DE THÈSES

d'un schéma pour l'évaporation de gouttes, la précision de ce schéma étant comparée à celle de la méthode multi-fluide classique ainsi qu'à celle d'un schéma de type MUSCL.

Dans un second temps, des simulations numériques des phénomènes de fragmentation secondaire et de coalescence ont également été menées dans le cadre de cette thèse. En particulier, nous présentons une comparaison des résultats obtenus avec la modélisation multi-fluide avec une simulation lagrangienne d'une part et des résultats expérimentaux d'autre part.

Enfin, nous proposons dans une troisième partie deux aspects théoriques liés à cette modélisation. Le premier aspect concerne l'existence et l'unicité de solutions pour l'équation cinétique avec fragmentation secondaire. Puis nous étudions les implications d'une des hypothèses fondamentales du modèle multi-fluide, à savoir que les gouttes de même taille ont même vitesse, à travers l'étude du système des gaz sans pression (en nous appuyant sur un résultat de P.E. Jabin) ainsi que du système d'Euler des gaz isothermes.

Mots clés : Modèle bi-fluide, modèle multi-fluide, écoulements diphasiques, méthodes de moments, fragmentation secondaire, coalescence, évaporation, équation cinétique, brouillard polydispersé.

Jean-Baptiste Thévenet

Directeur de thèse : D. Noll - P. Apkarian

Techniques d'optimisation avancées pour la synthèse de lois de commande

Soutenue le 13 décembre 2005

Université Paul Sabatier, Toulouse

La résolution de nombreux problèmes d'automatique n'est pas couverte par les techniques disponibles actuellement. Elle nécessite des développements algorithmiques importants en optimisation, dans le domaine des inégalités matricielles non-convexes. Cette thèse met en oeuvre plusieurs approches complémentaires dans ce contexte.

En premier lieu, les méthodes « spectral SDP », basées sur l'utilisation de Lagrangiens augmentés, nous conduisent à la conception d'un logiciel, specSDP, et à la résolution d'un grand nombre d'exemples numériques en commande : synthèse multi-modèles ou structurée, contrôle d'ordre réduit. Une étude de convergence

RÉSUMÉS DE THÈSES

locale est également menée pour le cas classique, présageant d'évolutions positives.

La deuxième approche proposée s'inspire d'une formulation non-lisse des problèmes BMI et des techniques associées. Nous exhibons, pour cette méthode, des résultats numériques probants, obtenus sur des exemples de grande dimension, qui mettent en échec les rares méthodes existantes.

Mots clés : Systèmes dynamiques, commande d'ordre réduit, optimisation non-convexe, contraintes LMI / BMI, Lagrangien augmenté, méthodes « spectral SDP », techniques non-lisses.

Claudia Negulescu

Directeur de thèse : Naoufel Ben Abdallah

Asymptotical models and numerical schemes for quantum systems

Soutenue le 15 décembre 2005

Université Paul Sabatier, Toulouse

Cette thèse s'intéresse à la modélisation mathématique et à la simulation numérique du transport électronique dans des dispositifs semiconducteurs nanométriques. Différents modèles de transport, destinés à la description des diverses régions d'un transistor MOSFET, sont introduits et analysés.

Une attention particulière est portée sur la modélisation des effets quantiques ayant lieu dans ces dispositifs. L'approche repose sur la résolution du système auto-consistant de Schrödinger/Poisson avec des conditions aux bords ouvertes. La simulation numérique joue un rôle important. Une méthode originale, basée sur une méthode rapide de décomposition en sous-bandes et sur l'approximation WKB, est introduite et les premiers pas vers l'analyse numérique du schéma proposé sont présentés. De plus, l'analyse asymptotique d'un modèle de type « scattering matrix » est réalisée, prenant en compte à la fois des effets quantiques et des petites longueurs de cohérence. Finalement, une limite de diffusion est considérée afin d'obtenir des modèles adiabatiques quantique/fluide à partir des modèles adiabatiques quantique/cinétique.

Delphine Salort

Directeur de thèse : J.-Y. Chemin

Propriétés dispersives pour les équations de la mécanique en géométries courbes

Soutenue le 15 décembre 2005

Université Paris 6

Cette thèse porte sur l'étude de deux équations physiquement reliées entre elles : l'équation de Schrödinger qui est l'équation de base de la mécanique quantique et l'équation de Liouville reliée à la mécanique classique. Le lien entre ces deux équations se fait en passant à la limite semi-classique. L'objectif est d'étudier les propriétés de régularité, de dispersion et d'intégrabilité des solutions de ces deux équations séparément et de comprendre dans quelle mesure le comportement qualitatif des solutions mis en évidence par la modélisation classique est proche de celui mis en évidence par la modélisation quantique.

Concernant l'équation de Schrödinger, on montre des estimations de Strichartz pour des équations de Schrödinger avec des opérateurs non elliptiques et dans le cas particulier de la dimension 1. Concernant l'équation de Liouville, on décrit le comportement de la solution en fonction de la géométrie des trajectoires et on met en évidence une analogie entre les estimations de Strichartz obtenues pour les solutions de l'équation de Schrödinger et celles obtenues pour les solutions de l'équation de Liouville.

La Smai offre une unique adhésion gratuite à la Smai pour un an aux jeunes chercheurs en mathématiques qui ont soutenu récemment leur thèse et l'ont enregistrée MathDoc :

<http://math-doc.ujf-grenoble.fr/Theses/>

Afin que cette offre prenne effet, le jeune docteur doit remplir le formulaire d'adhésion :

http://smai.emath.fr/article.php3?id_article=71 en :

1. cochant la case « Opération Thèse-Math 2005 »,
2. remplissant les lignes « Date de la thèse » et « URL complet du résumé de votre thèse ».

Notes de lecture

S. BOYD , L. VANDENBERGHE : *Convex Optimization*
Cambridge University Press, 2004, ISBN 0 521 83378 7.

NOTES DE LECTURE

This book, deliberately intended for practitioners, was motivated by the considerable development of interior-point methods in the last decade, for the resolution of sufficiently structured convex optimization problems. The authors have taken an active part in the application of these methods to various fields of interest—mostly related with systems and control, in which they are expert.

The first and largest part of its 700 pages is devoted to theory, that is : convex analysis. The corresponding four chapters overview successively basic theory of convex sets and functions, convex optimization problems, and finally duality theory (in the convex case), including optimality conditions.

I really enjoyed this part, full of lucid explanations : it is the reader’s intelligence that is called for ; not his memory. This goes in contrast with quite a number of textbooks in convex analysis, which are rather a dump of concepts and results among which the milestones are difficult to distinguish.

The second part concerns applications—one should say illustrative semiapplications. In fact, we find there : approximation and fitting, statistical estimation, geometric-like problems dealing with distances, angles, volumes. Rather than applications proper, issued from real life (like optimum design of an antenna, say), these problems come from other branches of mathematics ; they are selected « to show the reader, by example, how convex optimization can be applied in practice ». Indeed the authors have been honest enough to carefully avoid applications issued from their own field of expertise. Here again the reader’s intelligence is stimulated, the aim of the game being to appropriately formulate a given application where convexity is not necessarily blatant.

Finally we come to optimization algorithms : gradient and Newton for unconstrained problems (possibly with linear equality constraints), and the adaptation of the latter for inequality constraints, via the interior-point paradigm. The content of this part needs comment.

REVUE DE PRESSE

First of all, the reader (the buyer !) must be warned that the title of the book overlooks an important property : differentiability. Most convex functions in practice are not differentiable : they are often obtained via the max operation, which destroys differentiability. Now, to minimize a (convex and) differentiable function, the method of choice is normally quasi-Newton, easy to implement, with good theoretical properties, and having amply proved its efficiency for nearly 50 years. As a result, the methods considered here are relevant for a rather limited class of functions : say linear, quadratic, exponential, log, entropy (knowing that the latter two are concave); and a curiosity which turns out to be of fundamental importance for a number of applications : log of determinant.

As mentioned earlier, the whole book is characterized by clarity. Results come “in the course of the conversation”, together with their proof ; a very pedagogical approach (although one sometimes lacks the comfort of accurately stated assumptions). Lots of exercises conclude each chapter.

In summary : a very good pedagogical book with a misleading title ; excellent to grasp the important concepts of convex analysis, to develop an art in modelling optimization problems intelligently, and to get a limited flavour of what optimization algorithms can be.

Par C. LEMARÉCHAL

CORRESPONDANTS RÉGIONAUX

CORRESPONDANTS RÉGIONAUX

Amiens *Alberto Farina*
LAMFA
Université Picardie Jules Verne
33 rue Saint Leu
80039 AMIENS Cedex
Tél. : 03 22 82 75 88 - Fax : 03 22 82 75 02
Alberto.Farina@u-picardie.fr

Antilles-Guyane *Marc Lassonde*
Mathématiques
Université des Antilles et de la Guyane
97159 POINTE A PITRE
Marc.Lassonde@univ-ag.fr

Avignon *Alberto Seeger*
Département de Mathématiques
Université d'Avignon
33 rue Louis Pasteur
84000 AVIGNON
Tél. : 04 90 14 44 93 - Fax : 04 90 14 44 19
alberto.seeger@univ-avignon.fr

Belfort *Michel Lenczner*
Laboratoire Mécatronique3M - UTBM
90010 Belfort Cedex
Tél. : 03 84 58 35 34 - Fax : 03 84 58 31 46
Michel.Lenczner@utbm.fr

Besançon *Mihai Bostan*
UFR Sciences et Techniques
16 route de Gray
25030 Cedex BESANÇON
Tél. : 03 81 66 63 38 - Fax : 03 81 66 66 23
mbostan@descartes.univ-fcomte.fr

Bordeaux *Cédric Galusinski*
Laboratoire de Mathématiques
Appliquées
Université de Bordeaux I
351 cours de la Libération
33405 TALENCE Cedex
Tél. : 05 57 96 21 28 - Fax : 05 56 84 26 26
galusins@math.u-bordeaux.fr

Brest *Marc Quincampoix*
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université de Bretagne Occidentale
BP 809 - 29285 BREST Cedex
Tél. : 02 98 01 61 99 - Fax : 02 98 01 67 90
Marc.Quincampoix@univ-brest.fr

Cachan ENS *Sylvie Fabre*
CMLA-ENS Cachan
61 avenue du Président Wilson
94235 CACHAN Cedex
fabre@cmla.ens-cachan.f

Clermont - Ferrand *Rachid Touzani*
Laboratoire de Mathématiques
Appliquées
Université Blaise Pascal,
BP 45 - 63177 AUBIERE Cedex
Tél. : 04 73 40 77 06 - Fax : 04 73 40 70 60
Rachid.Touzani@math.univ-bpclermont.fr

Compiègne *Véronique Hédou-Rouillier*
Équipe de Mathématiques Appliquées
Département Génie Informatique
Université de Technologie

CORRESPONDANTS RÉGIONAUX

CORRESPONDANTS RÉGIONAUX

BP 20529 -
60205 COMPIEGNE Cedex
Tél : 03 44 23 49 02 - Fax : 03 44 23 44 77
Veronique.Hedou@dma.utc.fr

Dijon *Christian Michelot*
UFR Sciences et techniques
Université de Bourgogne
BP400
21004 DIJON Cedex
Tél. : 03 80 39 58 73 - Fax : 03 80 39 58 90
michelot@u-bourgogne.fr

Evry la Génopole *Bernard Prum*
Département de Mathématiques
Université d'Évry Val d'Essonne
Bd des Coquibus
91025 ÉVRY Cedex
Tél. : 01 60 87 38 06 - Fax : 01 60 87 38 09
prum@genopole.cnrs.fr

Grenoble *Pierre Saramito*
Laboratoire de Modélisation et Calcul - IMAG
Université Joseph Fourier - BP 53
38041 GRENOBLE Cedex 9
Tél. : 04 76 51 46 10 - Fax : 04 76 63 12 63
Pierre.Saramito@imag.fr

Grenoble 2 *Frédérique Letué*
Bât. des Sciences de l'homme de la société - BP 47
38040 GRENOBLE Cedex 9
Tél. : 04 76 82 59 58 - Fax : 04 76 82 56 40
Frederique.Letue@iut2.upmf-grenoble.fr

Israël *Ely Merzbach*
Dept. of Mathematics and Computer

Science
Bar Ilan University, Ramat Gan.
Israël 52900
Tél. : (972-3)5318407/8 - Fax : (972-3)5353325
merzbach@macs.biu.ac.il

La Réunion *Philippe Charton*
Dépt. de Mathématiques et Informatique
IREMIA,
Université de La Réunion - BP 7151
97715 SAINT-DENIS Cedex 9
Tél. : 02 62 93 82 81 - Fax : 02 62 93 82 60
Philippe.Charton@univ-reunion.fr

Le Havre *Adnan Yassine*
ISEL
Quai Frissard
B.P. 1137
76063 LE HAVRE Cedex
Tél. : 02 32 74 49 16 - Fax : 02 32 74 49 11
adnan.yassine@univ-lehavre.fr

Lille *Caterina Calgaro*
Laboratoire Paul Painlevé - UMR 8524
Université des Sciences et Technologies de Lille
Bat. M2, Cité Scientifique,
59655 VILLENEUVE D'ASCQ Cedex
Tél. : 03 20 43 47 13 - Fax : 03 20 43 68 69
Caterina.Calgaro@univ-lille1.fr

Limoges *Paul Armand*
LACO, ESA 6090 - Univ. de Limoges
123 avenue A. Thomas
87060 LIMOGES Cedex
Tél. : 05 55 45 73 30 - Fax : 05 55 45 73 22
paul.armand@unilim.fr

CORRESPONDANTS RÉGIONAUX

Lyon *Michèle Chambat*

Laboratoire d'Analyse Numérique
MAPLY - Bat. 10
Université Lyon I
43 bd du 11 Novembre 1918
69622 VILLEURBANNE Cedex
Tél. : 04 72 44 85 25 - Fax : 04 72 44 80 53
chambat@lan.univ-lyon1.fr

Marne La Vallée *Pierre Vandeker-
khove*

Equipe d'Analyse et de Mathématiques
Appliquées
Université de Marne-la-Vallée
Cité Descartes
5 bd Descartes -
77454 MARNE-LA-VALLÉE Cedex 2
Fax : 01 60 95 75 45
vandek@math.univ-mlv.fr

Maroc *Khalid Najib*

École nationale de l'industrie minérale
Bd Haj A. Cherkaoui, Agdal
BP 753, Rabat Agdal
01000 RABAT
Tél. : 00 212 37 77 13 60 - Fax : 00 212 37 77
10 55
najib@enim.ac.ma

Mauritanie *Zeine Ould Mohamed*

Équipe de Recherche en Informatique
et Mathématiques Appliquées
Faculté des Sciences et Techniques
Université de Nouakchott
BP 5026 - NOUAKCHOTT-AURITANIE
Tel : 222 25 04 31 - Fax : 222 25 39 97
zeine@univ-nkc.mr

Metz *Zakaria Belhachmi*

Département de Mathématiques
Université de Metz
Ile du Saulcy - 57 045 METZ Cedex
01.
Tél. : 03 87 54 72 87 - Fax : 03 87 31 52 73
belhach@poncelet.univ-metz.fr

Montpellier *Oana Iosifescu*

Laboratoire ACSIOM
Université de Montpellier II, CC51
Place Eugène Bataillon
34095 MONTPELLIER Cedex 5
Tél : 04 67 14 32 58 - Fax : 04 67 14 35 58
iosifescu@math.univ-montp2.fr

Nantes *Catherine Bolley*

École Centrale de Nantes
BP 92101 - 44321 NANTES Cedex 3.
Tél : 02 40 37 25 17 - Fax : 02 40 74 74 06
Catherine.Bolley@ec-nantes.fr

Nancy *Didier Schmitt*

Institut Élie Cartan
Université de Nancy 1 - BP 239
54506 VANDŒUVRE LÈS NANCY ce-
dex
Tél. : 03 83 91 26 67 - Fax : 03 83 28 09 89
Didier.Schmitt@iecn.u-nancy.fr

Nice *Chiara Simeoni*

Lab. Jean-Alexandre Dieudonné
UMR CNRS 621
Université de Nice, Parc Valrose
06108 NICE Cedex 2
Tél. : 04 92 07 60 31 - Fax : 04 93 51 79 74
simeoni@math.unice.fr

CORRESPONDANTS RÉGIONAUX

Orléans *Maitine Bergounioux*
Département de Mathématiques
UFR Sciences
Université d'Orléans - BP. 6759
45067 ORLEANS Cedex 2
Tél. : 02 38 41 73 16 - Fax : 02 38 41 72 05
maitine.bergounioux@univ-orleans.fr

Paris I *Jean-Marc Bonnisseau*
UFR 27 - Math. et Informatique
Université Paris I - CERMSEM
90 rue de Tolbiac
75634 PARIS Cedex 13
Tél. : 01 40 77 19 40 - Fax : 01 40 77 19 80
jeanmarc.bonnisseau@uni-paris1.fr

Paris V *Chantal Guihenneuc-Jouyaux*
Laboratoire de statistique médicale
45 rue des Saints Pères
75006 PARIS
Tél. : 01 42 80 21 15 - Fax : 01 42 86 04 02
chantal.guihenneuc@univ-paris5.fr

Paris VI *Olivier Glass*
Laboratoire Jacques-Louis Lions,
Case courrier 187
Univ. Pierre et Marie Curie
4 place Jussieu
75250 PARIS Cedex 05
Tél. : 01 44 27 71 69 - Fax : 01 44 27 72 00
glass@ann.jussieu.fr

Paris VI *Nathanael Enriquez*
Laboratoire de de Probabilités
et Modèles Aléatoires
Univ. Pierre et Marie Curie
4 place Jussieu

75252 PARIS Cedex 05
Tél. : 01 44 27 54 76 - Fax : 01 44 27 72 23
enriquez@ccr.jussieu.fr

Paris IX *Céline Grandmont*
CEREMADE - Univ. de Paris Dauphine
Place du Mal de Lattre de Tassinay
75775 PARIS Cedex 16
Tél. : 01 44 05 48 71 - Fax : 01 44 05 45 99
grandmont@ceremade.dauphine.fr

Paris XI *Laurent Di Menza*
Mathématiques Bat. 425
Université de Paris-Sud
91405 ORSAY Cedex
Tél. : 01 69 15 60 32 - Fax : 01 69 15 67 18
laurent.dimenza@math.u-psud.fr

Paris XII *Yuxin Ge*
UFR de Sciences et Technologie
Univ. Paris 12 - Val de Marne
61 avenue du Général de Gaulle
94010 CRETEIL Cedex
Tél. : 01 45 17 16 52
ge@univ-paris 12.fr

Ecole Centrale de Paris *Florian De Vuyst*
Ecole Centrale de Paris
Laboratoire Mathématiques Appliquées
aux Systèmes,
Grande Voie des Vignes,
92295 Châtenay-Malabry cedex
Tél. : 01 41 13 17 19 - Fax : 01 41 13 14 36
florian.de-vuyst@ecp.fr

CORRESPONDANTS RÉGIONAUX

Pau *Brahim Amaziane*

Laboratoire de Mathématiques
Appliquées- IPRA
Université de Pau
Avenue de l'Université - 64000 PAU
Tél. : 05 59 92 31 68/30 47 - Fax : 05 59 92
32 00
brahim.amaziane@univ-pau.fr

Perpignan *Didier Aussel*

Département de Mathématiques
Université de Perpignan
52 avenue de Villeneuve
66860 PERPIGNAN Cedex
Tél. : 04 68 66 21 48 - Fax : 04 68 06 22 31
aussel@univ-perp.fr

Poitiers *Alain Miranville*

Département de Mathématiques
Université de Poitiers
Bd Marie et Pierre Curie - BP 30179
86962 FUTUROSCOPE CHASSENEUIL
Cedex
Tél. : 05 49 49 68 91 - Fax : 05 49 49 69 01
Alain.Miranville@mathlabo.univ-poitiers.fr

Polytechnique *Carl Graham*

CMAF
Ecole Polytechnique
91128 PALAISEAU
Tél. : 01 69 33 46 33 - Fax : 01 69 33 30 11
carl@cmapx.polytechnique.fr

Rennes *Nicoletta Tchou*

IRMAR - Campus de Beaulieu
35042 RENNES Cedex
Tél. : 02 99 28 26 19 - Fax : 02 99 28 67 90
Nicoletta.Tchou@univ-rennes1.fr

Rouen *Adel Blouza*

Laboratoire Raphael Salem
Université de Rouen Site Colbert
76821 MONT-SAINT-AIGNAN Cedex
Tél. : 02 35 14 71 15 - Fax : 02 32 10 37 94
Adel.Blouza@univ-rouen.fr

Saint- Étienne *Alain Largillier*

Laboratoire Analyse Numérique
Université de Saint Étienne
23 rue du Dr Paul Michelon
42023 ST ÉTIENNE Cedex 2
Tél. : 04 77 42 15 40 - Fax : 04 77 25 60 71
larg@anum.univ-st-etienne.fr

Savoie *Ioan Ionescu*

Université de Savoie
LAMA - UMR CNRS 5127
73376 LE BOURGET DU LAC Cedex
Tél. : 04 79 75 87 65 - Fax : 04 79 75 81 42
ionescu@univ-savoie.fr

Strasbourg *Photis Nobelis*

UFR de Mathématique et Informatique
Université Louis Pasteur
7 rue René Descartes
67084 STRASBOURG Cedex
Tél. : 03 88 41 63 08 - Fax : 03 88 61 90
69
nobelis@math.u-strasbg.fr

Toulouse *Marcel Mongeau*

Laboratoire MIP Univ. Paul Sabatier
31062 TOULOUSE Cedex 04
Tél. : 05 61 55 84 82 - Fax : 05 61 55 83 85
mongeau@cict.fr

CORRESPONDANTS RÉGIONAUX

Tours *Christine Georgelin*
Laboratoire de Mathématiques
et Physique Théorique
Faculté des Sciences et Techniques de
Tours
7 Parc Grandmont - 37200 TOURS
Tél. : 02 47 36 72 61 - Fax : 02 47 36 70 68
georgelin@univ-tours.fr

Tunisie *Henda El Fekih*
ENIT-LAMSIN
BP37 1002 - TUNIS-BELVÉDERE
Tél : 2161-874700 - Fax : 2161-872729
henda.elfekih@enit.rnu.tn

Uruguay *Hector Cancela*
Universidad de la República
J. Herrera y Reissign 565
MONTEVIDEO, URUGUAY
Tél. : + 598 2 7114244 ext. 112
Fax : + 598 27110469
cancela@fing.edu.uy

Zurich *Michel Chipot*
Angewandte Mathematik
Universität Zürich
Winterthurerstr. 190
CH 8057 ZÜRICH
Tél. : (41) 1 635 58 50
Fax : (41) 1 635 57 05
chipot@amath.unizh.ch