

## Sommaire

Éditorial .....	3
Comptes rendus des CA et bureaux de la SMAI .....	5
Nouvelles des Universités .....	13
Postes de demi-ATER : un rapide état des lieux .....	13
Les offres de post-doc sur Opérations Postes .....	15
Le Centre Galois .....	16
Vie de la Communauté .....	19
Journée « Histoire du Calcul » .....	19
Cap’Maths .....	20
Unité Mixte Internationale IFCAM à Bangalore .....	23
Robert Ralph Phelps 1926-2013 .....	24
Lars Hörmander 1931-2012 .....	27
Comptes rendus de manifestations .....	53
Compte rendu du 2 <sup>e</sup> Forum Emploi Math .....	53
Compte rendu de la table ronde Masters .....	59
CEMRACS 2012 .....	65
Compte rendu du colloque ALEL2012 .....	66
Du côté des Ecoles d’Ingénieurs .....	69
2013, mathématiques de la planète Terre .....	71
Le stockage géologique des déchets radioactifs .....	77
Quelques exemples de modélisation ou d’imagerie par ondes acoustiques ...	89
Les différentes échelles de temps de l’évolution .....	101
Modélisation et simulation des avalanches de neige .....	117
Un exemple d’application des mathématiques à l’environnement littoral ...	129
De la glace à la mer .....	141
Des modèles mathématiques et des écoulements géophysiques .....	153
Intégrabilité dynamique : de l’approche algébrique au calcul parallèle .....	167
Collection Mathématiques & Applications .....	179
Annonces de thèses .....	183
Annonces de colloques .....	239
Revue de presse .....	243
Liste des correspondants locaux .....	251

### PRIX DES PUBLICITÉS ET ENCARTS DANS MATAPLI POUR 2013

- 150 € pour une demi-page intérieure
- 250 € pour une page intérieure
- 400 € pour la 3<sup>e</sup> de couverture
- 450 € pour la 2<sup>e</sup> de couverture
- 500 € pour la 4<sup>e</sup> de couverture
- 300 € pour le routage avec Matapli d’une affiche format A4  
(1500 exemplaires)

(nous consulter pour des demandes et prix spéciaux)

*Envoyer un bon de commande au secrétariat de la Smai*

*Smai – Institut Henri Poincaré – 11 rue Pierre et Marie Curie – 75231 Paris Cedex 05*

*Tél : 01 44 27 66 62 – Télécopie : 01 44 07 03 64*

*smai@emath.fr*

***Date limite de soumission des textes pour le Matapli 101 :  
15 mai 2013***

Site internet de la SMAI :

<http://smai.emath.fr/>

*Smai – Institut Henri Poincaré – 11 rue Pierre et Marie Curie – 75231 Paris Cedex 05*

*Tél : 01 44 27 66 62 – Télécopie : 01 44 07 03 64*

*MATAPLI - ISSN 0762-5707*

*smai@emath.fr*

*http://smai.emath.fr*

## Editorial

*par* Grégoire Allaire

### Chers membres de la SMAI,

vous tenez entre les mains le numéro 100 de Matapli, numéro spécial à plus d’un titre. D’abord, c’est un beau chiffre, bien rond, signe de maturité qui annonce le prochain anniversaire de la SMAI : le numéro 101 de Matapli sera en effet consacré aux 30 ans de la SMAI. Ensuite, nous consacrons le présent numéro à l’année des mathématiques pour la planète terre (MPT 2013) qui est un évènement mondial donnant l’occasion de mieux faire connaître notre discipline et de montrer son importance dans la compréhension et la maîtrise de multiples enjeux scientifiques ou sociétaux à l’échelle du globe. Je vous engage à suivre les nombreuses activités organisées en France ou dans le monde à ce sujet, de l’inauguration européenne à l’Unesco à Paris le 5 mars prochain, à la publication chaque jour (ouvré) d’une brève à l’initiative de l’association Animath et avec le concours de la SMAI et d’autres sociétés savantes, sans parler des nombreuses manifestations scientifiques labellisées MPT2013. Vous trouverez plus d’informations sur le site internet de la SMAI ou bien sur celui de MPT2013 :

<http://mpe2013.org/fr/>

Si vous voulez contribuer (et si vous n’avez pas déjà été contacté !), n’hésitez pas à vous rapprocher de Thierry Goudon qui est le chargé de mission de la SMAI pour MPT2013.

Un évènement marquant de ce début d’année fut le deuxième Forum emploi mathématiques (FEM), organisé par AMIES, la SFdS et la SMAI, qui s’est tenu le vendredi 11 janvier dernier au CNAM à Paris. Il a rassemblé plus de 1200 participants et les enquêtes de satisfaction montrent une satisfaction quasi unanime (lire le compte rendu des organisateurs dans ce numéro). Au nom de la SMAI je remercie chaleureusement l’ensemble des organisateurs qui se sont dépensés sans compter pour faire de ce 2ème FEM un succès éclatant. Rendez-vous est pris pour la troisième édition !

Je salue aussi une nouvelle initiative de l’opération postes, soutenue par la SMAI et les autres sociétés savantes, SFdS et SMF, qui comblera, je l’espère, un grand manque dans notre communauté. Il s’agit en effet de regrouper sur un site internet unique, celui d’opération postes, l’ensemble des offres de contrats postdoctoraux et de postes d’ATER en France, voire au delà (lire l’article d’opération postes dans ce numéro). Par le passé il est arrivé que de tels postes ne trouvent pas preneur alors même que de jeunes docteurs étaient disponibles. Une meilleure visibilité au niveau national est un gage d’efficacité optimale pour les jeunes docteurs aussi bien que pour les laboratoires ou équipes cherchant à les recruter. Je vous encourage donc à utiliser ce nouveau service pour annoncer vos recrutements de post-docs ou d’ATER. Je précise que ce service ne couvre pas les recrutements sur des périodes plus longues (du type chaire) ou les postes permanents.

## Éditorial

---

Enfin, si une expérience post-doctorale est généralement considérée comme très bénéfique pour un jeune chercheur, la communauté devra veiller à ce que l’accumulation de positions temporaires ne se substitue pas à des recrutements pérennes.

Après la tenue des assises de l’enseignement supérieur et de la recherche (ESR) le gouvernement s’attaque à une réforme de la formation initiale et continue des enseignants et s’appête à déposer un projet de loi sur l’ESR. La SMAI comme d’autres sociétés savantes et la CFEM (commission française pour l’enseignement des mathématiques) restent vigilantes sur un certain nombre de points qui restent flous dans les versions préliminaires connues du projet. C’est notamment le cas pour les futures Ecoles supérieures du professorat et de l’éducation (ESPE) qui vont remplacer les IUFM et devraient prendre en charge l’ensemble de la formation des futurs enseignants du secondaire. En particulier, il est prévu que les filières enseignement des Masters disciplinaires soient regroupées dans ces ESPE avec le risque d’une diminution de l’enseignement purement disciplinaire. De même les programmes du CAPES devraient changer et ceux de l’agrégation sans qu’on sache encore très bien comment. Sur tous ces sujets les sociétés savantes et organisations tentent d’en savoir plus et entament une concertation bien nécessaire en ces temps de changement perpétuel ! Notons au passage que de nouveaux programmes des classes préparatoires aux grandes écoles vont être mis en place à la rentrée 2013, faisant suite à ceux du lycée, avec en particulier des changements sensibles dans les programmes d’informatique. J’en profite pour remercier les membres de la SMAI qui participent aux réunions liées à ces réformes et aux questions d’enseignement, qu’il s’agisse de se concerter avec nos autres collègues ou bien d’apporter un éclairage spécifique aux mathématiques appliquées et industrielles. Je lance un appel aux bonnes volontés qui s’intéressent à ces questions, la SMAI doit renouveler sa commission d’enseignement : faites vous connaître si vous êtes motivé-e-s ! La période est propice aux réflexions sur ce qui est un des piliers de notre activité et il est important que nous soyons présents et acteur des évolutions.

Enfin je vous donne rendez-vous dans quelques semaines à la 6ème Biennale Française des Mathématiques Appliquées et Industrielles (congrès SMAI 2013) qui se tiendra à Seignosse du 27 au 31 mai, organisé par nos collègues de 5 laboratoires parisiens regroupés sous la bannière de la Fondation des Sciences Mathématiques de Paris. Les organisateurs nous ont préparé un programme scientifique alléchant, sans parler des autres activités qui font aussi la réputation de convivialité des congrès SMAI. La SMAI y tiendra son assemblée générale annuelle et ne manquera d’y fêter ses 30 ans ! Venez nombreux... Auparavant vous aurez reçu le matériel électoral pour les élections au conseil d’administration de la SMAI. J’appelle les candidats potentiels à se faire connaître. En attendant je vous souhaite une bonne lecture de ce numéro consacré aux mathématiques pour la planète terre.

Grégoire Allaire  
Président de la SMAI

## Comptes rendus des CA et bureaux de la SMAI

par Antoine Lejay,  
Secrétaire Général de la SMAI

### Comptes rendus — Bureau (par téléphone) 26 octobre 2012

G. Allaire, A. de Bouard, E. Godlewski, F. Lagoutière, A. Lejay F. Murat, E. de Rocquigny

#### 1. Nouvelles de la SMAI

##### 1.1. Pétition

La bureau a du se positionner très rapidement par rapport à une pétition de l'EMS sur la réunion budgétaire européenne *Horizon 2020* et la peur de voir les budgets de la recherche réduits. Le message de l'EMS a été envoyé aux adhérents *via* la liste SMAI.

##### 1.2. Enquête de l'ESR

Une enquête a été lancée. La SMAI devrait en outre donner une contribution reprenant ses positions sur l'enseignement, la structuration des mathématiques et l'Open Access.

##### 1.3. Forum Emploi Maths

Le 2<sup>e</sup> <http://smai.emath.fr/forum-emploi/forum-emploi-maths> aura lieu le vendredi 11 janvier 2013 à Paris au Conservatoire National des Arts et Métiers (CNAM) à Paris.

À cette occasion, une relance sera faite auprès des correspondants locaux pour compléter la [http://masters.emath.fr/main/emath\\_fr.html](http://masters.emath.fr/main/emath_fr.html) *Carte des Masters*.

##### 1.4. Forum des lauréats des prix en informatique et mathématiques appliquées

L'édition 2012 du *forum des lauréats des prix en informatique et mathématiques appliquées*, co-organisé avec l'Inria, aura lieu le 20 décembre prochain à l'IHP à partir 13 h 30.

##### 1.5. Rendez-vous au cabinet de M<sup>me</sup> la Ministre

La SMAI, SMF, SFdS ont rendez-vous le 12 novembre 2012 avec le cabinet du ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche.

## Comptes rendus des CA & bureaux de la SMAI

---

### 1.6. Congrès ICM en France

Notre président a informé le bureau qu’il avait répondu favorablement à la demande du CNFM (Comité National Français de Mathématiciens) à propos d’un soutien de la SMAI à l’organisation d’un *International Congress of Mathematics* en France, probablement en 2022.

### 2. Congrès SMAI 2013

Les prochains congrès [http://smi.emath.fr/smai2013/SMAI 2013](http://smi.emath.fr/smai2013/SMAI%202013) aura lieu du 27 au 31 mai 2013 à Seignosse Hossegor. Il est organisé par 5 laboratoires parisiens coordonnés par la Fondations des Sciences Mathématiques de Paris. Diverses questions relatives au budget de ce congrès ont été traitées.

### 3. MPT 2013

Le bureau a discuté de la proposition de Cap’Math de publier 365 brèves à destination du grand public pour l’année *Mathématiques pour la Planète Terre 2013*, ainsi que de diverses actions possibles.

### 4. Secrétariat

#### 4.1. Fiches de postes

Des fiches de postes pour M<sup>me</sup> Huong Fuentes et M<sup>me</sup> Noura Sahtout ont été écrites. Le bureau a aussi traité de diverses questions relatives à l’organisation de ces emplois.

### 5. 30 ans de la SMAI

L’année 2013 marquera les 30 ans de la SMAI. Le bureau a discuté de diverses questions relatives à l’organisation d’événements et d’actions pour ces 30 ans

### 6. Publications

Le bureau a discuté de la composition du comité éditorial de *M2AN* qui devra très bientôt être renouvelé.

## Comptes rendus — Bureau (par téléphone)

30 novembre 2012

---

G. Allaire, A. de Bouard, E. Godlewski, F. Lagoutière, A. Lejay F. Murat, E. de Rocquigny

---

### 1. Nouvelles de la SMAI

#### 1.1. Secrétariat

Des fiches de postes ont été écrites pour chaque assistante. Un contrat à durée indéterminée a été signé avec Noura Sahtout, que nous avons embauché cette

année en contrat à durée déterminée sur un poste d’assistante. Par ailleurs, un avenant au contrat de Huong Fuentes a été signé, lui permettant de travailler à domicile un jour par semaine.

### 1.2. Adhésion des personnes morales

Une relance pour les adhésions des personnes morales a été faite en octobre.

### 2. Création d’un prix de thèse Gaspard Monge

Le bureau a donné son soutien à la création d’un prix de thèse *Gaspard Monge pour l’optimisation* proposé par le *programme Gaspard Monge pour l’optimisation*<sup>1</sup> (PGMO, créé par un mécénat d’EDF au sein de la Fondation mathématique Jacques Hadamard). La ROADEF soutient aussi ce prix.

### 3. Correspondants locaux

Une réflexion concernant le rôle des correspondants locaux à l’étranger a été lancée.

### 4. SMAI 2013

F. Murat, membre du comité d’organisation du congrès SMAI 2013, a informé le bureau des différents points concernant ce congrès, notamment sur les tarifs et la convention.

### 5. Rencontre avec le MESR

Les sociétés savantes ont été reçues par le MESR. Les textes donnés aux Assises ont été présentés, suivi d’une discussion sur l’Open Access et sur la visibilité des quatre grands instruments en mathématiques.

### 6. 30 ans de la SMAI

Le numéro 101 de Matapli sera consacré aux 30 ans de la SMAI.

### 7. Congrès CEMRACS

Le bureau a recensé les prochaines propositions de congrès CEMRACS.

Le congrès CEMRACS 2014, sur les instabilités des modèles numériques des plasmas sera organisé par Martin Campos-Pinto (LJLL, UPMC), Frédérique Charles (LJLL, UPMC), Hervé Guillard (INRIA-Castor/LJAD) et Boniface Nkonga (LJAD et INRIA-Castor, Univ. Nice).

Le congrès CEMRACS 2015, les les modèles multi-physiques en mécanique des fluides, sera organisé par Emmanuel Frenod (UBS, Vannes), Emmanuel Maître (Ensimag, Grenoble), Antoine Rousseau (Inria, Grenoble et Montpellier) et Stéphanie Salmon (URCA, Reims).

---

<sup>1</sup><http://www.fondation-hadamard.fr/en/PGMO>

## Comptes rendus des CA & bureaux de la SMAI

---

### 8. Publications

F. Murat, vice-président aux publications, a informé le bureau du renouvellement des comités éditoriaux. Le bureau a approuvé le nouveau comité éditorial de ESAIM COCV.

F. Murat a fait un compte-rendu d’une réunion avec Springer où il était conjointement avec les représentants de la SMF, la SFdS et de la RMBN.

## Comptes rendus — Conseil d’Administration 30 novembre 2012

---

F. Alabau, G. Allaire, A. Bérard, A. de Bouard, F. Bonnans, C. Chalons, L. Decreusefond, M.J. Esteban, E. Gobet, E. Godlewski, T. Goudon, C. Gout, F. Lagoutière, A. Lejay, T. Lelièvre, J. Le Rousseau, V. Louvet, F. Murat, G. Pagès, A. Samson, E. de Rocquigny

Z. Belhachmi, P. Helluy

P. Maréchal

R. Abgrall, J.-M. Bonnisseau, M. Bouthou, A. Cohen, R. Cont, A. Guillin, J. Mairesse, M.-L. Mazure, S. Mischler

---

### 1. Nouvelles de la SMAI

#### 1.1. 2<sup>e</sup> Forum Emploi Math

La 2<sup>e</sup> édition du [http://smai.emath.fr/forum-emploi/Forum Emploi Math](http://smai.emath.fr/forum-emploi/Forum_Emploi_Math) organisé par la SMAI, la SFdS et l’AMIES aura lieu le 11 janvier 2013 au CNAM (Paris). De nombreux laboratoires et entreprises, dont des PME, seront présents.

La SMAI et la SIAM sont en discussion pour des participations croisées à des salons de l’emploi tels que le Forum Emploi Maths et la SIAM Career Fair.

#### 1.2. Forum des lauréats des prix

Le [http://smai.emath.fr/spip.php?article448forum des lauréats des prix en informatique et mathématiques appliquées](http://smai.emath.fr/spip.php?article448forum_des_laur%C3%A9ats_des_prix_en_informatique_et_math%C3%A9matiques_appliqu%C3%A9es), co-organisé avec Inria et parrainé par l’Académie des Sciences, aura lieu le 20 décembre 2012 à l’Institut Henri Poincaré.

#### 1.3. MADD Letter

L’idée est de reprendre le concept d’une lettre grand public sur les mathématiques en Italie, la [http://www.simai.eu/it/maddmaths-2MADD Letter](http://www.simai.eu/it/maddmaths-2MADD_Letter), et de traduire dans un premier temps certains articles. Cette initiative est menée conjointement avec [http://images.math.cnrs.fr/Image des Mathématiques](http://images.math.cnrs.fr/Image_des_Math%C3%A9matiques).

#### 1.4. Congrès International des Mathématiques en France

La SMAI participe à une réflexion engagée au niveau national pour déterminer s’il est possible d’organiser l’ICM en France.

### **1.5. Soutien à une demande d’organisation du congrès ICIAM en Espagne**

La SMAI a écrit une lettre de soutien à la SEMA pour l’organisation du congrès ICIAM en 2019 en Espagne.

### **1.6. Secrétariat**

Le CDD de Noura Sahtout, recrutée il y a 6 mois, a été transformé en CDI. Par ailleurs, la SMAI a signé un avenant au contrat de Huong Fuentes, lui permettant de travailler une journée par semaine à domicile.

Le Conseil d’Administration (CA) remercie chaleureusement Alain Prignet pour le temps et l’énergie consacrés à la formation de Noura Sahtout et plus généralement à la bonne marche de l’association.

### **1.7. Recensement des Écoles Doctorales**

Une liste avec les coordonnées des écoles doctorales a été établie avec l’aide des correspondants locaux.

## **2. Nouvelles des groupes thématiques**

### **2.1. Groupe thématique SMAI-GAMNI**

Une journée *séminaire de mécanique des fluides numérique* aura lieu en janvier à l’IHP.

### **2.2. Groupe thématique SMAI-MAIRCI**

Les journées SMAI-MAIRCI ont eu lieu en septembre. Une Assemblée Générale aura lieu en 2013. Un nouveau règlement intérieur y sera proposé ainsi un nouveau comité de liaison sera élu.

### **2.3. Groupe thématique SMAI-MAS**

Le comité de liaison du groupe SMAI-MAS a été approuvé le 21 septembre 2012 par vote électronique par 22 voix pour et un 1 voix contre. Son nouveau responsable est Arnaud Guillin.

### **2.4. Groupe thématique SMAI-MODE**

Le nouveau comité de liaison du groupe MODE a été approuvé à l’unanimité. Son responsable est Frédéric Bonnans.

### **2.5. Groupe thématique SMAI-SIGMA**

Une AG a eu lieu récemment, mais sans renouvellement du comité de liaison.

## **3. Actions passées et en cours**

### **3.1. Postes de demi-ATER**

## Comptes rendus des CA & bureaux de la SMAI

---

Les résultats d’une enquête sur les demi-postes d’ATER ont été présentés au CA. Elle sera mise en ligne<sup>2</sup> sur le site de la SMAI et publiée dans *Matapli*.

Le CA a adopté la motion suivante à 19 voix pour et une abstention : « Le CA s’inquiète de la diminution progressive et à terme la disparition éventuelle de la possibilité d’avoir des postes de demi-ATER qui donnent une souplesse pour la transition entre la fin de thèse et le début de carrière. ».

### 3.2. Assises de la recherche

Les trois sociétés savantes ont proposé deux textes aux Assises de l’ESR, un sur l’Open Access et l’autre sur la structuration nationale des mathématiques (IHP, CIRM, CIMPA, et l’IHES dans le labex CARMIN). Ils ont été publiés et sont par exemple en ligne sur le site de la SMAI.

Ces textes ont aussi été donnés au ministère lors d’une rencontre entre les trois présidents et des conseillers de M<sup>me</sup> la Ministre.

### 4. Bilan du CEMRACS 2012

Violaine Louvet a présenté le bilan du CEMRACS 2012

(<http://smai.emath.fr/cemracs/cemracs12>) sur le thème *Calcul Haute Performance* organisé en collaboration avec le GDR Calcul. L’école d’été a été suivie par 73 participants, 12 projets ont été retenus pour la session de recherche, sur lesquels ont travaillé 76 personnes. Un partenariat a été établi avec le Mésocentre de Marseille, qui a permis aux participants de profiter de ses moyens de calcul.

Un bilan sera publié dans *Matapli*.

Le CEMRACS 2013, sur la approches stochastiques et déterministes pour modéliser et simuler la complexité, sera organisé par Nicolas Champagnat (Inria, Nancy), Tony Lelièvre (CERMICS, Marne-la-Vallée) et Anthony Nouy (École Centrale de Nantes).

Le CEMRACS 2014, sur les instabilités des modèles numériques des plasmas, sera organisé par Martin Campos-Pinto (LJLL, UPMC), Frédérique Charles (LJLL, UPMC), Hervé Guillard (INRIA-Castor/LJAD) et Boniface Nkonga (LJAD/INRIA-Castor, Univ. Nice).

Le CEMRACS 2015, sur les modèles multi-physiques en mécanique des fluides, sera organisé par Emmanuel Frenod (UBS, Vannes), Emmanuel Maître (Ensimag, Grenoble), Antoine Rousseau (Inria, Grenoble et Montpellier) et Stéphanie Salmon (URCA, Reims).

### 5. Congrès SMAI 2013

F. Murat, membre du comité d’organisation de SMAI 2013, a fait part d’informations relatives au congrès SMAI 2013 qui aura lieu à Seignosse (Landes) du 27 au

---

<sup>2</sup>(<http://smai.emath.fr/spip.php?article454>)

Comptes rendus des CA & bureaux de la SMAI

	< 31 mars 2013		> 31 mars 2013	
(r)2-3 (l)4-5	Adh.	Non adh.	Adh.	Non adh.
Jeune	90	115	144	169
Universitaire	150	205	240	295
Industriel	280	335	398	453
Pension complète en chambre double				105/jour
Pension complète en chambre simple				140/jour
Forfait 4 nuits en pension complète en chambre double				140/jour
Forfait 4 nuits en pension complète en chambre simple				490/jour

TAB. 1: Tarifs du congrès SMAI 2013.

*Note (janvier 2013)* : Ces tarifs sont par la suite été revus à la baisse.

31 mai 2013. Ce congrès est porté par le CEREMADE, le LAGA, le LJLL, le LPMA le MAP5 et coordonné par la Fédération des Sciences Mathématiques de Paris.

Ce congrès sera l’occasion de fêter les 30 ans de la SMAI.

Les droits d’inscription proposés sont présentés table 1.

Par ailleurs, le tarif universitaire s’applique au maximum à deux membres d’une entreprise membre de la SMAI en tant que personne morale.

Par rapport aux congrès précédents, les droits d’inscription ont augmenté de 65 %, lié à l’augmentation des tarifs des villages vacances.

Ces tarifs sont adoptés à l’unanimité.

### 5.1. Trente ans de la SMAI

Le numéro 101 de *Matapli* sera consacré aux 30 ans de la SMAI.

Le CA a réfléchi à des actions pour fêter cet événement, lors du congrès SMAI 2013, mais aussi hors de celui-ci.

### 6. Mathématiques pour la Planète Terre 2013 (MPT2013)

L’ouverture de cette année MPT2013 aura lieu le 5 mars 2013 à Paris au siège de l’Unesco.

T. Goudon, chargé de mission de la SMAI pour MPT2013, a fait état des différentes initiatives, notamment de 4 grandes opérations nationales :

[liste]Semaine des mathématiques (organisée par le ministère) ; Ateliers de réflexion prospective (soutien de l’ANR) ; Nombreux congrès et conférences, qui sont recensés sur le site SMAI ; Opération « un jour, une brève » dont le but est de publier un texte par jour (250 fiches) présentant une activité mathématiques en lien avec la planète Terre.

Le numéro 100 de *Matapli* sera consacré à cette initiative.

## Comptes rendus des CA & bureaux de la SMAI

---

### 7. Publications

#### 7.1. Renouvellement des comités éditoriaux

F. Murat, vice-président aux publications, a informé le CA du renouvellement des comités éditoriaux. Pour information, les rédacteurs en chef des revues ESAIM sont

- COCV : E. Zuazua ;
- P&S : G. Biau et G. Pagès ;
- M2AN : F. Gerbaud et A.-L. Buffa ;
- RAIRO : R. Mahjoub.

Les comités éditoriaux des journaux sont en cours de renouvellement.

#### 7.2. Open access

F. Murat et G. Allaire ont fait part des différents débats et initiatives sur l’Open Access.

## Nouvelles des Universités

POSTES DE DEMI-ATER : UN RAPIDE ÉTAT DES LIEUX

Par Antoine Lejay et Violaine Louvet

NOUVELLES DES UNIVERSITÉS

**Les raisons de cette enquête.** La loi LRU<sup>1</sup> a transféré la gestion de la masse salariale vers les établissements passés aux compétences élargies. Plusieurs laboratoires ou départements de mathématiques ont connu des difficultés ou des oppositions pour attribuer des postes de *demi-ATER* comme cela se faisait traditionnellement.

De tels postes correspondent à un contrat à temps partiel, avec un demi-service d’enseignement (96 heures équivalent TD) pour 2/3 du salaire d’un poste d’ATER à temps plein<sup>2</sup>.

L’existence de tels contrats est prévue par la loi<sup>3</sup>. Les laboratoires appliquent en général certaines règles lorsqu’ils ont la possibilité d’attribuer ce type de poste. La plupart du temps, ces contrats sont ainsi réservés aux doctorants devant finir leur thèse.

En outre, il semblerait que l’utilisation de postes de demi-ATER soit perçue comme « spécifique » aux mathématiques par des chercheurs d’autres disciplines.

**Les questions.** À travers les correspondants locaux, nous avons lancé une enquête afin de faire un état des lieux en posant les questions suivantes :

- Q1 Quelle est votre université ?
- Q2 Votre université donne-t-elle encore des postes de demi-ATER ?
- Q3 Si non, quelles sont les raisons invoquées ?
- Q4 Des alternatives aux postes d’ATER à temps plein sont-elles proposées (par exemple, cofinancement de la différence entre deux demi-ATER et un poste d’ATER à temps plein, ou demi-poste d’ATER sur un semestre) ?
- Q5 Sur les 3 dernières années, combien de postes d’ATER à temps plein ont-ils été attribués ?
- Q6 Sur les 3 dernières années, combien de postes de demi-ATER ont-ils été attribués ?

<sup>1</sup>Loi n° 2007-1199 du 10 août 2007.

<sup>2</sup>Sources : article *Attaché temporaire d’enseignement et de recherche* sur Wikipedia et décret n° 88-654 du 7 mai 1988.

<sup>3</sup>« *Les attachés temporaires d’enseignement et de recherche peuvent demander à exercer leurs fonctions à temps partiel* », article 10 du décret n° 88-654 du 7 mai 1988.

Nouvelles des Universités

ATER	0	2	2	30	0	0	1	10	4	0	4	3	0	6	12	7
1/2-ATER	15	16	5	0	6	18	0	0	10	4	4	8	6	0	23	0
ATER	21	0	10	2	2	0	19	1	10	35	2	3	9	3	7	
1/2-ATER	8	10	41	7	14	24	0	3	6	0	0	2	0	0	4	

TAB. 2: Répartitions entre ATER et demi-ATER pour 31 universités (laboratoires ou département de mathématiques).

Q7 Commentaires éventuels

**Analyse des réponses.** 39 correspondants locaux ou responsables de laboratoires ont répondu à ce questionnaire. Nous remercions celles et ceux qui ont pris un peu de temps pour participer à ce sondage.

Pour la question Q2, 23 universités donnent encore des postes de demi-ATER et 16 n’en donnent plus. Dans ce dernier cas, les réponses invoquées sont systématiquement le coût de tels postes (question Q3). Et dans les universités où de tels contrats sont encore disponibles, plusieurs collègues craignent la disparition de cette possibilité, contraignant alors le laboratoire à payer la différence. Sept universités ne mentionnent pas de risques particuliers de ce type.

En cas de refus, des alternatives sont parfois proposées (question Q4) :

- L’alternative la plus courante est de proposer des demi postes d’ATER, c’est-à-dire un emploi pour un semestre (11 réponses).
- Une autre alternative est que les laboratoires ou département paient la différence entre deux demi-ATER et un ATER, soit environ 14 000 € (8 réponses). L’université et/ou les laboratoires sont parfois réticents, ou ne peuvent pas.
- Enfin, un laboratoire a obtenu la transformation de trois demi-postes postes d’ATER en deux postes de demi-ATER, entraînant ainsi une réduction du nombre total d’heures d’enseignement.

Le nombre de postes attribués sur les trois dernières années (questions Q5 et Q6) sont spécifiés table 2. Ainsi, certaines universités ne donnent que des demi-ATER, d’autres que des ATER à temps plein, et certaines équilibrent ces postes. Bien entendu, la forte variabilité des chiffres donnés est due à la disparité des tailles de laboratoires.

En commentaire (question Q7), certains rappellent les conditions d’attribution des postes d’ATER et demi-ATER, et les changements réalisés ou probables. Les règles d’attribution de postes de demi-ATER, lorsqu’elles existent, sont de réserver en priorité ou exclusivement ces postes aux doctorant devant terminer leur thèse. Un laboratoire signale que c’est au laboratoire de financer le surcoût dans les autres cas. D’autres laboratoires qui pratiquaient cette règle n’ont plus cette

possibilité.

Certains craignent de ne pouvoir attribuer de demi-ATER l'an prochain. Dès cette année, certains postes ont été parfois obtenus suite à de longues discussions avec les instances et les responsables d'autres disciplines. Deux difficultés sont invoquées : d'une part les problèmes de coût et la logique comptable qui s'impose, et d'autre part, des visions différentes sur ces postes par les responsables d'autres disciplines et donc la difficulté de se faire entendre sur ce sujet.

**Conclusion.** Les postes de demi-ATER sont utilisés dans plusieurs laboratoires comme des financements souples, attribués en priorité pour permettre aux doctorants de finir leur thèse si besoin. Cette vision n'est pas toujours partagée par les collègues d'autres disciplines. L'obstacle principal est cependant simplement le coût de ces postes. La question de la survivance des postes de demi-ATER semble clairement posée, en raison du surcoût induit par ces postes à temps partiel.

#### OPÉRATION POST-DOC – LES OFFRES DE POST-DOC SUR OPÉRATIONS POSTES

##### *Par Opération Postes*

Pour aider les candidats à trouver plus facilement les offres de post-doc, pour aider les responsables de projet à les diffuser plus efficacement, des membres d'opération postes ont mis en place un portail commun :

<http://postes.smai.emath.fr/postdoc>

Ce site essaie de recenser les offres de post-docs financés (y compris les postes d'ATER) en mathématiques en France et dans les pays voisins.

Les offres se déclinent en deux grands groupes :

- les post-docs de projet : ce sont des post-docs financés par des projets de type ANR ou ERC. Ils sont en général assez ciblés et éparpillés.
- les post-docs de site : ce sont les post-docs offerts par les instituts de recherche ou les fondations et les LabEx.

Les offres sont classées par dates limites de candidature mais il est possible de changer le critère et/ou l'ordre en cliquant sur "trier par". Il est possible de filtrer dynamiquement pour n'afficher que les offres :

- se rapportant à une thématique particulière,
- dans un pays ou une ville donné,
- récemment publiées.

Le site permet à tous de renseigner une offre sur un post-doc, dont il/elle est responsable ou dont il/elle a eu connaissance, par le biais du formulaire :

## Nouvelles des Universités

---

<http://postes.smai.emath.fr/postdoc/new.php>

Ce formulaire est volontairement réduit à l'essentiel : un titre, l'adresse internet d'une personne à contacter, une date limite, une date de début et un à trois sujet(s) (auquel on rajoute "général" pour les campagnes de site non ciblées). Il est aussi possible d'indiquer un lien vers un site internet et quelques lignes de commentaires.

Le formulaire est ensuite rapidement validé avant d'être visible sur le site.

Remarques, critiques ou commentaires sont les bienvenus. Le post-doc n'est qu'une étape vers un emploi stable et sa généralisation ne doit pas se substituer à un recrutement en contrat à durée indéterminée. L'objectif de ce site est de rendre service aux jeunes chercheurs qui n'ont pas encore de poste stable et d'aider les responsables à recruter dans les meilleures conditions. Sa réussite dépend de tous, nous comptons sur vous.

### LE CENTRE GALOIS

Par Philippe GRILLOT et Cécile LOUCHET  
MAPMO, Université d'Orléans

Le Centre Galois<sup>4</sup> propose des stages de mathématiques avec hébergement d'une durée d'une semaine pour des élèves de seconde. Son objectif est de faire aimer les mathématiques et d'attirer des jeunes, collégiens ou lycéens, vers les carrières scientifiques. Sont visés en priorité celles et ceux qui, tout en réussissant très bien en classe, ont du mal à se projeter dans des études scientifiques longues parce qu'ils ne bénéficient pas d'un environnement familial favorable. En effet, nombre d'études montrent que les élites françaises tendent à se reproduire et que l'ascenseur social fonctionne mal. Le Centre Galois répond ainsi à une double exigence de justice sociale et de renouvellement du vivier des mathématiciens, et plus généralement des scientifiques<sup>5</sup>.

L'année 2010 fut notre année d'expérimentation. L'année suivante le Centre Galois était officiellement lancé, honorant pour l'occasion le bicentenaire de la naissance d'Évariste Galois. Pourquoi Galois ? Parce que ce jeune homme au destin exceptionnel a profondément marqué les mathématiques de son époque, et ses travaux visionnaires sont aujourd'hui au cœur de nombreuses thématiques de recherche. Ce projet est un hommage à son génie.

Le Centre Galois s'est construit grâce aux compétences des six partenaires suivants : la Fédération Denis Poisson (ensemble de la communauté des enseignants-chercheurs en mathématiques et physique théorique de la Région Centre), la

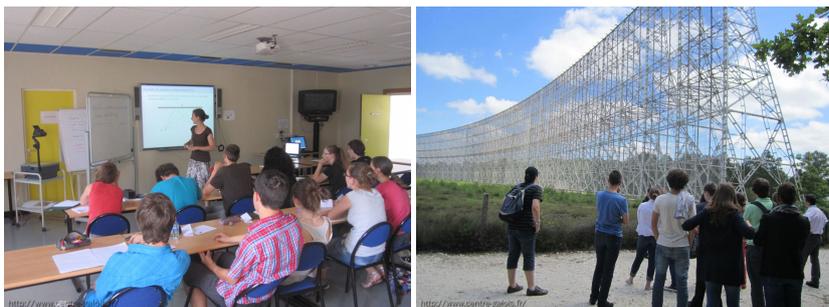
---

<sup>4</sup><http://centre-galois.fr>

<sup>5</sup>Voir le manifeste du Centre Galois sur notre site <http://centre-galois.fr>

Fédération Régionale des Maisons des Jeunes et de la Culture Région Centre (FRMJC), Centre Sciences (porteur du projet), le Rectorat, l’Institut de Recherche en Enseignement des Mathématiques d’Orléans, le programme MathC2+ d’Animath<sup>6</sup> (association dont le but est de coordonner des actions de popularisation des mathématiques en France). Dès son lancement, le projet a eu le soutien de l’ensemble des sociétés savantes dans notre discipline (SMF, SMAI et SFDS), de l’APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques de l’Enseignement Public) et de l’IUFM Centre Val de Loire.

Pour chaque session quinze élèves sont recrutés dans toutes les classes de seconde de l’académie d’Orléans-Tours. Les frais de séjour pour chaque participant sont intégralement pris en charge par les deux partenaires du Centre : le Conseil de la Région Centre et le programme MathC2+. Cette année nous avons reçu 120 candidatures pour seulement 30 places offertes !



Pendant une semaine, les stagiaires, que nous appelons volontiers «les petits Galoisien», sont au contact d’enseignants-chercheurs et de professeurs du secondaire en mathématiques, de sorte que celles-ci leur apparaissent vivantes, à l’image du rôle qu’elles jouent actuellement, à une époque où la modélisation mathématique a envahi toutes les sciences du fait de la révolution numérique. Chaque jour, deux sessions de mathématiques leur sont dispensées ; les petits Galoisien abordent des travaux actuels des mathématiques ainsi que des résultats plus anciens<sup>7</sup>. En début d’après-midi, puis après le repas du soir, des activités «détente et loisirs» sont proposées : mise en place d’une mini pièce de théâtre, soirée musicale, une visite de la station radioastronomique de Nançay en Sologne, une soirée «observation des étoiles», une projection du film «Dimensions»<sup>8</sup>, une visite du Museum d’Histoire Naturelle d’Orléans, une visite du Parc Floral de la Source, une visite du laboratoire de mathématiques (MAPMO), une exposition

<sup>6</sup><http://www.animath.fr>

<sup>7</sup>Voir le programme sur notre site <http://centre-galois.fr>

<sup>8</sup><http://www.dimensions-math.org>

## Nouvelles des Universités

---

de mathématiques dans les locaux de Centre Sciences... Toutes ces activités ne pourraient être menées à bien sans le concours et la bonne humeur de nos deux animatrices de la FRMJC qui ont apporté tout au long de ces deux stages un parfum de colonie de vacances !



Nos stagiaires, lors de chacune des éditions, ont pu passer un moment avec Virginie Bonnaillie-Noël, la marraine du Centre Galois. Tout au long de ces séjours, nous avons vu des élèves enthousiastes, demandeurs et actifs, notamment dans les énigmes mathématiques à résoudre quotidiennement. Beaucoup nous ont fait part que les activités proposées avaient radicalement changé leurs vues professionnelles, celles-ci leurs ont montré notamment comment les mathématiques sont présentes dans les sciences actuelles mais aussi dans notre façon de regarder le monde. Ces retours glanés lors des stages ont été confirmés par les récents résultats scolaires des Galoisien(ne)s de l'édition 2010 ; en effet, la quasi totalité des stagiaires ont fait le choix d'ambitieuses formations scientifiques. Ces parcours, nous avons pu les suivre et les accompagner depuis leur séjour au Centre, par exemple lors de leur projet TPE en classe de première ou sur des actions comme le tournoi français des jeunes mathématiciens<sup>9</sup>. Sans nul doute la formule de stage avec hébergement provoque un effet de cohésion qui se prolonge bien après leur passage au Centre comme en témoigne l'activité du compte facebook «Centre Galois».

---

<sup>9</sup><http://www.tfjm.org>

## Vie de la communauté

JOURNÉE « HISTOIRE DU CALCUL »

IHP, MARDI 9 AVRIL 2013

Organisée par Violaine Louvet, Thierry Dumont et  
Jean-François Maître (Institut Camille Jordan, Lyon)

VIE DE LA COMMUNAUTÉ

Le Groupe Calcul (<http://calcul.math.cnrs.fr>) fête cette année son dixième anniversaire.

Une journée spéciale est organisée pour l’occasion sur « L’Histoire du Calcul ». Cette journée est parrainée par la SMAI et la SIF<sup>1</sup> (Société Informatique de France). Les conférenciers invités parleront d’histoire des méthodes numériques et d’aspects plus institutionnels du développement du Calcul :

- Pierre-Louis Curien, CNRS & Université Paris 7, « *Introduction à la journée* »
- Pierre Mounier-Kuhn, CNRS & Université Paris-Sorbonne, « *De l’analyse numérique aux sciences du numérique : comment l’informatique devint une discipline* »
- Olivier Pironneau, Laboratoire Jacques-Louis Lions, UPMC, Paris 6, « *L’Ecole Lions et le calcul scientifique* »
- Laurent Desbat, TIMC-IMAG, Université Joseph Fourier, Grenoble, « *Jean Kuntzmann et la naissance du numérique à l’Université de Grenoble* »
- Alain Bossavit, SUPELEC, « *L’évolution des méthodes de calcul en électromagnétisme : Des différences finies aux méthodes ‘mimétiques’ modernes* »
- Martin Gander, Université de Genève, « *Gauss, Jacobi, Seidel, Richardson, Krylov : the Invention of Iterative Methods* »
- Gerhard Wanner, Université de Genève, « *Sur l’histoire des méthodes pour EDO’s* »

**Venez nombreux !**

Inscriptions gratuites mais obligatoires

<http://calcul.math.cnrs.fr/spip.php?article219>

<sup>1</sup><http://www.societe-informatique-de-france.fr/>

## Vie de la Communauté

---

### CAP'MATHS,

Organisée par Martin Andler, Université de Versailles et Animath,  
president@animath.fr, andler@math.uvsq.fr

A l'automne 2010, le Commissariat général à l'investissement lançait un appel à projets très attendu "Culture scientifique et technique et égalité des chances". Cela faisait déjà un certain temps que cet appel avait été annoncé, et qu'Animath avait sondé les sociétés savantes, les associations professionnelles et les différents acteurs de l'animation mathématique sur la possibilité d'une réponse collective à cet appel.

Quelques réunions, beaucoup d'échanges par mail, beaucoup d'heures de travail, nous ont permis de déposer, au nom du consortium Cap'Maths, un dossier de candidature à cet appel au jour dit, fin février 2011. En septembre 2011, nous avons reçu la bonne nouvelle : Cap'Maths était un des douze projets retenus par le jury (sur soixante-dix candidatures), avec un budget de 3 millions d'Euros pour les quatre années 2012-2015.

### Organisation de Cap'Maths

#### *Les objectifs*

La démarche part du constat d'un contraste : d'un côté, de très riches expériences sont menées par de nombreux acteurs un peu partout en France en matière de culture mathématique, d'actions en direction des jeunes de tous niveaux, des plus motivés à ceux qui ont les plus grosses difficultés, d'actions ciblées vers les jeunes filles ou dans les zones scolairement défavorisées. De l'autre, la perception des mathématiques dans le grand public est souvent négative ; le dynamisme des sciences mathématiques, ses nombreuses interactions avec les autres sciences, ses applications sont incompris.

Partout dans le monde, et peut-être en France plus qu'ailleurs, les mathématiques ont une place décisive dans la construction du parcours scolaire des jeunes. Dans leurs succès, mais aussi dans les difficultés auxquelles notre système éducatif est confronté, notamment en matière d'aggravation des inégalités sociales et géographiques. En France comme ailleurs, les mathématiques paraissent éloigner beaucoup de jeunes filles.

Mais aujourd'hui, comme on le sait, la capacité de la France à assurer le renouvellement des cadres scientifiques : ingénieurs, chercheurs, professeurs... est en question.

Face à ces réalités, nous estimons 1. qu'il est nécessaire de mobiliser nos forces pour inverser cette tendance ; 2. que les expériences de promotion de la culture mathématique et d'activités mathématiques périscolaires peuvent être étendues, et engendrer ainsi un effet positif substantiel sur la réussite de tous.

Les objectifs peuvent s'organiser autour de quatre axes principaux :

- atténuer les disparités sociales et géographiques ;
- inciter et aider les jeunes filles à surmonter la barrière des préjugés pour se lancer dans des études à forte composante mathématique ;

- améliorer la perception générale des mathématiques par le grand public et notamment les jeunes scolarisés, en améliorant la compréhension de leur impact, de leur utilité et de leur vitalité ;
- augmenter globalement le flux d’étudiants effectuant des études longues dans un domaine scientifique, et en particulier dans les sciences à forte composante mathématique.

Le consortium encouragera toutes formes d’activités susceptibles de contribuer à la réalisation de ces objectifs, et en particulier les actions permettant de :

- renforcer la diffusion de la culture mathématique, notamment par le contact avec le monde de la recherche, en faisant porter l’effort tout particulièrement vers les jeunes, afin de montrer à tous que les mathématiques sont une discipline vivante, dont la recherche est florissante, de mettre en avant leurs interactions multiples avec toutes les sciences, leurs nombreuses applications et le rôle important qu’elles jouent dans la vie des entreprises ;
- accroître fortement l’impact de différents types d’animation en direction des jeunes : concours, clubs, ateliers, travaux sur projets scientifiques, stages pendant les vacances ; développer de telles actions dans les zones socialement ou géographiquement défavorisées ;
- encourager la participation des filles à toutes ces actions et, de plus, organiser des actions destinées à elles seules : tutorats, marrainages, journées... Tout cela ayant pour but leur engagement dans les filières scientifiques et techniques au lycée et dans des études supérieures dans les domaines des sciences et techniques où elles sont sous représentées ;
- se doter des moyens d’une diffusion des initiatives les plus prometteuses (documents et films, sites web, forums...) et d’assurer à l’ensemble des actions une forte visibilité.

Un effort particulier sera mené pour donner à ces actions une dimension européenne et internationale.

#### *Les membres fondateurs*

- Sociétés savantes et associations professionnelles : SMAI, SFdS et SMF, Femmes et mathématiques, Association des professeurs de mathématiques de l’enseignement public (APMEP), Union des professeurs de spéciale
- Organismes interprofessionnels : Assemblée des directeurs d’IREM
- Laboratoires et structures universitaires : CultureMath, Département de mathématiques de l’université Paris-Sud, Images des mathématiques, Institut Henri Poincaré, IREM d’Aix-Marseille, UFR de Mathématiques de l’Université des sciences et techniques de Lille, Maths à modeler
- Fondations : C’Génial
- Associations : Animath, Centre-Sciences, Cité des géométries de Maubeuge, Comité international des jeux mathématiques, Fédération française des jeux mathématiques, Kangourou sans frontières, Maths en jeans, Maths pour tous, Science ouverte

Toute structure ayant un projet retenu par Cap’Maths devient *ipso facto* membre

## Vie de la Communauté

---

du consortium.

### *Les soutiens de Cap' Maths*

Section de mathématiques de l'Académie des sciences, Institut national de recherche en informatique et automatiques, Institut national des sciences mathématiques et de leurs interactions du Centre national de la recherche scientifique, Conférence des présidents d'universités, Fondation Jacques Hadamard, Fondation des sciences mathématiques de Paris, Institut des hautes études scientifiques, école normale supérieure de Cachan, école normale supérieure de Paris, université d'Orléans, université Paris Diderot, université Pierre et Marie Curie, université Paris XIII, université de Versailles-Saint-Quentin, ainsi qu'un certain nombre de laboratoires de mathématiques.

### *Conseil d'orientation de Cap' Maths*

Cap' Maths est gouverné par un conseil d'orientation présidé par Yves Meyer. Ses membres sont :

Académie des sciences (section de mathématiques) : Jean-Pierre Demailly

Académie des sciences (section des sciences mécaniques et informatiques) : Yves Meyer

Association des directeurs d'IREM : Anne-Marie Aebischer

Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public : Eric Barbazo

Conférence des président d'université : NNN

Femmes et mathématiques : Catherine Bonnet

Institut nationale des sciences mathématiques CNRS : Aurélien Alvarez

Institut national de recherche en informatique et automatique : Antoine Petit (Thierry Viéville).

Ministère de l'éducation nationale (DGESCO) : NNN

Ministère de l'éducation nationale (IGEN) : Charles Torossian

Société française de statistique : Jean-Michel Poggi

Société de mathématiques appliquées et industrielles : Grégoire Allaire (Anne Debouard)

Société mathématique de France : Aline Bonami (Pierre Pansu)

Union des professeurs de spéciale : Abdellah Bechata

### **Fonctionnement de Cap' Maths**

#### *Le premier appel à projets*

Cap' Maths fonctionne par appels à projets de manière annuelle. Le premier appel s'est déroulé au printemps 2012. 44 projets ont été retenus par le comité de sélection puis le conseil d'orientation, pour un montant total de subventions Cap' Maths 687 000 Euros, ce qui représente moins de 30% du budget total de ces actions. Il est impossible d'énumérer ici l'ensemble de ces projets. Notons que deux d'entre eux impliquent directement la SMAI :

*Explosion des mathématiques.* La réédition de cette brochure réalisée par les sociétés savantes bénéficie du soutien de Cap' Maths

*Le projet Les maths ça sert.* Cette initiative, lancée au printemps 2011, consiste à amener les *utilisateurs professionnels des mathématiques* hors milieu académique et universitaire (ingénieur(e), technicien(ne)... ) dans les collèges et les lycées dans

le but de montrer aux élèves que les *mathématiques enseignées sont d'une utilité quotidienne dans leurs métiers.*

Le professeur de la classe d'accueil et l'intervenant(e) choisissent comme point de départ un sujet qui a été récemment enseigné. Ils s'accordent alors sur la manière dont l'intervenant va illustrer l'application de ce sujet dans son quotidien professionnel. Il ne s'agit donc pas de parler des applications résultant d'outils mathématiques abstraits de haut niveau, mais bien de *partir du quotidien des élèves pour rencontrer le quotidien du professionnel.*

Sans tomber dans le piège de l'utilitarisme, cette initiative permet de fournir une réponse à l'éternelle question "Les maths, à quoi ça sert ?" chez des publics qui ne sont pas nécessairement acquis à la discipline. Les échanges avec les professionnels sont également l'occasion d'un *témoignage sur leur métier, d'un renforcement de la culture scientifique et économique, et d'une information sur les filières d'études.*

Le projet est porté par la SFdS, la SMAI et Animath ; il est soutenu par la fondation C.Genial et maintenant par Cap'Maths. Un chargé de projet sera embauché prochainement.

Cap'Maths espère recevoir de nombreuses réponses nouvelles au prochain appel à projets (début 2013).

#### UNITÉ MIXTE INTERNATIONALE IFCAM À BANGALORE – INDE

Par Jean-Pierre Raymond (IMT, UPS Toulouse III), Directeur adjoint de l'IFCAM

#### **Appel à projets 2013 à venir, ouvert à tous les laboratoires de mathématiques appliquées, en France et en Inde**

La convention de création de l'UMI IFCAM (Indo-French Center for Applied Mathematics) a été signée à Paris le 29 Novembre 2012, au siège du CNRS, par Debapriya Dutta, directeur du CEFIPRA<sup>2</sup>, représentant le Department of Science and Technology (Inde, DST), Govindan Rangarajan pour l'Indian Institute of Science de Bangalore, Joël Bertrand pour le CNRS, et Hélène Kirchner pour l'INRIA. Les autres signataires, partenaires financeurs de cette U.M.I., sont l'École Normale Supérieure de Paris, l'École Polytechnique, l'Université de Nice Sophia-Antipolis, et l'Université Paul Sabatier Toulouse III. Ce projet a été initié par Alain Fuchs, président du CNRS, et Thirumalachari Ramasami, Secretary to the Government of India, Department of Science and Technology, en décembre 2010. Il a été piloté par l'INSMI-CNRS et la DERCI-CNRS côté français et par le DST côté indien. La création de cette U.M.I. a été actée par un 'Memorandum of Understanding', signé par le CNRS et le DST, à New Delhi, le 12 janvier 2012.

<sup>2</sup>Quelques sigles et sites web. CEFIPRA, IFCPAR : Centre Franco-Indien pour la Promotion de la Recherche Avancée, <http://www.cefipra.org/>, DERCI : Division de l'Europe de la Recherche et de la Coopération Internationale, IISc : Indian Institute of Science, Bangalore, <http://www.iisc.ernet.in/>, INP : Institut de Physique, INSIS : Institut des Sciences de l'Ingénierie et des Systèmes, IIT : Indian Institute of Technology, TIFR CAM : Tata Institute for Fundamental Research, Centre for Applicable Mathematics, Bangalore <http://math.tifrbng.res.in/>, IMS Chennai : The Institute of Mathematical Sciences, <http://www.imsc.res.in/>

## Vie de la Communauté

---

Au delà des partenaires français et indiens signataires, ce projet rassemble une trentaine de chercheurs ou enseignants chercheurs de neuf autres universités françaises (Paris 6, Paris 7, Paris 9, Université de Lorraine, Pau, Toulon, Rennes, ENS Lyon, Saint-Etienne), et une trentaine de collègues indiens rattachés à huit instituts ou universités autres que l'Indian Institute of Science de Bangalore (TIFR CAM Bangalore, IIT Bombay, IIT Delhi, IIT Madras, IIT Roorkee, IIT Kanpur, IMS Chennai, Pondicherry University).

Le centre est situé au département de mathématiques de l'Indian Institute of Science de Bangalore. Un Kick Off meeting a eu lieu à Nice du 19 au 21 Novembre 2012. Un site web de l'IFCAM sera bientôt disponible. Entre temps, certaines informations peuvent être trouvées sur le site du workshop de Nice, <http://math.unice.fr/~auroux/IFCAM2012/>. 2013 est une année de démarrage. Les actions financées cette année sont issues du programme scientifique de la convention de création.

**Objectifs.** L'U.M.I. IFCAM est une plateforme de coopération entre la France et l'Inde dans le domaine des mathématiques et de leurs interactions. Elle a été structurée sur la base des collaborations bilatérales existantes dans le domaine des mathématiques appliquées et à l'interface des mathématiques appliquées et de l'informatique, de la physique ou des sciences pour l'ingénieur. C'est ce qui explique que, parmi les financeurs, nous trouvons aux côtés de l'INSMI, d'autres instituts du CNRS (l'INP et l'INSIS), et également l'INRIA. L'objectif principal de l'IFCAM est de développer un centre de référence dans certains domaines bien identifiés des mathématiques et de leurs interactions avec d'autres disciplines. Il soutiendra et dynamisera les collaborations bilatérales dans ces domaines-là, développera l'attractivité des mathématiques appliquées et les interactions mathématiques-industrie en Inde, et plus généralement le rôle des mathématiques dans d'autres disciplines.

**Pilotage de l'IFCAM.** L'unité est pilotée par un directeur (professeur de l'IISc) et un directeur adjoint. Elle est dotée d'un comité scientifique et d'un comité de pilotage. L'unité a été créée pour 4 ans, renouvelable. Elle fonctionne sur la base d'appels à projets bilatéraux (portés par un responsable français et un responsable indien). Ces projets, d'une durée de 1 à 3 ans, sont évalués par le comité scientifique. Le prochain appel à projets sera lancé courant juin 2013. Il sera largement ouvert à toute la communauté de mathématiques appliquées française et indienne. Les projets peuvent être en mathématiques appliquées ou à l'interface des mathématiques appliquées et d'autres disciplines (physique, informatique, ingénierie). Nous espérons que vous serez nombreux à répondre à cet appel.

ROBERT RALPH PHELPS NOUS A QUITTÉS LE 4 JANVIER 2013 À L'ÂGE DE 87 ANS

*Communiqué par M. Théra*

Après avoir étudié à l'université de Californie à Los Angeles, Bob Phelps est devenu l'élève de Victor Klee, sous la direction duquel il a obtenu en 1958 son PhD à *Subreflexive normed linear spaces* à l'université de Washington. Après avoir passé deux ans à l'Institute of Advanced Study à Princeton et deux ans à l'université

de Californie à Berkeley, il a rejoint l’université de Washington à Seattle en 1962 où il a exercé jusqu’à sa retraite. Il a également passé l’année académique 1969-70 à Jussieu, invité par Gustave Choquet avec qui il s’était lié d’amitié. Bob Phelps était devenu professeur Emérite en 1996.

Bob Phelps était un grand analyste ; il laisse à la postérité des résultats qui ont eu un fort impact en analyse fonctionnelle et dans la théorie des espaces de Banach. Il a écrit plusieurs monographies :

- *Lectures on Choquet’s theorem* a permis d’expliquer la théorie de la représentation intégrale. Dans sa récente réédition il donne des applications dans la théorie de l’approximation. On peut aussi y trouver le théorème de Korovkin et sa généralisation due à Shashkin. Je me souviens d’avoir étudié ce livre lorsque jeune étudiant je participais au cours, ainsi qu’au séminaire d’initiation à l’analyse de Gustave Choquet.
- *Lectures on the Differentiability of convex functions on Banach spaces*, qui dans sa version initiale était la mise en forme du cours qu’il avait donné à University College London. Ce livre qui traite, en autres choses, des fonctions convexes dans les espaces de Banach, des principes variationnels (Ekeland, Borwein-Preiss, Deville, Godefroy et Zizler), m’a beaucoup servi au cours de ma carrière de chercheur.
- *Convex functions, monotone operators and differentiability*, est devenu un grand classique, énormément cité où il a intégré dans sa seconde édition des résultats récents dus à D. Preiss, R. Haydon, J.M. Borwein, S. Fitzpatrick, P. Kenderov ou encore à S. Simons.

Il a collaboré avec des mathématiciens de premier plan : Isaac Namioka, Joram Lindenstrauss, David Preiss, Simon Fitzpatrick (qui fut son élève), Bernardo Cascales, José Orihuela, Gilles Godefroy, Jean-Baptiste Hiriart-Urruty. Avec ce dernier il a publié un article dans *J. of Functional Analysis* dont je me suis personnellement servi et qui établit une formule générale sur le sous-différentiel de la somme de deux fonctions convexes semi-continues inférieurement, sans hypothèse additionnelle, en utilisant seulement des sous-différentiels à  $\varepsilon$ -près.

Le résultat le plus connu de Bob Phelps est vraisemblablement le désormais célèbre théorème de Bishop-Phelps obtenu avec Errett Bishop, élève de Paul Halmos. On peut trouver sur le site de Bob Phelps tout un article expliquant la genèse de ce résultat profond qui est devenu standard dans la théorie des espaces de Banach. Ce théorème qui établit que *les fonctionnelles d’appui à un ensemble convexe fermé borné non vide  $C$  d’un espace de Banach  $E$  sont denses dans le cône des fonctionnelles qui sont bornées inférieurement sur  $C$* , a été abondamment utilisé dans la théorie de l’optimisation. Le théorème de Bishop-Phelps a été la source de généralisations célèbres comme par exemple le théorème de Brøndsted & Rockafellar :

## Vie de la Communauté

---

*Soit  $f$  une fonction convexe semi-continue inférieurement dans un espace de Banach réel  $E$  à valeurs réelles étendues. L'ensemble des points où son sous-différentiel n'est pas vide est dense dans son domaine (l'ensemble des points où elle est finie)*

Le principe d'extrémisation de Phelps, connu sous le nom de "*Phelps cone extremization principle*" appliqué à l'épigraphe d'une fonction semi-continue inférieurement permet de donner une démonstration élégante du principe variationnel d'Ekeland.

Bob était impliqué dans la vie du département de mathématiques de l'université Washington. Il a dirigé ce dernier et a aussi animé un séminaire qu'il avait baptisé le *Rainwater Seminar* (en écho au caractère pluvieux de la région de Seattle). Avec son épouse Elaine qui était linguiste, il a créé la chaire à *Robert R. and Elaine F. Phelps Endowed Professorship*. C'est également sous le pseudonyme de John Rainwater qu'il a publié, comme son ami Isaac Namioka, un certain nombre de résultats.

Bob Phelps était un athée convaincu et, chose assez rare pour un américain, presque militant. Il était aussi un sportif accompli, excellent dans la course et la marche ainsi qu'un montagnard hors pair. Je me souviens d'un colloque organisé en Bulgarie où il courrait chaque jour à un rythme qu'aucun collègue non entraîné n'aurait pu suivre.

Je terminerai par le rappel d'une anecdote qu'il avait rapportée à J.-B. Hiriart-Urruty : vers la fin des années soixante, il est invité à dîner par G. Choquet, dans un restaurant parisien plutôt chic. Une belle pièce de viande lui est servie. Comme il n'arrive à en manger qu'une partie, il est fort embarrassé, la viande est appétissante et de qualité, il voudrait bien l'emporter avec lui pour la manger plus tard. Il se dit qu'aux Etats-Unis il aurait demandé un doggy bag... mais on est à Paris et il est inhabituel qu'on demande à prendre avec soi ce qu'on n'a pas fini de manger, ce qui d'ailleurs est encore inhabituel aujourd'hui. Qu'à cela ne tienne, il appelle discrètement un serveur et lui signifie qu'il voudrait bien prendre la viande restante de son plat... "pour son chien", susurre-t-il. Et c'est là que le serveur lui retire prestement son assiette en disant d'une voix assurée : "mais pour votre chien, j'ai beaucoup mieux... je vais vous apporter des os!".

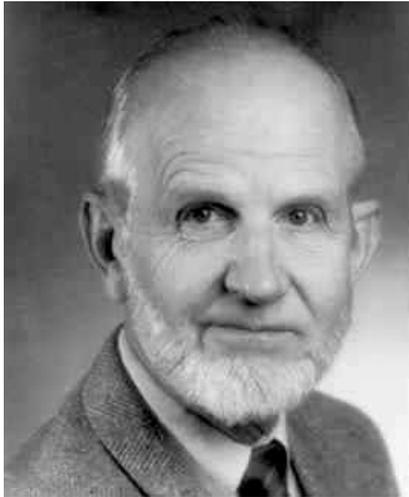
Avec Bob Phelps disparaît un grand mathématicien ainsi qu'un universitaire profondément humaniste.

*Une version anglaise plus complète est disponible à l'adresse suivante :*

*<http://experimentalmath.info/blog/2013/02/in-memoriam-robert-r-phelps/>*

## A tribute to Lars Hörmander

*par* Nicolas Lerner <sup>1</sup>



LARS HÖRMANDER, 1931–2012

A TRIBUTE TO LARS HÖRMANDER

### Foreword

Lars Hörmander died on November 25, 2012, at the age of 81. He was one of the most influential mathematicians of the twentieth century. He played a fundamental role in the development of the analysis of partial differential equations for more than forty years, displaying exceptional technical abilities combined with a broad and deep vision of the subject. His style of exposition was characterized by concision, precision and completeness.

He was awarded the Fields Medal in 1962, the Wolf Prize in 1988, and the Steele Prize in 2006. His monumental four-volume treatise, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*, is considered to be the ultimate reference on the topic of linear partial differential operators. He was a member of the Swedish Royal Academy since 1968, was elected as a member of the USA National Academy of Sciences in 1976 and served between 1987 and 1990 as a vice-president of the International Mathematical Union.

<sup>1</sup>N. Lerner, Institut de Mathématiques de Jussieu, Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), 4 Place Jussieu, 75252 Paris cedex 05, France -lerner@math.jussieu.fr

Lars Hörmander 1931-2012

---

## Before the Fields Medal

Lars Hörmander was born in 1931, in southern Sweden, where his father was a teacher. He got his high-school degree in 1948 and a master's degree two years later at the age of nineteen at the University of Lund, with M. Riesz as an advisor. He wrote a Ph.D. thesis under the guidance of L. Gårding and the publication of that thesis, *On the theory of general partial differential operators* [1] in *Acta Mathematica* in 1955 can be considered as the starting point of a new era for Partial Differential Equations.

Among other things, very general theorems of local existence were established, without using an analyticity hypothesis of the coefficients. L. Hörmander's arguments relied on a priori inequalities combined with abstract functional analytic arguments. Let us cite L. Gårding in [2], writing about a general linear PDE

$$P(x, D_x)u = f. \tag{1}$$

*It was pointed out very emphatically by Hadamard that it is not natural to consider only analytic solutions and source functions  $f$  even if  $P$  has analytic coefficients. This reduces the interest of the Cauchy-Kowalevski theorem which says that (1) has locally analytic solutions if  $P$  and  $f$  are analytic. The Cauchy-Kowalevski theorem does not distinguish between classes of differential operators which have, in fact, very different properties such as the Laplace operator and the Wave operator.*

L. Hörmander's filiation with J. Hadamard's work is clear. J. Hadamard (1865–1963) introduced the fruitful notion of well-posedness for a PDE problem : existence, uniqueness are important properties, but above all, continuous dependence of the solution with respect to the data should be emphasized as one of the most important properties for a PDE. After all, the data (boundary or Cauchy data, various quantities occurring in the equation) in a Physics problem are known only approximately and even if the solution existed and was proven unique, this would be useless for actual computation or applications if minute changes of the data triggered huge changes in the solution. In fact, one should try to establish some *inequalities* controlling the size of the norms or semi-norms of the solution  $u$  in some functional space. The lack of well-posedness is linked to instability and is also a very interesting phenomenon to study. We can quote again at this point L. Gårding (op.cit.) :

*When a problem about partial differential operators has been fitted into the abstract theory, all that remains is usually to prove a suitable*

*inequality and much of our knowledge is, in fact, essentially contained in such inequalities.*

L. Ehrenpreis [3] and B. Malgrange [4] had proven a general theorem on the existence of a fundamental solution for any constant coefficients PDE, and the work [5] by L. Hörmander provided another proof along with some improvement on the regularity properties, whereas [1] gave a characterization of hypoelliptic constant coefficients PDE, in terms of properties of the algebraic variety

$$\text{char}P = \{\zeta \in \mathbb{C}^n, P(\zeta) = 0\}.$$

The operator  $P(D)$  is hypoelliptic if and only if

$$|\zeta| \rightarrow \infty \text{ on } \text{char}P \implies |\text{Im } \zeta| \rightarrow \infty.$$

Here hypoellipticity means  $Pu \in C^\infty \implies u \in C^\infty$ . The characterization of hypoellipticity of the constant coefficient operator  $P(D)$  by a simple algebraic property of the characteristic set is a tour de force, technically and conceptually : in the first place, nobody had conjectured such a result, or even remotely suggested a link between the two properties and next, the proof provided by L. Hörmander relies on a very subtle study of the characteristic set, requiring an extensive knowledge of real algebraic geometry.

In 1957, Hans Lewy made a stunning discovery [6] : the equation  $\mathcal{L}u = f$  with

$$\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} + i(x_1 + ix_2) \frac{\partial}{\partial x_3} \tag{2}$$

does not have local solutions for most right-hand-sides  $f$ . The surprise came in particular from the fact that the operator  $\mathcal{L}$  is a non-singular (i.e. non-vanishing) vector field with a very simple expression and also, as the Cauchy-Riemann operator on the boundary of a pseudo-convex domain, it is not a cooked-up example. L. Hörmander started working on the Lewy operator (2) with the goal to get a general geometric understanding of a class of operators displaying the same defect of local solvability. The two papers [7], [8], published in 1960 achieved that goal. Taking a complex-valued homogeneous symbol  $p(x, \xi)$ , the existence of a point  $(x, \xi)$  in the cotangent bundle such that

$$p(x, \xi) = 0, \quad \{\bar{p}, p\}(x, \xi) \neq 0 \tag{3}$$

ruins local solvability at  $x$  (here  $\{\cdot, \cdot\}$  stands for the Poisson bracket). With this result, L. Hörmander gave a generalization of Lewy operator and provided a geometric explanation in invariant terms of that non-solvability phenomenon. We may note also that Condition (3) is somehow generically satisfied : considering a

## Lars Hörmander 1931-2012

---

non-elliptic operator with a complex-valued principal symbol  $p$ , the symbol  $p$  will vanish somewhere and generically  $\{\bar{p}, p\} \neq 0$  there, so that "most" non-elliptic operators with a complex-valued symbol are non-solvable.

A. Calderón's 1958 paper [9] on the uniqueness in the Cauchy problem was somehow the starting point for the renewal of singular integrals methods in local analysis. Calderón proved in [9] that an operator with real principal symbol with simple characteristics has the Cauchy uniqueness property; his method relied on a pseudodifferential factorization of the operator which can be handled thanks to the simple characteristic assumption. It appears somewhat paradoxical that L. Hörmander, who became later one of the architects of pseudodifferential analysis, found a generalization of Calderón's paper using only a local method, inventing a new notion to prove a Carleman estimate. He introduced in [10], [11] the notion of pseudo-convexity of a hypersurface with respect to an operator, and was able to handle the case of tangent characteristics of order two.

In 1957, L. Hörmander was appointed Professor at the University of Stockholm, where he was to stay until 1964, but he also spent some time in Stanford University as well as at the Institute for Advanced Study in Princeton.

In 1962, at the age of 31, L. Hörmander was awarded the Fields Medal. His impressive work on Partial Differential Equations, in particular his characterization of hypoellipticity for constant coefficients and his geometrical explanation of the Lewy non-solvability phenomenon were certainly very strong arguments for awarding him the Medal. Also his new point of view on PDE, which combined functional analysis with a priori inequalities, had led to very general results on large classes of equations, which had been out of reach in the early fifties.

L. Hörmander wrote in the book *Fields Medallists' lectures* [12] :

*The 1962 ICM was held in Stockholm. In view of the small number of professors in Sweden at the time, it was inevitable that I should be rather heavily involved in the preparations, but it came as a complete surprise to me when I was informed that I would receive one of the Fields medals at the congress.*

## From the first PDE book to the four-volume treatise

L. Hörmander spent the summers 1960-61 at Stanford University as an invited professor, and took advantage of this time to honour the offer of the *Springer Grundlehren series* of publishing a book about PDE. It was done in 1963, with the publication of his first book, *Linear partial differential operators*. That book was a milestone in the study of PDE, and a large mathematical public discovered L. Hör-

mander's exposition of recent progress in the area.

In the first place, the rôle of Distribution Theory was emphasized as the perfect tool for linear PDE. Although the notion of weak solution for a PDE was already known to S. Sobolev and to the Russian school in the thirties, it is indeed L. Schwartz' definition of distributions which created the best perspective, combining abstract aspects of functional analysis with Fourier analysis. L. Hörmander had been familiar for quite a long time with Schwartz theory, but he had noticed that many mathematicians, including his mentor M. Riesz, were rather negative (to say the least) about it. F. Trèves in [13] tells the following anecdote : L. Schwartz visited Lund University in 1948 and gave a talk there on some elements of distribution theory. Having written on the board the integration by parts formula to explain the idea of a weak derivative, he was interrupted by M. Riesz saying "I hope you have found something else in your life." Also, M. Riesz claimed that the known examples of fundamental solutions of hypoelliptic PDE with constant coefficients were always locally integrable, so that distributions were useless for their study. A few years after his retirement, Hörmander went back to this problem and found an example in 14 dimensions of an hypoelliptic operator whose fundamental solution is not locally integrable (see [14]). During his thesis work, L. Hörmander managed to avoid explicit reference to Schwartz theory, but in 1963, it was a different story and he chose to present Schwartz Distribution Theory as the basic functional analytic framework of his book. As a matter of fact, the first chapter of his book is devoted to a (dense) presentation of the theory, including the geometric version on manifolds.

Large segments of the book were devoted to constant coefficient operators, but it contained also a great deal of the recent progress on uniqueness for the Cauchy problem, with Carleman estimates and a wide array of counterexamples due to A. Pliś and P. Cohen. Anyhow, that book became soon a standard text which must be studied by anybody wishing to enter the PDE field.

L. Hörmander's career developed at a quick pace after the Fields medal ; he wrote in [15] :

*Some time after two summers (1960, 1961) at Stanford, I received an offer of a part time appointment as professor at Stanford University. . . I had barely arrived at Stanford when I received an offer to come to the Institute for Advanced Study as permanent member and professor. Although I had previously been determined not to leave Sweden, the opportunity to do research full time in a mathematically very active environment was hard to resist. . . I decided in the fall of 1963 to accept the offer from the IAS and resign from the universities of Stockholm and Stanford to take up a new position in Princeton in the fall of 1964.*

Lars Hörmander 1931-2012

---

### Hypoellipticity

A. Kolmogorov introduced in 1934 the operator in  $\mathbb{R}_{t,x,v}^3$

$$\mathcal{K} = \partial_t + v\partial_x - \partial_v^2, \tag{4}$$

to provide a model for Brownian motion in one dimension. That was L. Hörmander's starting point. He took up the study of general operators

$$\mathcal{H} = X_0 - \sum_{1 \leq j \leq r} X_j^2, \tag{5}$$

where the  $(X_j)_{0 \leq j \leq r}$  are smooth real vector fields whose Lie algebra generates the tangent space at each point. The rank of the  $X_j$  and their iterated Poisson brackets is equal to the dimension of the ambient space (for  $\mathcal{K}$ , we have  $X_0 = \partial_t + v\partial_x$ ,  $X_1 = \partial_v$ ,  $[X_1, X_0] = \partial_x$ ). These operators were proven in [16] to be hypoelliptic, i.e. such that  $\text{singsupp } u = \text{singsupp } \mathcal{H}u$  for the  $C^\infty$  singular support. This Hörmander paper was the starting point of many studies, including numerous articles in probability theory and the operators  $\mathcal{H}$  soon became known as *Hörmander's sum of squares*. Their importance in probability came from the fact that these operators appeared as a generalization of the heat equation where the diffusion term  $\sum_{1 \leq j \leq r} X_j^2$ , was no longer elliptic, but had instead some hypoelliptic behavior.

### Pseudodifferential Equations

The aforementioned article by A. Calderón on uniqueness for the Cauchy problem led to renewed interest in singular integrals and the notion of pseudodifferential operator along with a symbolic calculus was introduced in the sixties by several authors : J.J. Kohn and L. Nirenberg in [17], A. Unterberger and J. Bokobza in [18]. L. Hörmander wrote in 1965 a synthetic account of the nascent pseudodifferential methods with the article [19].

### Complex analysis

The now classical book, *An introduction to complex analysis in several variables* [20] and the paper [21] provide a PDE point of view on the holomorphic functions of several variables : they are considered as solutions of a PDE, the  $\bar{\partial}$  system, and that perspective along with  $L^2$  estimates turned out to be very fruitful for their study. Here is an excerpt from the preface of the book :

*Two recent developments in the theory of partial differential equations have caused this book to be written. One is the theory of overdetermined systems of differential equations with constant coefficients,*

*which depends very heavily on the theory of functions of several complex variables. The other is the solution of the so-called  $\bar{\partial}$  Neumann problem, which has made possible a new approach to complex analysis through methods from the theory of partial differential equations. Solving the Cousin problems with such methods gives automatically certain bounds for the solution, which are not easily obtained with the classical methods, and results of this type are important for the applications to overdetermined systems of differential equations.*

Inhomogeneous Cauchy-Riemann equations in a polydisc, power series, Reinhardt domains, domains of holomorphy, pseudo-convexity and plurisubharmonicity, and Runge domains are dealt with in the second chapter. Included are theorems due to Hartogs, Dolbeault-Grothendieck, Cartan [22], Cartan-Thullen [23], Bochner [24], Lewy [25], Oka [26], Serre [27], and Browder [28]. After a chapter on commutative Banach algebras, Chapter IV is devoted to existence and approximation theorems for solutions of the inhomogeneous Cauchy-Riemann equations in domains of holomorphy. The technique is to prove  $L^2$  estimates involving weight functions. Next, L. Hörmander introduces the notion of Stein manifolds, which are modeled on the properties of domains of holomorphy in  $\mathbb{C}^n$ . The theorems on existence and approximations of solutions of the Cauchy-Riemann equations are extended to these manifolds and it is shown that a manifold is a Stein manifold if and only if it can be represented concretely as a closed submanifold of a space  $\mathbb{C}^N$  of sufficiently high dimension. Analytic continuation and the Cousin problems are studied for Stein manifolds. These results are due to Cartan, Grauert, Bishop, Narasimhan, and Oka. Chapter VI gives the Weierstrass preparation theorem and studies divisibility properties in the ring  $A_0$  of germs of analytic functions. Submodules of  $A_0^p$  are studied along with K. Oka's theorem on the module of relations [29]. This is needed for the theory of coherent analytic sheaves, which is presented in the next and final chapter. There the study of the Cousin problems is extended to coherent analytic sheaves on Stein manifolds. A discussion of the theorem of Siu [30] on the Lelong numbers of plurisubharmonic functions is added. The  $L^2$  techniques are essential in the proof and plurisubharmonic functions play such an important rôle that it is natural to discuss their main singularities.

### Spectral Asymptotics

The article [31], which contains the first occurrence of Fourier Integral Operators, provides the best possible estimates for the remainder term in the asymptotic formula for the spectral function of an arbitrary elliptic (pseudo)differential ope-

## Lars Hörmander 1931-2012

---

rator. This is achieved by means of a complete description of the singularities of the Fourier transform of the spectral function for low frequencies.

In spite of this outstanding activity, L. Hörmander did not feel that comfortable at the IAS :

*It turned out that I found it hard to stand the demands on excellence that inevitably accompany the privilege of being an Institute professor. After two years of very hard work I felt that my results were not up to the level which could be expected. Doubting that I would be able to stand a lifetime of pressure, I started to toy with the idea of returning to Sweden when a regular professorship became vacant. An opportunity arose in 1967, and I decided to take it and return as professor in Lund from the fall term 1968. ”*

So in 1968, L. Hörmander had completed a full circle and was back in Lund where he had started as an undergraduate in 1948. He was to remain there until his retirement, with interruptions for some visits, mainly in the US.

### The microlocal revolution

The fact that singularities should be classified according to their spectrum was recognized first in the early seventies, by three Japanese mathematicians : the Lecture Notes [32] by M. Sato, T. Kawai and M. Kashiwara set the basis for the analysis in the phase space and microlocalization. The analytic wave-front-set was defined in algebraic terms and elliptic regularity as well as propagation theorems were proven in the analytic category. The paper [33] by J. Bros and D. Iagolnitzer gave a formulation of the analytic wave-front-set that was more friendly to analysts.

The definition of the  $C^\infty$  wave-front-set was given in Hörmander’s [34] by means of pseudodifferential operators. The propagation-of-singularities theorem for real principal type operators (see e.g. Hörmander’s [35]) represents certainly the apex of microlocal analysis. Since the seventeenth century with the works of Huygens and Newton, the mathematical formulation for propagation of linear waves lacked correct definitions. The wave-front-set provided the ideal framework : for  $P$  a real principal type operator with smooth coefficients (e.g. the wave equation) and  $u$  a function such that  $Pu \in C^\infty$ ,  $WFu$  is invariant by the flow of the Hamiltonian vector field of the principal symbol of  $P$ . These results found new proofs via Hörmander’s articles on Fourier Integral Operators [36] and [37] (joint work with J. Duistermaat). It is interesting to quote at this point the introduction of [36] (the reference numbers are those of our reference list) :

*The work of Egorov is actually an application of ideas from Maslov [38] who stated at the International Congress in Nice that his book actually contains the ideas attributed here to Egorov [39] and Arnold [40] as well as a more general and precise operator calculus than ours. Since the book is highly inaccessible and does not appear to be quite rigorous we can only pass this information on to the reader, adding a reference to the explanations of Maslov's work given by Buslaev [41]. In this context we should also mention that the "Maslov index" which plays an essential role in Chapters III and IV was already considered quite explicitly by J. Keller [42]. It expresses the classical observation in geometrical optics that a phase shift of  $\pi/2$  takes place at a caustic. The purpose of the present paper is not to extend the more or less formal methods used in geometrical optics but to extract from them a precise operator theory which can be applied to the theory of partial differential operators. In fact, we only use the simplest expansions which occur in geometrical optics, and a wealth of other ideas remain to be investigated.*

The introduction of the next article [37] begins with

*The purpose of this paper is to give applications of the operator theory developed in the first part. These concern the existence and regularity of solutions of*

$$Pu = f$$

*in a manifold  $X$ . In particular we construct and study parametrices for  $P$ ; we consider the above equation under the assumption that  $P$  has a principal symbol  $p$  which is homogeneous of degree  $m$  and real.*

### Local Solvability

After Lewy's counterexample (2) and L. Hörmander's work on local solvability mentioned above, L. Nirenberg and F. Trèves in 1970 ([43], [44], [45]), after a study of complex vector fields in [46] (see also the S. Mizohata paper [47]), introduced the so-called condition  $(\Psi)$ , and provided strong arguments suggesting that this geometric condition should be equivalent to local solvability. The necessity of condition  $(\Psi)$  for local solvability of principal-type pseudodifferential equations was proved in two dimensions by R. Moyer in [48] and in general by L. Hörmander ([49]) in 1981.

The sufficiency of condition  $(\Psi)$  for local solvability of differential equations was proved by R. Beals and C. Fefferman ([50]) in 1973. They created a new type of pseudodifferential calculus, based on a Calderón-Zygmund decomposition, and

## Lars Hörmander 1931-2012

---

were able to remove the analyticity assumption required by L. Nirenberg and F. Trèves. The sufficiency of that geometric condition was proven in 1988 in two dimensions by N. Lerner’s [51]. Much later in 1994, L. Hörmander, in his survey article [52], went back to local solvability questions giving a generalization of N.L.’s article [53]. In 2006, N. Dencker [54] proved that condition  $(\Psi)$  implies local solvability with loss of two derivatives.

### More on pseudodifferential calculus

The outstanding results by R. Beals and C. Fefferman [50] on local solvability of differential equations were supplemented by L. Hörmander’s paper [55] in which a propagation argument provides local existence of  $C^\infty$  solutions for  $C^\infty$  right-hand-sides. However, a most striking fact in R. Beals and C. Fefferman’s proof was the essential use of a non-homogeneous pseudodifferential calculus which allowed a finer microlocalization than what could be given by conic microlocalization. The efficiency and refinement of the pseudodifferential machinery was such that the very structure of this tool attracted the attention of several mathematicians, among them R. Beals and C. Fefferman [56], R. Beals [57], A. Unterberger [58]. L. Hörmander’s 1979 paper [59], *The Weyl calculus of pseudodifferential operators*, represents an excellent synthesis of the main requirements for a pseudodifferential calculus to satisfy ; that article was used by many authors in multiple circumstances and the combination of the symplectically invariant Weyl quantization along with the datum of a metric on the phase space was proven to be a very efficient approach.

### Writing the four-volume book, 1979-1984

On March 25, 1982, L. Hörmander received a *Doctorate Honoris Causa* from the Université Paris-sud at Orsay. The main scientific address was written by J.-M. Bony and J. Sjöstrand. The whole PDE community in Orsay and elsewhere was waiting for Hörmander’s forthcoming book to appear in the *Springer Grundlehren series*. Three or four volumes, joint work or not, table of contents, nothing was clear-cut at this moment and the expectations were high that the book would represent a landmark in the history of PDE. The first two volumes appeared in 1983.

### First volume : Distribution Theory and Fourier Analysis

It is now a classical book of Analysis and an excellent presentation of Distribution Theory. In particular, that introduction remains elementary and free from very abstract functional analytic arguments. In the notes of Chapter II, L. Hörmander is wrote :

*The topology in  $C_0^\infty(X)$  is the inductive limit of the topology in  $C_0^\infty(K)$  when the compact set  $K$  increases to  $X$ , so it is a  $LF$  topology. We have avoided this terminology in order not to encourage the once current misconception that familiarity with  $LF$  space is essential for the understanding of distribution theory.*

As a result, this first volume is highly readable and represents a useful tool for teaching various elements of distribution theory. The organization of the whole treatise is also quite impressive : for instance Chapter I in this first volume contains a quite refined notion of partitions of unity, not to be used before Chapter XVIII in the third volume. Several mathematical gems can be found in this first volume : a new proof of the Schwartz kernel theorem in Chapter V, a proof of the Malgrange preparation theorem, an extensive study of the methods of stationary phase in Chapter VII. Self-containedness is also perfect : the very classical Gaussian integrals get computed explicitly, the three-page treatment of the Airy function in Chapter 7 is a model of concision and clarity.

### Second volume : Differential Operators with Constant Coefficients

L. Hörmander writes in the preface to this volume :

*This volume is an expanded version of Chapters III, IV, V and VII of my 1963 book. . . The main technical tool in this volume is the Fourier-Laplace transformation. More powerful methods for the study of operators with variable coefficients will be developed in Volume III. However, the constant coefficient theory has given the guidelines for all that work. Although the field is no longer very active - perhaps because of its advanced state of development - . . . the material presented here should not be neglected by the serious student who wants to get a balanced perspective of the theory. . .*

The third and fourth volumes appeared two years later in 1985. L. Hörmander is writes in the preface to these volumes :

*The first two volumes of this monograph can be regarded as an expansion of my book. . . published in the Grundlehren series in 1963. However, volumes III and IV are almost entirely new. In fact they are*

Lars Hörmander 1931-2012

---

*mainly devoted to the theory of linear differential operators as it has developed after 1963. Thus the main topics are pseudodifferential and Fourier integral operators with the underlying symplectic geometry.*

Here the style of writing has drastically changed : these last two volumes are no longer intended for gifted graduate students, but the targeted readership is obviously researchers, already conversant with some technicalities of the subject.

**Third volume : Pseudodifferential operators**

Chapter XVII may be an exception to the above remark, although the technique of Carleman estimates is far from easy, the content of that chapter remains elementary as far as tools are concerned.

Chapter XVIII is concerned with pseudodifferential calculus : the 30-page presentation of the *Basic Calculus* is certainly an excellent introduction to the topic and L. Hörmander was cautious enough to give a separated treatment of the most classical case of pseudodifferential calculus, leaving aside the refinements for later sections in the same chapter. R. Melrose's totally characteristic calculus ([60]) and L. Boutet de Monvel's transmission condition ([61]) are given a detailed treatment in this chapter. The last sections are devoted to the Weyl calculus as described in L. Hörmander [59] and results on new lower bounds by C. Fefferman and D.H. Phong [62] are also given a thorough treatment.

Chapter XIX deals with elliptic operators on a manifold without boundary and the index theorem. In the Notes of Chapter XVIII, L. Hörmander writes :

*It seems likely that it was the solution by Atiyah and Singer [63] of the index problem for elliptic operators which led to the revitalization of the theory of singular integral operators.*

Chapter XX is entitled *Boundary Problems for Elliptic Differential Operators*. It reproduces at the beginning elements of Chapter X in [64] and takes into account the developments on the index problem for elliptic boundary problems given by L. Boutet de Monvel [61], [65] and G. Grubb [66].

Chapter XXI is a presentation of symplectic geometry and begins with a series of classical results. Next, one finds various sharp results on normal forms of smooth functions in a symplectic space, in particular the results of J. Duistermaat and J. Sjöstrand [67]. Also this chapter is an important preparation for local solvability results of Chapter XXVI with the normal form given in the paper by L. Nirenberg and F. Treves [44]. Section 21.5 is devoted to the symplectic reduction of complex-valued quadratic forms and remains an excellent reference on the topic.

Chapter XXII is concerned with hypoelliptic operators : on the one hand, operators with a pseudodifferential parametrix, such as the hypoelliptic constant

coefficient operators and on the other hand generalizations of the Kolmogorov operators (5). Results on lower bounds for pseudodifferential operators due to A. Melin [68] are a key tool in this analysis. Results of L. Boutet de Monvel [69], J. Sjöstrand [70], L. Boutet de Monvel, A. Grigis and B. Helffer [71] are given.

Chapter XXIII deals with the classical topic of strictly hyperbolic equations and begins with the exposition of the classical energy method. The classical estimates are obtained for first order pseudodifferential operators and then a factorization argument allows one to deal with higher order operators. Also a version of the Lax-Mizohata theorem is given, which asserts the necessity of weak hyperbolicity for a weak version of well-posedness, following the work by V. Ivrii and V. Petkov [72].

The last chapter in volume 3 is Chapter XXIV, which is devoted to the mixed Dirichlet-Cauchy problem for second order operators. Singularities of solutions of the Dirichlet problem arriving at the boundary on a transversal bicharacteristic will leave again on the reflected bicharacteristic. The study of tangential bicharacteristics required a new analysis and attracted the attention of many mathematicians. Among these works : the papers by R. Melrose [73], M. Taylor [74], G. Eskin [75], V. Ivrii [76], R. Melrose and J. Sjöstrand [77], [78], K. Andersson and R. Melrose [79], J. Ralston [80], J. Sjöstrand [81].

Volume 3 should not be left without paying attention to the two appendices, providing a self-contained description of classical results on distributions in an open manifold as well as the exposition of some tools of differential geometry.

#### Fourth volume, Fourier integral operators

Chapter XXV is devoted to the theory of Fourier integral operators, including the case of complex phase. Although the propagation-of-singularities theorem for real principal type operators is already proven by pseudodifferential methods in a previous chapter (XXIII), the FIO method provides another proof.

Chapter XXVI deals with principal type operators. The real principal type case appears now as quite simple and the second section drives us into the much more complicated realm of complex-valued symbols. The necessity of condition  $(\Psi)$  for local solvability, taken from the already mentioned [49] and [48] is proven in Section 26.4. The last seven sections of this chapter are devoted to very precise propagation theorems for operators with complex symbols satisfying the stronger condition  $(P)$ . The main ingredients used in the proof are the Malgrange preparation theorem, Egorov’s theorem on conjugation of pseudodifferential operators by Fourier integral operators, Nirenberg-Treves estimates on degenerate Cauchy-Riemann equations [44], Beals-Fefferman non-homogeneous localization

Lars Hörmander 1931-2012

---

procedure [50] and Hörmander’s propagation result [55].

Chapter XXVII is concerned with subelliptic operators. A pseudodifferential operator of order  $m$  is said to be subelliptic with a loss of  $\delta$  derivatives whenever

$$Pu \in H_{loc}^s \implies u \in H_{loc}^{s+m-\delta}. \quad (6)$$

The elliptic case corresponds to  $\delta = 0$ , whereas the cases  $\delta \in (0, 1)$  are much more complicated to handle. The first complete proof for operators satisfying condition  $(P)$  was given by F. Trèves in [82], using a coherent states method, and that proof is given in Section 27.3. Although it is far from an elementary proof, the simplifications allowed by condition  $(P)$  permit a rather compact exposition. The last three sections of that chapter are devoted to the much more involved case of subelliptic operators satisfying condition  $(\Psi)$ , and one could say that the proof is extremely complicated. Let us cite L. Hörmander in [83] :

*For the scalar case, Egorov [84] found necessary and sufficient conditions for subellipticity with loss of  $\delta$  derivatives ( $\delta \in [0, 1)$ ); the proof of sufficiency was completed in [85]. The results prove that the best  $\delta$  is always of the form  $k/(k+1)$  where  $k$  is a positive integer. . . A slight modification of the presentation of [85] is given in Chapter 27 of [86], but it is still very complicated technically. Another approach which covers also systems operating on scalars has been given by Nourrigat [87, 88] (see also the book [89] by Helffer and Nourrigat), but it is also far from simple so the study of subelliptic operators may not yet be in a final form.*

Chapter XXVIII is entitled *Uniqueness for the Cauchy problem*. It appears as a natural sequel to Chapter VIII in the first book [64]. The Calderón uniqueness result along with uniqueness under a pseudoconvexity condition are given, and the notion of principal normality is enlarged, using the Fefferman-Phong inequality [62]. However pseudodifferential methods are greedy with derivatives, so that the aforementioned chapter in [64] is not entirely included in this chapter. The last section of this chapter is devoted to a result on second order operators of real principal type essentially due to N. Lerner and L. Robbiano [90].

Chapter XXIX is entitled *Spectral Asymptotics*. This chapter is devoted to the asymptotic properties of the eigenvalues and the spectral function for self-adjoint elliptic operators. If  $P$  is a positive operator of order  $m$ ,  $P^{1/m}$  is a pseudodifferential operator with eigenvalue  $\lambda$  equal to those of  $P$  for  $\lambda^m$ . The corresponding unitary group  $e^{itP^{1/m}}$  can be viewed as a Fourier integral operator. Here also L. Hörmander presents an excellent synthesis of many works on this topic : J. Chazarain [91], J. Duistermaat and V. Guillemin [92], V. Ivrii [93], V. Guillemin [94, 95, 96], Y. Colin de Verdière [97], A. Weinstein [98].

The very last chapter is the thirtieth, *Long Range Scattering Theory*. It is devoted to the study of operators of type  $P_0(D) + V(x, D)$  where  $P_0$  is elliptic of order  $m$  and  $V$  is of order  $m$  so that  $P_0(D) + V(x, D)$  is also elliptic and

$$V(x, \xi) = V_S(x, \xi) + V_L(x, \xi),$$

where the short range part  $V_S$  has coefficients decreasing as fast as an integrable function of  $|x|$  and  $V_L$  satisfies some estimates similar to those satisfied by  $(1 + |\xi|)^m(1 + |x|)^{-\varepsilon}$  for some  $\varepsilon > 0$ . Here also L. Hörmander gives an excellent synthesis of his work along with the works of many mathematicians, among them S. Agmon [99].

There is certainly no better conclusion to the review of this treatise than the citation for the 2006 Leroy P. Steele Prize, awarded to Lars Hörmander for mathematical exposition :

*In these four volumes, Hörmander describes the developments [of microlocal analysis] in a treatment that is seamless and self-contained. Moreover, the effort to make this treatment self-contained has inspired him to recast, in much more simple and accessible form, the approach to much of this material as it originally appeared in the literature. An example is the theory of Fourier integral operators, which was invented by him in two seminal papers in the early 1970s. (These get a completely new and much more elegant reworking in volume four.) In brief, these four volumes are far more than a compendium of random results. They are a profound and masterful "rethinking" of the whole subject of microlocal analysis. Hörmander's four volumes on partial differential operators have influenced a whole generation of mathematicians working in the broad area of microlocal analysis and its applications. In the history of mathematics one is hard-pressed to find any comparable "expository" work that covers so much material, and with such depth and understanding, of such a broad area of mathematics.*

## Intermission Mittag-Leffler 1984-1986, back to Lund 1986

L. Hörmander spent the academic years 1984-86 as director of the Mittag-Leffler Institute in Stockholm. He wrote about this :

*I had only accepted a two year appointment with a leave of absence from Lund since I suspected that the many administrative duties there would not agree very well with me. The hunch was right...*

Lars Hörmander 1931-2012

---

L. Hörmander was back at the university of Lund in the Fall of 1986.

**Nonlinear hyperbolic equations**

During three semesters in 1986-87, Hörmander gave some lectures on global existence or blowup for nonlinear hyperbolic equations. Ten years later, in 1996, the book *Lectures on Nonlinear Hyperbolic Differential Equations* [100] appeared in the Springer series MATHÉMATIQUES & APPLICATIONS.

Some classical topics on scalar first order equations are covered and revisited in the first chapters of the book. Chapter 5 concerns compensated compactness. The main tool is Young measures associated to an  $L^\infty$  bounded sequence of functions. The author uses them to prove “compensated compactness” theorems, generalizing the “Murat-Tartar div-curl lemma” [101], [102]. Applications of these ideas to scalar or two-by-two systems are included.

The rest of the book is devoted entirely to nonlinear problems in several space variables. The first subject which is treated is the problem of long-time existence of small solutions for nonlinear wave or Klein-Gordon equations. L. Hörmander uses the original method of S. Klainerman [103]. It relies on a weighted  $L^\infty$  Sobolev estimate for a smooth function in terms of  $L^2$  norms of  $Z^I u$ , where  $Z^I$  stands for an iterate of homogeneous vector fields tangent to the wave cone. The chapter closes with a proof of global existence in 3 space dimensions, when the nonlinearity satisfies the so-called “null condition”, i.e. a compatibility relation between the nonlinear terms and the wave operator.

The last part of the book is concerned with the use of microlocal analysis in the study of nonlinear equations. Chapter 9 is devoted to the study of pseudodifferential operators lying in the “bad class”  $S_{1,1}^0$  (such operators are not bounded on  $L^2$ ). The starting point for the study of this class is due to G. Bourdaud [104], followed by [105]. L. Hörmander proves that a necessary and sufficient condition for such an operator  $a(x, D)$  to be bounded on  $L^2$  is that the partial Fourier transform of its symbol  $\hat{a}(\xi, \eta)$  satisfies a convenient vanishing property along the diagonal  $\xi + \eta = 0$ . These operators form a subclass of  $S_{1,1}^0$  for which he discusses composition, adjoints, microlocal ellipticity and Gårding’s inequality. The results of Chapter 9 are applied in Chapter 10 to construct Bony’s paradifferential calculus [106, 107]. One associates to a symbol  $a(x, \xi)$ , with limited regularity in  $x$ , a paradifferential operator, and proves the basic theorems on symbolic calculus, as well as “Bony’s paraproduct formula”. Next Bony’s parilinearization theorem is discussed : it asserts that if  $F$  is a smooth function and  $u$  belongs to  $C^\rho(\rho > 0)$ ,  $F(u)$  may be written as  $Pu + Ru$ , where  $P$  is a paradifferential operator with symbol  $F'(u)$  and  $R$  is a  $\rho$ -regularizing operator. This is used to prove microlocal elliptic

regularity for solutions to nonlinear differential equations. The last chapter is devoted to propagation of microlocal singularities. After discussing propagation of singularities for solutions of linear pseudodifferential equations with symbols in the classes defined in Chapter 9, the author proves Bony’s theorem on propagation of weak singularities for solutions to nonlinear equations. The proof relies on a reduction to a linear paradifferential equation, using the results of the preceding chapter.

### Notions of convexity

L. Hörmander wrote in 1994 another book entitled *Notions of convexity* [108], published in the Birkhäuser Series, *Progress in Mathematics*. The main goal of the book is to expose part of the thesis of J.-M. Trépreau [109] on the sufficiency of condition  $(\Psi)$  for local solvability in the analytic category. For microdifferential operators acting on microfunctions, the necessity of condition  $(\Psi)$  for microlocal solvability was proven by M. Sato, T. Kawai and M. Kashiwara in [32]. However the book’s content clearly indicates a long approach to J.-M. Trépreau’s result ; the reader is invited first to a pleasant journey in the landscape of convexity and the first chapters of the book are elementary.

### Students

L. Hörmander had the following Ph. D. students :

Germund DAHLQUIST, at Stockholm University, in 1958,  
Vidar THOMÉE, at Stockholm University, in 1959,  
Christer KISELMAN, at Stockholm University, in 1966,  
Göran BJÖRCK, at Stockholm University, in 1966,  
Jan BOMAN, at Stockholm University, in 1967,  
Johannes SJÖSTRAND, at Lund University, in 1972,  
Anders MELIN, at Lund University, in 1973,  
Lars NYSTED, at Stockholm University, in 1973,  
Arne ENQVIST, at Lund University, in 1974,  
Gudrun GUDMUNSDOTTIR, at Lund University, in 1975,  
Anders KÄLLÉN, at Lund University, in 1979,  
Nils DENCKER, at Lund University, in 1981,  
Ragnar SIGURDSSON, at Lund University, in 1984,  
Hans LINDBLAD, at Lund University, in 1989,  
Pelle PETTERSSON at Lund University, in 1994.

Lars Hörmander 1931-2012

---

## Retirement in 1996

L. Hörmander retired in 1996 and became an emeritus professor. He was still very active, publishing about two or three research papers every year. His enthusiasm and interest for mathematics remained at a high level until the very end of his life.

## Final comments

After this not-so-short review of Lars Hörmander’s works, we see in the first place that he was instrumental in the mathematical setting of Fourier Integral Operators, (achieved in part with J. Duistermaat) and also in the elaboration of a comprehensive theory of pseudodifferential operators. Fourier Integral Operators had a long heuristic tradition, linked to Quantum Mechanics, but their mathematical theory is indeed a major lasting contribution of Lars Hörmander. He was also the first to study the now called *Hörmander’s sum of squares* of vector fields and their hypoellipticity properties. These operators are important in probability theory, geometry but also gained a renewed interest in the recent studies of regularization properties for Boltzmann’s equation and other non-linear equations. Hörmander played also an essential role in the completion of the theory of subelliptic operators, and there is no doubt, that without his relentless energy and talent, the clarification of this part of the theory would have probably taken many more years.

Lars Hörmander was also a great mathematical writer and a man of synthesis. The eight books published by Hörmander are reference books, all with a very personal perspective. Broad, dense and deep, these books are essentially self-contained and bring the reader up to state-of-the-art in several mathematical domains. The four-volume treatise on linear PDE, the book on several complex variables as well as the volume on non-linear hyperbolic equations are here to stay as outstanding contributions to Mathematics.

**Acknowledgements.** The author is grateful to J.-M. Bony and J. Sjöstrand for several helpful comments on earlier versions of this manuscript.

## Bibliographie

- [1] Lars Hörmander. On the theory of general partial differential operators. *Acta Math.*, 94 :161–248, 1955.

- [2] Lars Gårding. Some trends and problems in linear partial differential equations. In *Proc. Internat. Congress Math. 1958*, pages 87–102. Cambridge Univ. Press, New York, 1960.
- [3] Leon Ehrenpreis. Solution of some problems of division. I. Division by a polynomial of derivation. *Amer. J. Math.*, 76 :883–903, 1954.
- [4] Bernard Malgrange. Equations aux dérivées partielles à coefficients constants. I. Solution élémentaire. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 237 :1620–1622, 1953.
- [5] Lars Hörmander. Local and global properties of fundamental solutions. *Math. Scand.*, 5 :27–39, 1957.
- [6] Hans Lewy. An example of a smooth linear partial differential equation without solution. *Ann. of Math. (2)*, 66 :155–158, 1957.
- [7] Lars Hörmander. Differential operators of principal type. *Math. Ann.*, 140 :124–146, 1960.
- [8] Lars Hörmander. Differential equations without solutions. *Math. Ann.*, 140 :169–173, 1960.
- [9] A.-P. Calderón. Uniqueness in the Cauchy problem for partial differential equations. *Amer. J. Math.*, 80 :16–36, 1958.
- [10] Lars Hörmander. On the uniqueness of the Cauchy problem. II. *Math. Scand.*, 7 :177–190, 1959.
- [11] Lars Hörmander. On the uniqueness of the Cauchy problem. *Math. Scand.*, 6 :213–225, 1958.
- [12] Michael Atiyah and Daniel Iagolnitzer, editors. *Fields Medallists’ lectures*, volume 5 of *World Scientific Series in 20th Century Mathematics*. World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 1997.
- [13] François Trèves, Gilles Pisier, and Marc Yor. Laurent Schwartz (1915–2002). *Notices Amer. Math. Soc.*, 50(9) :1072–1084, 2003.
- [14] Lars Hörmander. On local integrability of fundamental solutions. *Ark. Mat.*, 37(1) :121–140, 1999.
- [15] Lars Hörmander. Autobiography of Lars Hörmander. In *Fields Medallists’ lectures*, volume 5 of *World Sci. Ser. 20th Century Math.*, pages 82–85. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1997.
- [16] Lars Hörmander. Hypoelliptic second order differential equations. *Acta Math.*, 119 :147–171, 1967.
- [17] J. J. Kohn and L. Nirenberg. An algebra of pseudo-differential operators. *Comm. Pure Appl. Math.*, 18 :269–305, 1965.
- [18] André Unterberger and Juliane Bokobza. Les opérateurs de Calderon-Zygmund précisés. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 259 :1612–1614, 1964.
- [19] Lars Hörmander. Pseudo-differential operators. *Comm. Pure Appl. Math.*, 18 :501–517, 1965.

Lars Hörmander 1931-2012

---

- [20] Lars Hörmander. *An introduction to complex analysis in several variables*. D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N.J.-Toronto, Ont.-London, 1966.
- [21] Lars Hörmander.  $L^2$  estimates and existence theorems for the  $\bar{\partial}$  operator. *Acta Math.*, 113 :89–152, 1965.
- [22] Henri Cartan. Sur les matrices holomorphes de  $n$  variables complexes. *J. Math. Pures Appl.*, 19 :1–26, 1940.
- [23] Henri Cartan and Peter Thullen. Zur Theorie der Singularitäten der Funktionen mehrerer komplexen Veränderlichen. *Math. Ann.*, 106(1) :617–647, 1932.
- [24] Salomon Bochner and William Ted Martin. *Several Complex Variables*. Princeton Mathematical Series, vol. 10. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1948.
- [25] Hans Lewy. On the local character of the solutions of an atypical linear differential equation in three variables and a related theorem for regular functions of two complex variables. *Ann. of Math. (2)*, 64 :514–522, 1956.
- [26] Kiyoshi Oka. *Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables*. Iwanami Shoten, Tokyo, 1961.
- [27] Jean-Pierre Serre. Une propriété topologique des domaines de Runge. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 6 :133–134, 1955.
- [28] Andrew Browder. Cohomology of maximal ideal spaces. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 67 :515–516, 1961.
- [29] Kiyoshi Oka. Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. VII. Sur quelques notions arithmétiques. *Bull. Soc. Math. France*, 78 :1–27, 1950.
- [30] Yum Tong Siu. Analyticity of sets associated to Lelong numbers and the extension of closed positive currents. *Invent. Math.*, 27 :53–156, 1974.
- [31] Lars Hörmander. The spectral function of an elliptic operator. *Acta Math.*, 121 :193–218, 1968.
- [32] Mikio Sato, Takahiro Kawai, and Masaki Kashiwara. Microfunctions and pseudo-differential equations. In *Hyperfunctions and pseudo-differential equations (Proc. Conf., Katata, 1971; dedicated to the memory of André Martineau)*, pages 265–529. Lecture Notes in Math., Vol. 287. Springer, Berlin, 1973.
- [33] J. Bros and D. Iagolnitzer. Tuboïdes et structure analytique des distributions. II. Support essentiel et structure analytique des distributions. In *Séminaire Goulaouic-Lions-Schwartz 1974–1975 : Équations aux dérivées partielles linéaires et non linéaires, Exp. No. 18*, page 34. Centre Math., École Polytech., Paris, 1975.
- [34] Lars Hörmander. Linear differential operators. In *Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970), Tome 1*, pages 121–133. Gauthier-Villars, Paris, 1971.
- [35] Lars Hörmander. On the existence and the regularity of solutions of linear pseudo-differential equations. *Enseignement Math. (2)*, 17 :99–163, 1971.
- [36] Lars Hörmander. Fourier integral operators. I. *Acta Math.*, 127(1-2) :79–183, 1971.

- [37] J. J. Duistermaat and L. Hörmander. Fourier integral operators. II. *Acta Math.*, 128(3-4) :183–269, 1972.
- [38] V.P. Maslov. Theory of perturbations and asymptotic methods. *Moskov Gos. Univ. Moscow*, page , 1965.
- [39] Ju. V. Egorov. The canonical transformations of pseudodifferential operators. *Uspehi Mat. Nauk*, 24(5 (149)) :235–236, 1969.
- [40] V. I. Arnol’d. On a characteristic class entering into conditions of quantization. *Funkcional. Anal. i Priložen.*, 1 :1–14, 1967.
- [41] V. S. Buslaev. The generating integral and the Maslov canonical operator in the WKB method. *Funkcional. Anal. i Priložen.*, 3(3) :17–31, 1969.
- [42] Joseph B. Keller. Corrected Bohr-Sommerfeld quantum conditions for nonseparable systems. *Ann. Physics*, 4 :180–188, 1958.
- [43] L. Nirenberg and F. Trèves. On local solvability of linear partial differential equations. I. Necessary conditions. *Comm. Pure Appl. Math.*, 23 :1–38, 1970.
- [44] L. Nirenberg and F. Trèves. On local solvability of linear partial differential equations. II. Sufficient conditions. *Comm. Pure Appl. Math.*, 23 :459–509, 1970.
- [45] L. Nirenberg and F. Trèves. A correction to : “On local solvability of linear partial differential equations. II. Sufficient conditions” (Comm. Pure Appl. Math. 23 (1970), 459–509). *Comm. Pure Appl. Math.*, 24(2) :279–288, 1971.
- [46] L. Nirenberg and F. Trèves. Solvability of a first order linear partial differential equation. *Comm. Pure Appl. Math.*, 16 :331–351, 1963.
- [47] S. Mizohata. Solutions nulles et solutions non analytiques. *J. Math. Kyoto Univ.*, 1 :271–302, 1961/1962.
- [48] R. D. Moyer. Local solvability in two dimensions : necessary conditions for the principal type case. Mimeographed manuscript, University of Kansas, 1978.
- [49] Lars Hörmander. Pseudodifferential operators of principal type. In *Singularities in boundary value problems (Proc. NATO Adv. Study Inst., Maratea, 1980)*, volume 65 of *NATO Adv. Study Inst. Ser. C : Math. Phys. Sci.*, pages 69–96. Reidel, Dordrecht, 1981.
- [50] R. Beals and C. Fefferman. On local solvability of linear partial differential equations. *Ann. of Math. (2)*, 97 :482–498, 1973.
- [51] Nicolas Lerner. Sufficiency of condition  $(\psi)$  for local solvability in two dimensions. *Ann. of Math. (2)*, 128(2) :243–258, 1988.
- [52] Lars Hörmander. On the solvability of pseudodifferential equations. In *Structure of solutions of differential equations (Katata/Kyoto, 1995)*, pages 183–213. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1996.
- [53] Nicolas Lerner. Nonsolvability in  $L^2$  for a first order operator satisfying condition  $(\psi)$ . *Ann. of Math. (2)*, 139(2) :363–393, 1994.
- [54] N. Dencker. The resolution of the Nirenberg-Treves conjecture. *Ann. of Math.*, 163 :2, 405–444, 2006.

Lars Hörmander 1931-2012

---

- [55] Lars Hörmander. Propagation of singularities and semiglobal existence theorems for (pseudo)differential operators of principal type. *Ann. of Math. (2)*, 108(3) :569–609, 1978.
- [56] R. Beals and C. Fefferman. Classes of spatially inhomogeneous pseudodifferential operators. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 70 :1500–1501, 1973.
- [57] R. Beals. A general calculus of pseudodifferential operators. *Duke Math. J.*, 42 :1–42, 1975.
- [58] André Unterberger. Oscillateur harmonique et opérateurs pseudo-différentiels. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 29(3) :xi, 201–221, 1979.
- [59] Lars Hörmander. The Weyl calculus of pseudodifferential operators. *Comm. Pure Appl. Math.*, 32(3) :360–444, 1979.
- [60] R. B. Melrose. Transformation of boundary problems. *Acta Math.*, 147(3-4) :149–236, 1981.
- [61] Louis Boutet de Monvel. Comportement d’un opérateur pseudo-différentiel sur une variété à bord. I. La propriété de transmission. *J. Analyse Math.*, 17 :241–253, 1966.
- [62] C. Fefferman and D. H. Phong. On positivity of pseudo-differential operators. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 75(10) :4673–4674, 1978.
- [63] M. F. Atiyah and I. M. Singer. The index of elliptic operators on compact manifolds. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 69 :422–433, 1963.
- [64] Lars Hörmander. *Linear partial differential operators*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 116. Academic Press Inc., Publishers, New York, 1963.
- [65] Louis Boutet de Monvel. Comportement d’un opérateur pseudo-différentiel sur une variété à bord. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 261 :4587–4589, 1965.
- [66] Gerd Grubb. Problèmes aux limites pseudo-différentiels dépendant d’un paramètre. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 292(12) :581–583, 1981.
- [67] J. J. Duistermaat and J. Sjöstrand. A global construction for pseudo-differential operators with non-involutive characteristics. *Invent. Math.*, 20 :209–225, 1973.
- [68] Anders Melin. Lower bounds for pseudo-differential operators. *Ark. Mat.*, 9 :117–140, 1971.
- [69] Louis Boutet de Monvel. Hypoelliptic operators with double characteristics and related pseudo-differential operators. *Comm. Pure Appl. Math.*, 27 :585–639, 1974.
- [70] Johannes Sjöstrand. Parametrix for pseudodifferential operators with multiple characteristics. *Ark. Mat.*, 12 :85–130, 1974.
- [71] Louis Boutet de Monvel, Alain Grigis, and Bernard Helffer. Parametrix d’opérateurs pseudo-différentiels à caractéristiques multiples. In *Journées : Équations aux Dérivées Partielles de Rennes (1975)*, pages 93–121. Astérisque, No. 34–35. Soc. Math. France, Paris, 1976.

- [72] V. Ja. Ivrii and V. M. Petkov. Necessary conditions for the correctness of the Cauchy problem for non-strictly hyperbolic equations. *Uspehi Mat. Nauk*, 29(5(179)) :3–70, 1974. Collection of articles dedicated to the memory of Ivan Georgievič Petrovskii (1901–1973), III.
- [73] R. B. Melrose. Microlocal parametrices for diffractive boundary value problems. *Duke Math. J.*, 42(4) :605–635, 1975.
- [74] Michael E. Taylor. Grazing rays and reflection of singularities of solutions to wave equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 29(1) :1–38, 1976.
- [75] Gregory Eskin. Parametrix and propagation of singularities for the interior mixed hyperbolic problem. *J. Analyse Math.*, 32 :17–62, 1977.
- [76] V. Ja. Ivrii. Wave fronts of solutions of boundary value problems for a class of symmetric hyperbolic systems. *Sibirsk. Mat. Zh.*, 21(4) :62–71, 236, 1980.
- [77] R. B. Melrose and J. Sjöstrand. Singularities of boundary value problems. I. *Comm. Pure Appl. Math.*, 31(5) :593–617, 1978.
- [78] R. B. Melrose and J. Sjöstrand. Singularities of boundary value problems. II. *Comm. Pure Appl. Math.*, 35(2) :129–168, 1982.
- [79] K. G. Andersson and R. B. Melrose. The propagation of singularities along gliding rays. *Invent. Math.*, 41(3) :197–232, 1977.
- [80] James V. Ralston. Solutions of the wave equation with localized energy. *Comm. Pure Appl. Math.*, 22 :807–823, 1969.
- [81] Johannes Sjöstrand. Propagation of analytic singularities for second order Dirichlet problems. *Comm. Partial Differential Equations*, 5(1) :41–93, 1980.
- [82] François Trèves. A new method of proof of the subelliptic estimates. *Comm. Pure Appl. Math.*, 24 :71–115, 1971.
- [83] Lars Hörmander. Looking forward from ICM 1962. In *Fields Medallists’ lectures*, volume 5 of *World Sci. Ser. 20th Century Math.*, pages 86–103. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1997.
- [84] Ju. V. Egorov. Subelliptic operators. *Uspehi Mat. Nauk*, 30(2(182)) :57–114, 1975.
- [85] Lars Hörmander. Subelliptic operators. In *Seminar on Singularities of Solutions of Linear Partial Differential Equations (Inst. Adv. Study, Princeton, N.J., 1977/78)*, volume 91 of *Ann. of Math. Stud.*, pages 127–208. Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1979.
- [86] Lars Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators. IV*, volume 275 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1985. Fourier integral operators.
- [87] J. Nourrigat. Subelliptic systems. *Comm. Partial Differential Equations*, 15(3) :341–405, 1990.
- [88] J. Nourrigat. Systèmes sous-elliptiques. II. *Invent. Math.*, 104(2) :377–400, 1991.
- [89] Bernard Helffer and Jean Nourrigat. *Hypoellipticité maximale pour des opérateurs polynômes de champs de vecteurs*, volume 58 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1985.

Lars Hörmander 1931-2012

---

- [90] Nicolas Lerner and Luc Robbiano. Unicité de Cauchy pour des opérateurs de type principal. *J. Analyse Math.*, 44 :32–66, 1984/85.
- [91] J. Chazarain. Formule de Poisson pour les variétés riemanniennes. *Invent. Math.*, 24 :65–82, 1974.
- [92] J. J. Duistermaat and V. W. Guillemin. The spectrum of positive elliptic operators and periodic geodesics. In *Differential geometry (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXVII, Part 2, Stanford Univ., Stanford, Calif., 1973)*, pages 205–209. Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1975.
- [93] V. Ja. Ivrii. The second term of the spectral asymptotics for a Laplace-Beltrami operator on manifolds with boundary. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 14(2) :25–34, 1980.
- [94] Victor Guillemin. The Radon transform on Zoll surfaces. *Advances in Math.*, 22(1) :85–119, 1976.
- [95] Victor Guillemin. Some classical theorems in spectral theory revisited. In *Seminar on Singularities of Solutions of Linear Partial Differential Equations (Inst. Adv. Study, Princeton, N.J., 1977/78)*, volume 91 of *Ann. of Math. Stud.*, pages 219–259. Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1979.
- [96] Victor Guillemin. Some spectral results for the Laplace operator with potential on the  $n$ -sphere. *Advances in Math.*, 27(3) :273–286, 1978.
- [97] Yves Colin de Verdière. Sur le spectre des opérateurs elliptiques à bicaractéristiques toutes périodiques. *Comment. Math. Helv.*, 54(3) :508–522, 1979.
- [98] Alan Weinstein. Asymptotics of eigenvalue clusters for the Laplacian plus a potential. *Duke Math. J.*, 44(4) :883–892, 1977.
- [99] S. Agmon. Some new results in spectral and scattering theory of differential operators on  $\mathbf{R}^n$ . In *Séminaire Goulaouic-Schwartz (1978/1979)*, pages Exp. No. 2, 11. École Polytech., Palaiseau, 1979.
- [100] Lars Hörmander. *Lectures on nonlinear hyperbolic differential equations*, volume 26 of *Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications]*. Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [101] François Murat. Compacité par compensation. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, 5(3) :489–507, 1978.
- [102] L. Tartar. Compensated compactness and applications to partial differential equations. In *Nonlinear analysis and mechanics : Heriot-Watt Symposium, Vol. IV*, volume 39 of *Res. Notes in Math.*, pages 136–212. Pitman, Boston, Mass., 1979.
- [103] S. Klainerman. The null condition and global existence to nonlinear wave equations. In *Nonlinear systems of partial differential equations in applied mathematics, Part 1 (Santa Fe, N.M., 1984)*, volume 23 of *Lectures in Appl. Math.*, pages 293–326. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986.
- [104] Gérard Bourdaud. Une algèbre maximale d’opérateurs pseudo-différentiels. *Comm. Partial Differential Equations*, 13(9) :1059–1083, 1988.

- [105] Lars Hörmander. Pseudo-differential operators of type 1, 1. *Comm. Partial Differential Equations*, 13(9) :1085–1111, 1988.
- [106] Jean-Michel Bony. Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 14(2) :209–246, 1981.
- [107] Jean-Michel Bony. Analyse microlocale des équations aux dérivées partielles non linéaires. In *Microlocal analysis and applications (Montecatini Terme, 1989)*, volume 1495 of *Lecture Notes in Math.*, pages 1–45. Springer, Berlin, 1991.
- [108] Lars Hörmander. *Notions of convexity*, volume 127 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1994.
- [109] J.-M. Trépreau. Sur la résolubilité microlocale des opérateurs de type principal. In *Conference on Partial Differential Equations (Saint Jean de Monts, 1982)*, pages Conf. No. 22, 10. Soc. Math. France, Paris, 1982.

# SMAI Members: Join **siam**<sup>®</sup>

## at a 30% discount!

- *Acclaimed scientific journals and books*
- *Advocacy efforts to increase funding for research and education*
- *Outreach to students*

These are just a few of the ways in which SIAM supports the advancement of applied mathematics and computational science.

If you are a SMAI member living outside the United States, join SIAM as a reciprocal member and become part of our international and interdisciplinary community of more than 14,000 mathematicians, computer scientists, engineers, and physicists.

SIAM members are educators, practitioners, researchers, and students from more than 100 countries working in industry, laboratories, government, and academia.

As a member of SIAM, you will have opportunities to share research with fellow scientists from around the world and access to comprehensive, current information in your field.

**Go to [www.siam.org/joinsiam](http://www.siam.org/joinsiam) to join online as a reciprocal member and receive a 30% discount.**



**JOIN TODAY**  
[www.siam.org/joinsiam](http://www.siam.org/joinsiam)

Please use  
promo code  
**MBSM13**  
when you join.

### SOCIETY for INDUSTRIAL and APPLIED MATHEMATICS

3600 Market Street, 6th Floor, Philadelphia, PA 19104-2688 USA  
Phone: +1-215-382-9800 · Fax: +1-215-386-7999 · [membership@siam.org](mailto:membership@siam.org) · [www.siam.org](http://www.siam.org)

Art credit: A. L. Traud, E. D. Kelsic, P. J. Mucha, M. A. Porter, "Comparing Community Structure to Characteristics in Online Collegiate Social Networks," SIREV Vol.53, pp.526-543.

## Comptes rendus de manifestations

COMPTE RENDU DU 2<sup>e</sup> FORUM EMPLOI MATHS

[HTTP://SMAI.EMATH.FR/FORUM-EMPLOI/](http://smai.emath.fr/forum-emploi/)

EMAIL : [FORUM-EMPLOI-CONTACT@SMAI.EMATH.FR](mailto:FORUM-EMPLOI-CONTACT@SMAI.EMATH.FR)

par Stéphane Cordier, Edwige Godlewski, Marie Postel, et  
Adeline Samson

COMPTES RENDUS DE MANIFESTATIONS



### *Les Maths : une passion des métiers*

Le deuxième Forum Emploi Maths (FEM) s’est tenu le 11 janvier 2013, au Conservatoire National des Arts et Métiers (CNAM) à Paris. Il était organisé, comme le premier FEM, par la Société Française de Statistique (SFdS), la Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles (SMAI) et l’Agence Mathématiques en Interaction avec les Entreprises et la Société (AMIÉS).

Nous renvoyons le lecteur au Matapli no 97 (que l’on peut retrouver en ligne à l’adresse <http://smai.emath.fr/spip.php?article154>) qui présentait le premier FEM (sa genèse, son organisation) et nous allons insister dans cet article sur les principaux points marquants de la manifestation de janvier 2013, placée sous le slogan : "Les mathématiques, une passion, des métiers".

Tout d’abord, le lieu était beaucoup plus vaste que celui du FEM 2012 et ainsi mieux adapté à la dimension nationale voulue pour cet évènement. Le FEM disposait en effet non seulement de la très grande "salle des textiles" mais aussi de

## Comptes rendus de manifestation

---

la "salle de conférence du musée" du CNAM et de trois amphithéâtres (dont l'un, l'amphithéâtre Painlevé, de près de 500 places). Ces lieux ont permis d'accueillir les 60 stands mais aussi de nombreuses sessions d'informations et de discussions dont le programme détaillé est sur le site du FEM (<http://smai.emath.fr/forum-emploi/>). Malgré l'espace, les stands étaient parfois tellement pris d'assaut qu'il était difficile de circuler.

Cette difficulté venait du fait que les participants ont été beaucoup plus nombreux qu'en 2012! Plus de 1400 personnes se sont pré-inscrites et nous avons comptabilisé un peu plus de 1250 présents soit 30% d'augmentation par rapport à la première édition. Comme l'an dernier, les inscriptions de la dernière semaine ont été très nombreuses (environ 500 dans les 7 derniers jours). L'augmentation est répartie sur les différents groupes de participants : étudiants, entreprises, laboratoires et formations. En effet, les (futurs) jeunes diplômés de toute la France ainsi que les employeurs potentiels (proposant CDI, CDD, thèses, post-docs, ou stages) sont venus plus nombreux. Nous avons compté environ cent employeurs (une grosse moitié d'entreprises et organismes, surtout d'Île de France et des laboratoires de tout le territoire national) présents ou représentés (certaines start-up étant regroupées sur un stand commun, comme par exemple celui de "France Digitale"), la liste des entreprises est détaillée ci dessous (voir la Table 1).

Certains avaient craint une légère baisse du nombre de participants, qui s'observe souvent en pareil cas, une fois passé l'effet de curiosité ou de surprise. Cette hausse dans la participation, avec un taux de renouvellement des participants très important (seuls 11% des étudiants avaient participé au premier FEM<sup>1</sup>), est la preuve manifeste que cet évènement répond à un besoin réel : d'une part les entreprises peinent parfois à trouver des candidats dans certains secteurs/métiers pour lesquels les diplômés de formations de mathématique sont parfaitement qualifiés, et d'autre part les jeunes diplômés apprécient de s'adresser à des entreprises qui n'ont pas peur de CV affichant un diplôme en mathématiques.

Ce Forum, qui leur est destiné, leur montre la grande variété des secteurs économiques qui sont intéressés par leur formation (il y avait des représentants des secteurs transport, énergie, télécommunication, industrie pharmaceutique, banque, mais aussi de l'économie numérique, des sociétés de service, développement logiciel etc). Même pour ceux qui ne trouvent pas ce jour là le stage ou le contrat espéré, car l'offre de chaque entreprise ne correspond le plus souvent qu'à de très petites quantités, le FEM leur apprend explicitement que de réelles opportunités existent. En effet, la somme des possibilités qu'offrent la diversité des secteurs et la variété des employeurs potentiels (grands groupes, PME, TPE, sociétés de service) est immense, et c'est ce message que le FEM fait passer. À condition de

---

<sup>1</sup>pourcentage établi à partir des réponses au questionnaire

## Comptes rendus de manifestations

---

s’ouvrir, de manifester un certain dynamisme, ils vont trouver assez rapidement un stage ou un emploi intéressant et leur formation leur permettra ultérieurement soit de rester dans un domaine d’expertise scientifique, soit d’évoluer vers la conduite de projets ou d’autres postes.

Les innovations de cette deuxième édition étaient nombreuses. Citons par exemple

- Un exposé "grand public" : Emmanuel Trélat (lauréat du prix Félix Klein 2012) et Erwan Le Pennec (témoignant de son expérience de création de start-up et de recherche académique de pointe) ont brillamment montré le rôle déterminant de la recherche mathématique pour l’innovation, "de la puce à l’espace" ;
- Des témoignages en amphi organisés par secteur (énergie, environnement, santé, marketing, banque/finance/assurance) ont montré la diversité des métiers dans des domaines variés. Les étudiants de L3 ou de M1 ont été sensibles à ces présentations qui leur permettaient de se rendre compte des débouchés possibles avec un master de mathématiques. Les témoignages sur les thèses CIFRE sont venus appuyer ce message.
- Une ouverture vers l’international, notamment par une présentation en amphi, mais aussi avec la présence de représentants italiens et espagnols, venus pour apporter des informations sur les réseaux "math-industrie" récemment créés (mais aussi peut-être pour s’inspirer de cette initiative originale !);
- L’annonce par l’Opération Postes d’une initiative concernant l’emploi des docteurs en mathématiques qui était attendue depuis longtemps et qu’elle vient de mettre en place : un site dédié aux offres de post-doc<sup>2</sup> ;
- La présence sur les stands d’un certain nombre de Labex liés aux mathématiques ;
- Le soutien de la Mairie de Paris ;
- Un reportage vidéo sur le forum, réalisé par Christine Benoit, qui est désormais en ligne sur le site du FEM.

L’organisation de cet évènement a mobilisé de nombreux collègues (de la SFdS, de la SMAI et d’AMIES). La coordination était assurée par Stéphane Cordier, Anne Gégout-Petit et Edwige Godlewski. La "Cellule Entreprise" était orchestrée par Marie Postel avec Nicolas Bousquet et Christophe Chalons, et l’aide d’Anne Philippe, les aspects "logistique" par Françoise Bouillet et Pierre Barbillon, les interventions en amphi par Adeline Samson et le site internet a été géré par Sylvain Coulon et Sylvain Faure. Enfin Yohan Penel a réalisé le livre d’accueil distribué à tous les participants, et le logo, les affiches et le flyer sont dus à Mélanie Toto, graphiste à Bordeaux. Une bonne quinzaine de collègues ont été mobilisés pen-

---

<sup>2</sup><http://postes.smai.emath.fr/postdoc/>

## Comptes rendus de manifestation

---

dant plusieurs semaines pour assurer le succès de l’opération (contacts et nombreuses relances auprès des entreprises, des responsables de formations et de laboratoires, organisation pratique, . . .). Le jour J, l’équipe d’organisation comptait une soixantaine de personnes dont une quinzaine d’étudiants-pilotes qui étaient chargés de s’occuper, chacun, d’un petit groupe de stands pour veiller à ce que tout se passe bien. Le coût de l’opération a été sensiblement identique à celui de l’an dernier (environ 15 Keuros) mais les frais d’inscription demandés aux entreprises (500 euros, 250 pour les PME), ainsi que le soutien financier promis par la Mairie de Paris, ont permis de couvrir une partie des frais. L’ensemble de la gestion financière a été assurée par AMIES ; sur le plan humain les laboratoires LJLL de l’UPMC et MAPMO d’Orléans ont cette année encore été fortement mobilisés.

Des améliorations sont encore possibles. Dans les réponses aux questionnaires en ligne (cf ci-dessous), après la trop forte densité observée dans la Salle des textiles, la date de l’évènement est le deuxième point critique mentionné. Cependant, les différentes propositions sont souvent contradictoires et aucune période ne fait l’unanimité (ni même le jour de la semaine, entre milieu de semaine et bordure de week-end). Pour les entreprises, la date est parfois jugée un peu tardive pour proposer des stages, et trop précoce pour les fiches de poste, le compromis n’est peut-être pas parfait mais permet d’associer de façon crédible les deux offres, stages et emplois. Pour certains (étudiants/responsables de formation), cela tombait en période d’examen (pourtant la date du FEM avait été communiquée très tôt, en juillet 2012, aux responsables de formation). Néanmoins, 80% des participants ont trouvé que la date avait été bien choisie.

La communication accessible sur le site internet et l’information le jour même du FEM sur les différents lieux où se passaient les évènements (amphis et stands) peuvent encore être améliorées, ce bien que le comité d’organisation y ait déjà consacré une énergie certaine et que l’augmentation du degré de professionnalisme de l’équipe se soit concrétisée par kakémonos, brassards, nombreux fléchages (sans compter les autres innovations comme une publicité dans *Pour la science*, l’impression d’un flyer, l’utilisation des réseaux linkedin et viadeo, etc).

Enfin, un souhait d’une meilleure représentativité des régions au niveau des entreprises est exprimé. Si les organismes et certains grands groupes affichent une réelle présence sur tout le territoire français, la plupart des PME/TPE provenaient de la région parisienne. Mais l’objectif de rendre compte des possibilités variées d’emplois en mathématiques grâce à l’échantillon d’entreprises présentes est atteint et ce constat motive et aide les étudiants dans leurs démarches ultérieures.

## Résultats de l'enquête faite auprès des participants

Une enquête a été réalisée après le FEM auprès de l'ensemble des participants via un questionnaire en ligne. Nous avons obtenu 140 réponses pour le questionnaire "Visiteurs et entreprises" pour 370 inscrits (38%) et 341 réponses pour 982 inscrits pour le questionnaire "Etudiants et jeunes diplômés" (35%).

Parmi les visiteurs, 31% d'entre eux représentaient des entreprises, 19% des formations et 28% des laboratoires. Les thématiques mathématiques représentées étaient variées : 35% de statistique, 28% de méthodes numériques, 25% d'informatique, 25% d'optimisation/contrôle, 22% de probabilité/risque/fiabilité. Tous (98%) ont apprécié le dialogue avec l'ensemble de la communauté mathématique et ont été satisfaits de l'accueil qui leur a été réservé. Concernant les offres d'emploi ou de stages, 88% des visiteurs jugent le FEM utile pour recruter : 43% proposaient des offres d'emploi, et 62% estiment avoir recueilli des CV intéressants. Les pourcentages sont identiques concernant les stages mais seuls 20% des visiteurs proposaient des offres de thèses et 10% estiment avoir recueilli des CV intéressants. Une majorité des exposants (81%) ont été satisfaits ou très satisfaits du positionnement de leur stand, les autres regrettant la séparation en deux salles et le manque d'espace.

Parmi les étudiants, 17% étaient en M1, 10% en école ingénieurs, 31% en M2, 11% déjà diplômé d'un M2, 20% doctorants, 6% de docteurs ; 36% de femmes. Ils ont eu connaissance du FEM via un de leurs enseignants (63%), via un camarade (16%) ou par le site internet (19%). Ces pourcentages montrent l'importance accordée par les étudiants aux conseils de leurs enseignants (surprise ?) ce qui devrait inciter les collègues à s'impliquer encore davantage dans la communication autour de ce genre d'évènement. Ils ont déclaré avoir participé au FEM pour obtenir une information (30%), pour chercher un emploi (23%), un stage (27%), une thèse (9%) ou un post doc (8%). Les étudiants qui ont assisté aux sessions en amphitheâtre y ont trouvé des informations intéressantes, qui leur ont permis de se rediriger vers les stands des professionnels des secteurs qu'on venait de leur présenter. Plus de la moitié d'entre eux (54%) ont laissé des CV sur des stands, en moyenne 5 CV par personne. Enfin, 18% d'entre eux ont décroché une proposition concrète (offre, rendez-vous, etc).

## Conclusions

Ce Forum est une occasion pour les participants de découvrir ou de se repérer dans la grande variété des formations en mathématiques, de mieux connaître les perspectives offertes par les cursus en mathématiques appliquées ou en statis-

## Comptes rendus de manifestation

---

tique et de prendre des contacts pour, les employeurs, repérer les candidats potentiels, et pour les jeunes, préparer leur future carrière. Une spécificité de ce forum est d’être à la fois ciblé sur les profils des candidats, issus des formations liées aux mathématiques, de niveau Master, écoles d’ingénieur ou doctorat et ouvert à toutes les formations au niveau national, ce qui permet aux employeurs de bien mieux cibler leurs propositions et d’améliorer sensiblement le taux de succès des prises de contacts.

Rappelons que le FEM apporte une réponse concrète aux trois premières recommandations du colloque "Mathématiques A Venir" de 2009 :

- Mieux faire connaître les mathématiques dans la société et leurs débouchés,
- Renforcer l’attractivité de l’école mathématique française,
- Développer les interactions entre les entreprises et les mathématiciens.

Il ressort des retours nombreux et enthousiastes que cette opération a provoqués deux années de suite, et provenant de l’ensemble de la communauté potentiellement intéressée (employeurs, laboratoires, formations, étudiants), que le FEM a prouvé son intérêt voire sa nécessité. Comme l’an dernier, ce fût pour toute l’équipe d’organisation une expérience très enrichissante mais exigeante et pas de tout repos ! Les discussions sont en cours pour trouver le moyen de pérenniser l’évènement tout en renouvelant l’équipe.



FIG. 1: Les stands de la salle des textiles (crédit Gael Octavia)

Comptes rendus de manifestations

Adoc Talent Management	Danone Research	INRIA
AFIJ	Distene	IT-Green Group
A.I.D.	DxO Labs	Keyrus Biopharma
Arkema	EDF R&D	Laboratoires Servier
ANDès	Elée	LNE
ANRT	Ernst & Young	Michelin
APEC	Eurodecision	MisslerSoftware/TopSolid
Artelys	Evollis	Noeo / Bluestone
Boehringer Ingelheim	Evolution Energie	Onera
BRGM	France Digitale	Orange
C-S	GDF Suez	Princeps
CATALINA Marketing	Global Market Solutions	SAS
CEA DAM	IFP Energies Nouvelles	Snecma / Safran
CEA Saclay	IFSTTAR	Smart Flows
CNRS INSMI	INCKA	Teratec
Criteo	INRA	Tinyclues

TAB. 1: Liste des entreprises, associations et organismes présents sur un stand à l'occasion du 2e FEM. Environ la moitié (en italiques) étaient déjà présents lors du 1er FEM en 2012

**COMPTE RENDU DE LA TABLE RONDE MASTERS  
DES MATHS AUX MÉTIER**

*par* Edwige Godlewski

Le sous titre de cette table ronde indiquait "Améliorer l'attractivité des formations professionnelles en mathématiques au niveau master." Six responsables de formations avaient été invités pour intervenir à cette table ronde qui a eu lieu au cours du Forum Emploi Maths, à 11h, dans l'un des amphithéâtres, et a rassemblé une assistance assez conséquente, constituée principalement d'enseignants chercheurs, dont certains responsables de formations qui avaient également été sollicités, mais aussi de quelques représentants de l'entreprise et d'étudiants. L'objectif de cette table ronde était de dégager les principaux éléments qui peuvent rendre nos formations affichant des débouchés dans l'entreprise au niveau master (plus) attractives vis à vis des étudiants et lisibles pour les entreprises. Les intervenants devaient présenter les lignes directrices des actions qu'ils ont en-

## Comptes rendus de manifestation

---

gagées ou mises en place pour améliorer la lisibilité et l’attractivité d’une ou des formations en mathématiques ou statistique de leur université. L’idée étant non seulement de dégager les ingrédients de base qui garantissent le caractère professionnalisant d’une formation de maths (thèmes abordés, travail en projet, stage, etc) mais aussi de proposer des initiatives ou des principes plus novateurs déjà expérimentés, et pouvant être reproduits (ou traduits) dans d’autres formations de master.

La durée totale de la table ronde, prévue pour une heure, a été largement dépassée, bien que les six intervenants aient essentiellement respecté le temps de parole qui leur était attribué pour leur première intervention qui ne devait pas dépasser quatre minutes, pour laisser le temps d’un véritable échange avec les autres intervenants et les participants présents dans la salle. La diversité des présentations et des échanges a permis, comme l’espéraient les organisateurs de la table ronde, de faire mieux connaître les pratiques efficaces pour aider d’autres collègues à mettre en place des formations attractives, et de proposer des pistes pour mieux communiquer sur les qualités de ces formations.

Les participants invités pour échanger lors de la table ronde avaient été choisis pour illustrer des situations effectivement variées (régions, tailles des établissements, thématiques enseignées, ancienneté des formations, etc. ). Certains masters offrent des parcours assez spécialisés, qui ont des débouchés professionnels immédiats (tels que l’actuariat), d’autres, des parcours plus généraux en ingénierie mathématique, voire des formations pluridisciplinaires, assurant une double compétence au jeune diplômé (par exemple calcul scientifique et statistique).

Paul Armand (Limoges) a présenté les spécialités de Master ACSYON Algorithmique, Calcul Symbolique et Optimisation Numérique et CRYPTIS Sécurité de l’information et cryptologie, qui cherchent à augmenter les flux en M2 par un M1 à distance ; Stéphane Descombes (Nice) met en place pour le master Ingénierie Mathématique (thématiques : statistique, finances et calcul scientifique) une formation en alternance avec le CFA régional ; Patrick Fischer (Bordeaux) entreprend pour le master MIMSE (Modélisation Ingénierie Mathématique, Statistique et Economique) une démarche de demande de label ECMI (European Consortium for Mathematics in Industry) ; Jean-Michel Loubès (Toulouse) innove pour le master IMAT Ingénierie Mathématique SID Statistique et Informatique Décisionnelle, en introduisant une formation de pointe “Big Data” ; Véronique Maume-Deschamps (ISFA Lyon) a mentionné divers partenariats pour le master SAFIR Sciences Actuarielle et Financière, Ingénierie des Risques, internationaux (délocalisation de la formation d’actuaire au Vietnam, double diplôme avec l’université Saint-Joseph de Beyrouth et avec l’université internationale de Rabat), et avec des écoles d’ingénieurs (ECL, Ecole de Mines de Saint-Etienne, ENSIMAG) ;

---

## Comptes rendus de manifestations

Anne Philippe (Nantes), représentant le parcours statistique du master Ingénierie Mathématique, a évoqué un certain nombre d’actions en amont, au niveau Licence et même vers les lycées.

Certaines actions mises en place dans les différents masters mentionnés visent à faciliter la communication vers l’extérieur (information des jeunes et/ou des entreprises). D’autres sont directement liées à l’organisation des formations, et introduisent des enseignements ou des modules donnant lieu à évaluation et ECTS, ce qui traduit qu’ils sont valorisés aussi par les départements de formation. Toutes les interventions montrent clairement que ces initiatives sont menées grâce au dynamisme des responsables, et aussi en concertation avec les représentants des entreprises qu’ils connaissent à travers les stages ou les embauches de leurs étudiants, à chaque formation est progressivement associé un véritable réseau, essentiellement régional. Dans les points évoqués on peut retenir :

- l’introduction dans les parcours de stages (de 2 mois) dès le M1, voire 2 semaines de stage en L3, qui permettent de familiariser les étudiants avec les relations maths-entreprise et d’illustrer la place des mathématiques dans l’industrie ;
- la mise en place d’un conseil de perfectionnement avec des “industriels” ; ce type de structure permet de réagir plus rapidement aux besoins de formation exprimés par l’entreprise et permet d’avoir leur soutien pour l’introduction de nouveaux cours ;
- la préparation des stages de M2 avec l’encadrant en entreprise ;
- la réalisation d’une plaquette ;
- l’organisation de conférences sur les métiers des maths ;
- la présentation de ces “métiers des maths” lors des journées portes ouvertes, des journées d’orientation ;
- l’appel aux témoignages d’anciens diplômés ;
- l’organisation d’une journée annuelle commune doctorants-étudiants de master-élèves ingénieur, avec présentation orale ou poster, et remise de prix ;
- la collaboration avec les services centraux des établissements (bureau des relations industrielles, services d’insertion professionnelle, agence de valorisation, de la recherche).

Au cours de la table ronde, on a aussi rappelé l’existence de l’annuaire des Masters (<http://masters.emath.fr/>), mis en place avec CampusFrance grâce aux sociétés savantes (SFdS, SMAI, SMF), avec le soutien du CNRS et du Ministère. Mais communiquer sur cet annuaire suppose qu’il représente assez bien l’existant. Il faudrait que chaque responsable de formation s’inscrive pour faire figurer sa formation, accepte de renseigner les différentes rubriques et d’actualiser les informations. Cet outil pourrait alors être mieux utilisé car il pourrait ainsi servir

## Comptes rendus de manifestation

---

aux entreprises qui cherchent des compétences localement, ou des candidats formés sur des thématiques pointues, un besoin que certaines ont exprimé lors du Forum.

Un consensus s’est dégagé sur les critères qui permettent d’évaluer si une formation assure des débouchés dans l’entreprise au niveau master :

1. contenu des enseignements (disciplines abordées)
2. compétences en informatique et formation sur des logiciels de référence
3. stages en entreprise ou organisme de recherche
4. Anglais
5. intervention des professionnels dans la formation
6. le travail en binôme, en équipe sur des projets
7. la connaissance de l’entreprise (conférences métiers, ...)
8. entraînement à la communication orale, à la rédaction de rapport
9. présence des "industriels " dans le Conseil de Perfectionnement.

En indiquant cette liste de critères, il ne s’agit pas d’être normatif, et le point 1 s’appuie sur une liste large, on pourra à ce sujet consulter les sites du ESF Forward Look "Mathematics and Industry" : Model Master in industrial mathematics et le site ECMI : Model Master in Mathematics for Industry (Techno/Economathematics [http://www.ecmi-indmath.org/?page\\_id=147](http://www.ecmi-indmath.org/?page_id=147)). Il faut cependant insister sur la nécessaire prise de conscience par les responsables de formations que, si celles ci affichent des débouchés professionnels autres que la recherche ou l’enseignement, elles doivent aider l’étudiant à acquérir les compétences indispensables à l’entrée rapide dans l’entreprise, et à ce titre les points 2 et 3 sont absolument indispensables.

Dans les idées exprimées pour améliorer la lisibilité, la communication, et la mise en place d’une formation professionnalisante, on peut retenir

- la référence systématique à l’Annuaire des masters (mentionner l’adresse sur tous les sites des formations, toutes les plaquettes éditées)
- la mutualisation de cours (visio), de projets de nature industrielle
- la mise en commun des informations (sur les CFA, les réglementations, etc)
- un site national permettant la mise en commun (sujets de stages, informations diverses sur des cours en ligne, ...)
- la création d’un réseau de formations (de responsables intéressés)
- l’introduction de "semaines de modélisation".

Sur le dernier point, rappelons que ces semaines existent dans le réseau européen ECMI déjà mentionné (ECMI Summer school and modelling week), qui a reçu récemment un financement européen pour leur prochaine organisation.

---

Comptes rendus de manifestations

Grâce à AMIES, qui fait partie du réseau, trois étudiants français ont pu participer à la dernière ESGI à Dresde en août 2012. Leurs témoignages sont enthousiastes (voir <http://www.agence-maths-entreprises.fr/a/?q=fr/node/192>) et, par ailleurs, les rapports sont impressionnants (<http://www.math.tu-dresden.de/essim2012/reports>).

Après la création des SEME (Semaine d'Etude Maths Entreprises, voir <http://www.maths-entreprises.fr/>) au niveau doctorat, il faudrait commencer à introduire des activités similaires au niveau master.

En ce qui concerne l'idée de mutualisation ou de mise en commun, elle paraît souhaitable à un certain nombre de responsables, la communauté ne peut que gagner à redonner un élan aux formations disciplinaires en affichant clairement tous les débouchés. Elle permettrait d'assurer une offre plus cohérente même si toutes les compétences ne se trouvent pas nécessairement rassemblées dans tous les établissements, et, de plus, certains enseignements pointus pourraient trouver un public suffisant en élargissant la base à laquelle ils s'adressent.

Rajoutons quelques commentaires, pour développer des points intéressants qui n'ont été que brièvement évoqués.

La difficulté de trouver des stages en L3 et M1 a été mentionnée à plusieurs reprises, les entreprises étant unanimes dans leur préférence pour des stages de fin d'études et si possible de six mois. Une possibilité, expérimentée avec succès à Nantes pour le L3, est d'associer les laboratoires universitaires à cet effort de formation en y organisant des stages courts.

Lors de la discussion, un échange rapide a eu lieu concernant la variété possible de structures, entre les formations essentiellement à la carte et les parcours plus rigides : si les premières permettent de couvrir un large choix de spécialisation en faisant recours à des cours existants "ailleurs", dans d'autres spécialités ou mentions (ce qui évite d'ouvrir des cours à très petits effectifs), un tronc commun consistant encourage le sentiment de "promotion" et permet de mieux communiquer sur la formation. En effet, si les Grandes Ecoles d'ingénieur sont appréciées, c'est parce qu'elles garantissent la qualité d'un recrutement amont (via les concours) qui, statistiquement parlant, suffit au recruteur qui ne cherche pas un profil spécifique ; la réponse des formations universitaires est plus de garantir le contenu des formations et d'assurer que leurs diplômés ont assimilé des connaissances assurant un réel niveau dans la discipline, d'autant plus que la variété de provenance des étudiants implique que l'entrée est inégalement contrôlée. L'évaluation du niveau et la garantie que donne le diplôme suppose de pouvoir comparer un minimum de candidats, donc qu'ils aient un coeur de cursus scientifique commun (en plus du stage, de l'Anglais et de l'insertion professionnelle).

Un bref historique d'introduction a rappelé que le passage au système LMD a

## Comptes rendus de manifestation

---

fait disparaître le diplôme unique DEA (recherche)/DESS (professionnel) pour lesquels la cohabilitation entre établissements était assez facile et encouragée, au profit d'un diplôme de Master en deux ans, beaucoup plus lisible au niveau international, mais pour lequel les cohabilitations sont plus lourdes à mettre en oeuvre et surtout pour lequel la distinction "recherche / professionnel" s'est progressivement estompée, jusqu'à disparaître. Prise au sens littéral, cette distinction dans les appellations était critiquable, puisque la recherche, comme l'enseignement, sont des professions. Par ailleurs, l'appellation commune facilite les passerelles, de nombreux étudiants partis pour terminer au niveau M, se dirigent maintenant vers une thèse en mathématiques appliquées, souvent une thèse CIFRE (alors que dans certains établissements, l'inscription en thèse après un DESS était très difficile), et d'autres pensant continuer en thèse "académique" s'arrêtent au niveau M, ce qui signifie qu'ils intègrent à plus ou moins brève échéance le monde du travail. Mais concrètement, cela ne permet plus d'afficher de façon aussi lisible les débouchés dans l'entreprise.

Le terme *label* a été mentionné : il est un peu prématuré de penser à un label de type "master math-entreprise" (l'équivalent du "master math-industry" en Anglais). La première question est : quelle structure pérenne et reconnue pourrait attribuer un tel "label" ? Si cette question reçoit une réponse, ce serait de toutes façons sur la base du volontariat, la réflexion ne concerne que les formations intéressées à afficher de façon visible les débouchés dans l'entreprise, et il n'est pas question d'imposer quoi que ce soit. De plus, un tel label ne pourrait s'appliquer qu'au niveau d'une spécialité ou d'un parcours, et pas à toute une mention. L'annonce récente par le Ministère d'une réforme concernant le nombre des masters peut également apporter des modifications importantes qu'il faudrait connaître avant de préciser le projet de labellisation. Plutôt que de parler de label, il semble pertinent de mettre en évidence un certain nombre de critères, tels que ceux définis plus haut, permettant un référencement des formations lisible par les entreprises et les étudiants.

En tout cas, dans l'utilisation du terme "lisibilité" est contenue l'idée que l'étudiant doit choisir à un certain moment entre les débouchés en enseignement (secondaire), recherche théorique, et emploi dans l'entreprise (y compris les thèses Cifre) et que, même s'il y a des passerelles possibles, on ne doit pas lui faire croire que toute formation niveau M2 en mathématiques conduit de façon égale à une insertion rapide dans l'entreprise. Cette table ronde avait vocation à le rappeler en montrant des exemples de réussites, de formations affichant clairement leurs débouchés en entreprise et reposant sur des enseignements solides, pensés, et cohérents avec leur but.

CEMRACS 2012

par Violaine Louvet, Institut Camille Jordan & CNRS

La 17<sup>ème</sup> édition du CEMRACS<sup>1</sup> s’est tenue au CIRM du 16 juillet au 24 août 2012. Elle était organisée par le GDR Calcul (<http://calcul.math.cnrs.fr>) et avait pour thème « Méthodes numériques et algorithmes pour architectures hautes performances ».

De façon traditionnelle, ce CEMRACS était composé d’une école d’été d’une semaine, et d’une session de recherche de cinq semaines.

L’école d’été, suivie par 73 participants, a comporté différents cours dont l’objectif était de mettre en exergue les méthodes numériques les plus adaptées aux architectures de calcul actuelles et futures.

L’ensemble des supports de ces cours sont accessibles en ligne (<http://calcul.math.cnrs.fr/spip.php?article176>).

Concernant la session de recherche, 12 projets ont été proposés, portant sur différentes thématiques allant de la fusion en passant par les milieux poreux. 3 à 4 jeunes en moyenne ont travaillé sur chacun de ces projets, encadrés par plusieurs chercheurs seniors. Globalement, 76 personnes ont participé à la session de recherche. A noter qu’un des projets a été proposé par la société CISCO, et soutenu par l’AMIES<sup>2</sup>.

L’AMIES a également participé à l’organisation d’un workshop sur la problématique du HPC dans les entreprises qui s’est tenu lors de la dernière semaine du CEMRACS. Les présentations sont en ligne à l’adresse

<http://www.agence-maths-entreprises.fr/a/?q=fr/node/166>.

Dans sa globalité, 142 personnes sont venues participer au CEMRACS, sur une durée plus ou moins courte.

Ce CEMRACS a été financièrement soutenu par le GDR Calcul, la formation permanente du CNRS, le MESR, le labex MiLyon<sup>3</sup>. Concernant les projets, nous souhaitons également souligner le soutien, sous forme de bourses jeunes chercheurs, d’AMIES, de MaiMoSINE<sup>4</sup>, du GDR Maths Entreprises et de la FLMSN<sup>5</sup>.

Tous nos remerciements vont aussi au mésocentre Aix Marseille Université<sup>6</sup> qui nous a permis d’utiliser ses moyens de calcul tout au long de ces 6 semaines.

Enfin, le CEMRACS 2012, avec la collaboration efficace de la chargée de communication du CIRM, a fait l’objet de 2 articles dans les journaux (La Marseillaise et

<sup>1</sup><http://smai.emath.fr/cemracs/cemracs12/>

<sup>2</sup><http://www.agence-maths-entreprises.fr>

<sup>3</sup><http://milyon.universite-lyon.fr/>

<sup>4</sup><http://www.maimosine.fr/>

<sup>5</sup><http://www.flmsn.univ-lyon1.fr/>

<sup>6</sup><http://cbri1.up.univ-mrs.fr:16080/~mesocentre/>

## Comptes rendus de manifestation

---

la Provence) ainsi que d’un reportage au journal régional de France 3 (avec un court passage au niveau national).

**CEMRACS 2013** : « Modéliser et simuler la complexité : approches stochastiques et déterministes », du 22 juillet au 30 août 2013

<http://cermics.enpc.fr/~lelievre/CEMRACS/CEMRACS.html>

### COMPTE RENDU DU COLLOQUE ALEL2012

2-4 JUILLET 2012, LIMOGES

*par* Michel Théra

Le colloque international ALEL2012 s’est tenu à Limoges du 2 au 4 juillet 2012. Cette manifestation était la quatrième édition d’une réunion entre les universités d’Alicante, Miguel Hernandez de Elche et de Limoges dans le domaine de l’optimisation, thématique développée à l’université de Limoges depuis 1984.

Le colloque s’inscrit dans le cadre du réseau international de recherche “*Problèmes de rafle : Théorie et applications aux circuits électriques*” dont les universités partenaires sont localisées à Alicante, Elche, Ballarat, Prague et Limoges. D’autres chercheurs provenant de nombreuses universités espagnoles (Séville, Murcia, Cadix, Barcelone, Santander), et de l’Amérique latine (Santiago du Chili et Lima) ont également participé au colloque. Une session spéciale dédiée à Jean-Jacques Moreau et au cinquantième anniversaire de ses travaux portant sur l’analyse convexe et ses applications à la mécanique a été organisée. Une connexion par vidéo avec l’unité de recherche du professeur Heinz Bauschke de l’université de British Columbia Okanagan (UBCO) a permis d’élargir cet anniversaire à un groupe canadien très actif en analyse convexe et dans la théorie des opérateurs monotones.

Le colloque ALEL2012 a été réalisé avec le soutien du laboratoire XLIM, du département de Mathématiques et Informatique d’XLIM, du GDR MOA, des universités d’Alicante et Miguel Hernandez de Elche, du Conseil Régional du Limousin, de la Ville de Limoges, et a bénéficié du patronage de la Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles.

Le colloque avait pour but principal de renforcer la collaboration entre les chercheurs français et leurs partenaires espagnols dans le domaine de l’optimisation mathématique.

Le programme est disponible sur le site :

<http://www.unilim.fr/alel2012>

Comptes rendus de manifestations

La manifestation s’est terminée dans l’après-midi du 4 juillet par la remise du Doctorat Honoris Causa à Marco López Cerda, professeur à l’université de Alicante et spécialiste de l’optimisation semi-infinie et de la recherche opérationnelle.

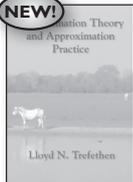


ALEL 2012

# New Titles in Applied Math. from **siam**®

[www.siam.org/catalog](http://www.siam.org/catalog)

**NEW!**



## Approximation Theory and Approximation Practice

Lloyd N. Trefethen

In a book that will appeal to beginners and experts alike, Nick Trefethen presents approximation theory using a fresh approach. This is a textbook on classical polynomial and rational approximation theory for the 21st century. It uses Matlab® to teach the field's most important ideas and results and differs fundamentally from other works on approximation theory in a number of ways: its emphasis is on topics close to numerical algorithms; concepts are illustrated with Chebfun; and each chapter is a PUBLISHable Matlab M-file, available online.

2012 • xiii + 305 pages • Softcover • 978-1-611972-39-9  
List \$49.00 • SIAM Member \$34.30 • OT128

## Semidefinite Optimization and Convex Algebraic Geometry

Edited by Grigoriy Blekherman, Pablo A. Parrilo, and Rekha R. Thomas

*MOS-SIAM Series on Optimization 13*

A self-contained, accessible introduction to the mathematical advances and challenges resulting from the use of semidefinite programming in polynomial optimization. Each chapter addresses a fundamental aspect of this quickly evolving research area. The book begins with an introduction to nonnegative polynomials and sums of squares and their connections to semidefinite programming and quickly advances to several areas at the forefront of current research.

2012 • xx + 475 pages • Softcover • 978-1-611972-28-3  
List \$129.00 • SIAM/MOS Member \$90.30 • MO13

## Mathematical Models for Communicable Diseases

Fred Brauer and Carlos Castillo-Chavez

*CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics 84*

This graduate-level monograph appeals to readers interested in the mathematical theory of disease transmission models. It is self contained and accessible to readers who are comfortable with calculus, elementary differential equations, and linear algebra. The book provides insight into modeling cross-immunity between different disease strains and the synergistic interactions between multiple diseases; diseases transmitted by viral agents, bacteria, and vectors; and both epidemic and endemic disease occurrences.

2012 • xviii + 270 pages • Softcover • 978-1-611972-41-2  
List \$77.00 • SIAM/CBMS Member \$53.90 • CB84

## Applications to Regular and Bang-Bang Control: Second-Order Necessary and Sufficient Optimality Conditions in Calculus of Variations and Optimal Control

Nikolai P. Osmolovskii and Helmut Maurer

*Advances in Design and Control 24*

This book is devoted to the theory and applications of second-order necessary and sufficient optimality conditions in the calculus of variations and optimal control. The authors develop theory for a control problem with ordinary differential equations subject to boundary conditions of equality and inequality type and for mixed state-control constraints of equality type. It is suitable for researchers in calculus of variations and optimal control and researchers and engineers in optimal control applications in mechanics; mechatronics; physics; chemical, electrical, and biological engineering; and economics.

2012 • viii + 376 pages • Softcover • 978-1-611972-35-1  
List \$109.00 • SIAM Member \$76.30 • DC24

## Algebraic and Geometric Ideas in the Theory of Discrete Optimization

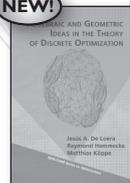
Jesús A. De Loera, Raymond Hemmecke, and Matthias Köppe

*MOS-SIAM Series on Optimization 14*

This book presents recent advances in the mathematical theory of discrete optimization, particularly those supported by methods from algebraic geometry, commutative algebra, convex and discrete geometry, generating functions, and other tools normally considered outside the standard curriculum in optimization. It offers several research technologies not yet well known among practitioners of discrete optimization, minimizes prerequisites for learning these methods, and provides a transition from linear discrete optimization to nonlinear discrete optimization.

2012 • xx + 322 pages • Softcover • 978-1-611972-43-6  
List \$109.00 • SIAM/MOS Member \$76.30 • MO14

**NEW!**



**siam** e-books

Now available at [play.google.com](http://play.google.com)

All prices are in US dollars.

### ORDER ONLINE: [www.siam.org/catalog](http://www.siam.org/catalog)

Or use your credit card (AMEX, MasterCard, and VISA): Phone +1-215-382-9800 worldwide · Fax +1-215-386-7999. Or send check or money order in US dollars to: SIAM, Dept. BKMA13, 3600 Market Street, 6th Floor, Philadelphia, PA 19104-2688 USA. Members and customers outside North America can also order SIAM books through Cambridge University Press at [www.cambridge.org/siam](http://www.cambridge.org/siam).

## Du côté des Ecoles d'Ingénieurs

par Gabriel Stoltz

LES MATHÉMATIQUES À L'ÉCOLE DES MINES DE NANCY

Par Xavier Antoine, Antoine Henrot, Céline Lacaux  
(École des Mines et Institut Élie Cartan, Nancy)

Gabriel Stoltz appelait, dans un récent numéro de Matapli, à présenter ce qui se passe dans nos écoles d'ingénieurs. Nous saisissons la balle au bond pour montrer ce qui se fait à l'École des Mines de Nancy en mathématiques car notre école a certaines spécificités qui nous paraissent intéressantes voire exemplaires à certains égards.

L'École des Mines de Nancy est une école interne à l'Université de Lorraine (et dépendant donc du Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche, contrairement à toutes les autres Écoles des Mines qui dépendent du Ministère de l'Industrie). Elle recrute ses élèves très majoritairement sur le concours commun Mines-Ponts. Il faut noter que l'équipe enseignante est entièrement composée de "vrais" mathématiciens (par ordre alphabétique : Xavier Antoine, Sandie Ferrigno, Antoine Henrot, Céline Lacaux, Rémi Peyre, Denis Villemonais) tous de la 26ème section et chercheurs très actifs à l'Institut Élie Cartan, le laboratoire de mathématiques de Lorraine. Quand, dans tant d'écoles d'ingénieurs, les mathématiques sont enseignées par des mécaniciens, chimistes, physiciens... il s'agit d'un point très positif que nous tenions à souligner d'autant que ce n'était pas le cas il y a à peine une quinzaine d'années. Remarquons que nous ne sommes pas assez nombreux pour faire tourner tous les enseignements dont il va être question ci-dessous et donc nous bénéficions de l'aide appréciable de nos collègues du Département de Mathématiques de la Faculté des sciences et des chercheurs Inria du laboratoire. Les cours communs avec le Master de Mathématiques (voir ci-dessous) permettent également d'alléger significativement notre charge.

Le contenu des enseignements de mathématiques est assez classique et similaire à ce qu'on peut trouver dans la plupart des grandes écoles généralistes avec un tronc commun où sont enseignés : les fonctions de la variable complexe, les distributions, la théorie de l'intégration, les probabilités, les statistiques, l'analyse numérique, la recherche opérationnelle et l'optimisation. A noter une particularité de notre école : la *pédagogie Schwartz* ! Ce Schwartz là n'est pas Laurent, mais son frère Bertrand qui fut un directeur de notre école très apprécié dans les années 60 et qui mit en place une pédagogie très innovante pour l'époque et qui reste d'actualité au moins en première année. Typiquement, un élève vient en amphitheâtre ayant lu le chapitre du polycopié correspondant au cours du jour. Le professeur, lui, ne fait pas un cours traditionnel : il consacre une grande partie de la séance

## Du côté des Ecoles d’Ingénieurs

---

en amphi aux questions suscitées par la lecture du polycopié, illustre le cours par des exemples ou applications et explique plus en détails les notions délicates. A l’issue de cette heure en amphi, les élèves se retrouvent pour 2h de travaux dirigés (16 élèves maximum) et sont invités à travailler ensemble en petits groupes sous la responsabilité d’un assistant.

Outre ces cours de tronc commun, nous organisons une filière spécifique d’Ingénierie Mathématique qui commence dès la deuxième année. Elle recrute une quinzaine d’élèves plus spécialement attirés par les mathématiques. L’effectif étant volontairement limité, il existe une certaine pression pour intégrer notre filière. Comme partout, nos élèves sont majoritairement attirés par la finance ou l’assurance. Quelques uns se dirigent toutefois vers le calcul scientifique. Enfin, un à trois élèves par an poursuivent par une thèse en mathématiques appliquées et embrassent une carrière d’enseignant-chercheur ou de chercheur (CNRS, Inria, CEA). Citons par exemple dans les dernières promotions Frédérique Charles, Florent Chazel, Laurene Jouve, Gilles Kluth, Sébastien Meunier, Gael Poette, Yannick Privat, Christophe Profeta, Nicolas Rougerie...

Afin que nos élèves choisissent leur voie en toute connaissance de cause, notre deuxième année n’est pas encore spécialisée. Ainsi, elle comporte en cours obligatoires des enseignements en probabilités avancées, équations aux dérivées partielles (un cours théorique et un cours numérique), statistique (régression, séries chronologiques avec une pratique de SAS) et méthodes de Monte-Carlo. Nous organisons aussi des séances de cours assurés par des professionnels. Enfin, notons également l’organisation de *semaines de département* durant lesquelles nos élèves découvrent, notamment grâce à des visites dans des entreprises (banques, sociétés de service, aéronautique...), les possibles métiers des ingénieurs mathématiciens.

Ce n’est qu’en troisième année que nos élèves se spécialisent en probabilités et/ou statistique (le plus souvent pour travailler dans la finance) ou encore en calcul scientifique. Nos élèves étant bien sûr attirés par un séjour à l’étranger ou encore les masters parisiens, un certain nombre d’entre eux effectuent leur dernière année dans une formation extérieure (à Columbia, l’ETH, KTH, Paris 6, Paris Descartes...). Maintenant, notre formation est suffisamment attrayante pour garder un effectif plus que correct sur Nancy. Nous pensons que cela est en partie dû à une spécificité de notre école : notre troisième année est organisée conjointement avec le M2 du Master de Mathématiques "Ingénierie Mathématique et Outils Informatiques" de l’Université de Lorraine. Plus de 80% des cours étant communs, nos élèves s’inscrivent au master et sortent donc de l’école avec un double diplôme (Ingénieur Civil des Mines & Master de Mathématiques de l’Université de Lorraine). A notre avis, ce type de double diplôme devrait être la règle dans la plupart de nos écoles d’ingénieurs car tout le monde a à y gagner. Nous tenons aussi à souligner que les stages de fin d’études donnent quasi-systématiquement lieu à une visite dans l’entreprise. Cela demande certes des moyens financiers et humains mais permet de bien voir comment cela se passe dans l’entreprise et d’entretenir un réseau de contacts.

## 2013, mathématiques de la planète Terre

par M. Andler<sup>1</sup>, L. Bel<sup>2</sup>, S. Benzoni<sup>3</sup>, T. Goudon<sup>4</sup>, C. Imbert<sup>5</sup>, A. Rousseau<sup>6</sup>

Plus de 100 sociétés savantes, universités et autres instituts de recherche à travers le monde ont décidé de rassembler leurs forces pour faire de l'année 2013 celle des "mathématiques de la planète Terre". Fort du soutien de l'union mathématique internationale (UMI), l'événement est également parrainé par l'UNESCO. L'idée forte qui guidera celles et ceux impliqué-e-s dans la mise en œuvre de ce projet est, qu'à travers ce prisme, on peut parler de mathématiques très diverses et très pointues, anciennes ou "aux frontières" de la science actuelle, académique ou non. Ainsi les thématiques retenues sont :

- Une planète à découvrir : océans, météorologie, climat, systèmes solaires, ressources naturelles etc.
- Une planète habitée : écologie, biodiversité, évolution etc.
- Une planète organisée par les humains : politique, économie, systèmes sociaux et financiers, transports, réseaux de communication etc.
- Une planète en danger : changement climatique, développement durable, épidémie, désastres naturels etc.<sup>7</sup>

Cette action d'envergure mondiale n'est pas sans rappeler l'année mondiale des mathématiques en l'an 2000 qui avait été largement investie par notre communauté. Il se fait vite jour que "2013, mathématiques de la planète Terre" est une nouvelle formidable opportunité pour nous tous de faire connaître la diversité de nos réalisations et de donner une image moderne, dynamique et ouverte sur le monde de notre activité. Nous aurons cette année une vitrine extraordinaire pour montrer le rôle des mathématiques dans la vie quotidienne, la variété des métiers qui utilisent ou ont besoin des mathématiques, la richesse des liens entre les mathématiques et les autres disciplines scientifiques.

Cet article présente quelques-unes des réalisations spécifiques qui marqueront l'année en France, notamment celles qui impliquent la communauté académique. En particulier, les instituts de recherche (Insmi-CNRS, Inria), les sociétés savantes

<sup>1</sup>Université de Versailles-St Quentin, Laboratoire de Mathématiques, bâtiment Fermat, 45 avenue des États-Unis, 78035 Versailles cedex

<sup>2</sup>AgroParisTech, MMIP Department, 16 rue Claude Bernard, F 75 231 Paris Cedex 05

<sup>3</sup>Université de Lyon, Université Lyon 1, CNRS, UMR 5208, Institut Camille Jordan, Bâtiment Braconnier, 43 boulevard du 11 novembre 1918, 69622 Villeurbanne Cedex

<sup>4</sup>Equipe COFFEE, Inria Sophia Antipolis Méditerranée & Labo. J. A. Dieudonné UMR 7351, CNRS- Univ. Nice Sophia Antipolis Parc Valrose 06108 Nice cedex 02, France

<sup>5</sup>CNRS, Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquées, UMR 8050, Université Paris-Est Créteil, 61, avenue du Général de Gaulle 94010 Créteil, France

<sup>6</sup>Equipe MOISE, Inria, UMR MISTEA, 2 place Viala, 34060 Montpellier, France

<sup>7</sup>Les contours de cette année-événement sont décrits plus en détails sur le site [www.mpt2013.org](http://www.mpt2013.org).

## 2013, mathématiques de la planète Terre

---

(SMF, SMAI, SFDS), ainsi que le consortium Cap’Math se sont mobilisés pour coordonner et partager certaines de ces actions. Cet engagement des instituts et des sociétés savantes témoigne de l’importance de l’enjeu. On notera que certaines de ces actions sont clairement à destination du “grand public”, d’un public scolaire, d’autres plus orientées sur nos activités de recherche. Néanmoins toutes ces activités devront être appelées à se nourrir et se renforcer mutuellement, afin de faire de cette initiative un plein succès.

L’UNESCO ouvrira cette opération par une manifestation officielle le 5 Mars 2013. Cette date marquera aussi le départ d’une exposition itinérante dont l’animation sera assurée par Mireille Chaleyat-Maurel de l’université Paris 5.<sup>8</sup>

# 1 Initiatives en direction des écoliers, collégiens, lycéens, professeurs ou grand public

## 1.1 La Semaine des mathématiques

Lancée en 2011-2012, *la semaine des mathématiques* est un événement porté par le Ministère de l’Education Nationale. L’objectif est de donner l’opportunité aux élèves de tous les niveaux de réfléchir aux implications et au rôle des mathématiques sur un thème donné. Cette réflexion, qui peut se mener sur plusieurs semaines, donne lieu à des opérations de restitution auxquelles sont conviés parents, public, enseignants-chercheurs... Un tel événement doit contribuer à conforter une image actuelle, vivante et attractive des mathématiques. Cette seconde édition aura lieu du 18 au 22 mars 2013, et le thème retenu s’accorde bien sûr avec “2013, mathématiques de la planète Terre”. Un guide pédagogique édité par le Ministère précise les grandes lignes de ce projet et le site EDUSCOL

([www.eduscol.education.fr](http://www.eduscol.education.fr)) relaie les faits les plus marquants et donne de nombreuses pistes d’activités sur une page dédiée. Les rectorats ont pour mission de mettre en place des comités de pilotage chargés à la fois d’impulser la dynamique nécessaire et d’assurer suivi et visibilité à l’opération. Un effort tout particulier doit porter sur les années de transition (CM2/6ème et lycée/supérieur). Les chercheurs et enseignants-chercheurs seront sollicités ; ils peuvent aussi prendre l’initiative dans leurs propres réseaux, pour participer à cet événement majeur à destination des plus jeunes.

## 1.2 Salon de la culture et des jeux mathématiques

Ce salon, dont se tiendra en 2013 la 14ème édition sur le campus de l’UPMC du 30 mai au 2 juin 2013, aura lui aussi pour thème les “mathématiques de la planète

---

<sup>8</sup>Exposition autour des 12 thèmes suivants : Anamorphoses de la Terre ; Toutes les cartes sont fausses ! Les côtes fractales ; Montée des eaux et fonte des glaciers ; Percolation ; Dur ou mou, le cœur de la Terre ? Hauteur du Soleil suivant les saisons ; Où suis-je ? (GPS) ; Stéréographie ; Prévoir la météo à 15 jours ? Cyclones, dans quel(s) sens tournent-ils ? Coriolis, Solitons et tsunamis.

Terre". Voir <http://www.cijm.org/>

### 1.3 Journées nationales 2013 de l'APMEP

Les journées nationales de l'APMEP auront lieu en 2013 à Marseille ; elles seront également centrées sur le thème "mathématiques de la planète Terre".

## 2 Atelier de réflexion prospective

L'Agence Nationale de la Recherche a lancé un appel à proposition pour un *atelier de réflexion prospective* (ARP) sur la thématique "Mathématiques et complexité du système Terre". L'Insmi a demandé à Didier Bresch (CNRS Chambéry) de coordonner le dépôt d'un projet d'envergure nationale, reprenant les thèmes de l'appel à projets :

- *Terre Fluide* avec Marie-Hélène Tusseau-Vuillemin, directrice scientifique de l'Ifremer ;
- *Terre Vivante* avec Michel Loreau, directeur du CBTM Moulis et Nadia Maizi, directrice du CMA ;
- *Terre Humaine* avec François Houllier, directeur de l'Inra et Jean-Pierre Nadal Directeur adjoint du CAMS.

Ce projet, appelé *MathsInTerre* (pour Mathématiques en Interaction pour la Terre) vient d'être retenu par l'ANR et sera soutenu à hauteur de 170 000 Euros. Cet atelier va chercher à promouvoir les interactions entre mathématiciens et scientifiques d'autres disciplines et fera des propositions de pistes d'action pour la programmation de l'ANR. En particulier le projet ambitionne d'identifier les nouveaux outils mathématiques qui devront être développés pour aborder des problèmes environnementaux. L'atelier sera ponctué de séances de remue-méninges, à l'IHP et en régions, pouvant faire appel à des experts internationaux, afin de dessiner l'état de l'art et d'identifier les perspectives les plus prometteuses. L'ARP dispose d'un site dédié <http://mathsinterre.fr> où sont présentées ses activités. Toute contribution en lien avec les thèmes de l'ARP sera bienvenue et est à faire parvenir à [didier.bresch@univ-savoie.fr](mailto:didier.bresch@univ-savoie.fr).

Mentionnons aussi ici la création du nouveau *groupement de recherche* (GdR) porté par Stéphane Cordier et intitulé "Écoulements Gravitaires et Risques Naturels" (EGRIN)<sup>9</sup>. Ce GdR vise non seulement à promouvoir les interactions avec les géosciences, mais aussi à développer la modélisation, l'analyse mathématique et des méthodes numériques innovantes pour décrire des écoulements complexes. C'est le cas notamment des écoulements liés à des rhéologies non standards, ou encore lorsque le fluide interagit avec les sols ou les structures (érosion, glissement de terrain, avalanches, etc).

<sup>9</sup>voir le site <http://gdr-egrin.math.cnrs>

### 3 Congrès et conférences

Les sociétés savantes tentent de recenser les conférences spécifiques en lien avec les thématiques de "2013, Mathématiques de la planète Terre"<sup>10</sup> et les centres d'accueil de manifestations scientifiques ont orienté leur programmation vers ces sujets. Ainsi, le CIRM ouvrira l'année 2013 avec le colloque "*Chocs dispersifs : mascaret, vagues scélérates, superfluides*" organisé du 7 au 13 janvier par Pascal Noble<sup>11</sup>; ou encore le CEMRACS 2013, porté par Nicolas Champagnat<sup>12</sup>, Tony Lelièvre<sup>13</sup> et Anthony Nouy<sup>14</sup>, aura pour thème "*Modéliser et simuler la complexité : approches stochastiques et déterministes*"; enfin, à l'institut H. Poincaré et au CIRM, Michel De Lara<sup>15</sup> et Luc Doyen<sup>16</sup> animent un semestre "*Mathematics of Bio-Economics*"<sup>17</sup> suivi du colloque "*Contrôle stochastique pour la gestion des énergies renouvelables*" au CIRM, organisé par Pierre Carpentier<sup>18</sup>, Jean-Philippe Chancelier<sup>19</sup>, Michel De Lara.

Il y a fort à parier que ces conférences seront accompagnées d'événements grand public comme des conférences spécifiques, des demi-journées portes ouvertes, ou encore des interviews à la presse afin de diffuser au mieux les connaissances de la recherche actuelle sur ces thèmes spécifiques.

### 4 Un jour, une brève

Enfin Cap'Maths/Animath, le CNRS, Inria, la SMF, la SMAI et la SFDS unissent leurs efforts pour une opération d'envergure à destination d'un très large public et notamment des plus jeunes. L'objectif un peu fou est de publier une "brève" par jour (hors week-end) présentant une activité mathématique en lien avec la planète Terre.

Il s'agit de courts textes (moins d'une page), mais où la gageure consiste à donner une idée de l'apport des mathématiques sur ces sujets. Par exemple, une première phrase plante le décor dans un langage accessible à un collégien. Puis la difficulté scientifique est exposée, sans technique ni jargon. Enfin, la brève met en lumière l'apport spécifique des mathématiques dans la résolution du problème. Ces textes peuvent être complétés par une ou deux références, un lien Internet, un contact. Mais une brève peut être aussi un portrait, ou encore l'histoire de la résolution d'un problème scientifique comme l'explication des marées.

---

<sup>10</sup>voir par exemple <http://smai.emath.fr/spip.php?article399&lang=fr>

<sup>11</sup>université Claud Bernard Lyon 1

<sup>12</sup>Inria Nancy

<sup>13</sup>Université Paris-Est, Ecole des ponts Paritech

<sup>14</sup>Ecole Centrale Nantes

<sup>15</sup>Ecole des ponts Paritech

<sup>16</sup>CNRS CERSP

<sup>17</sup><http://cermics.enpc.fr/~delara/MABIES/MABIES/>

<sup>18</sup>Ensta ParisTech

<sup>19</sup>Ecole des ponts Paritech

---

2013, mathématiques de la planète Terre

La rédaction de ces brèves sera issue d'un processus de validation scientifique impliquant les auteurs et un comité éditorial *ad hoc*. Elle s'appuiera également sur le concours technique de la société MyScienceWork, start-up spécialisée dans la médiation scientifique, et qui assurera mise en forme, publication et diffusion de ces textes. Le comité de direction de cette opération est constitué de Martin Andler (Univ. Versailles Saint Quentin, représentant Cap'Math), Liliane Bel (AgroParis-Tech, représentant la SFDS), Sylvie Benzoni (Univ. Lyon 1, représentant le CNRS), Thierry Goudon (Inria Sophia, représentant la SMAI), Cyril Imbert (CNRS Créteil, représentant la SMF) et Antoine Rousseau (Inria Grenoble & Montpellier, représentant Inria).

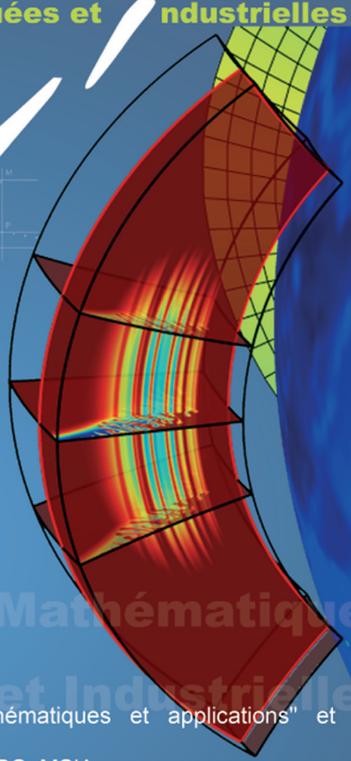
Ces brèves seront publiées sur le site dédié [www.mpt2013.fr](http://www.mpt2013.fr) sous la forme d'un blog permettant le dépôt de commentaires, le suivi de discussions, *etc*, et relayé sur les réseaux sociaux. Ces textes seront annoncés sur les sites des partenaires et également repris sur [mpe2013.org](http://mpe2013.org).

Nous cherchons donc activement des contributeurs ! Si vous avez une idée, contactez-nous dès aujourd'hui !

Bien d'autres initiatives ne manqueront pas de se concrétiser à des échelons locaux ou au niveau national. Le succès de "2013, mathématiques de la planète Terre" et le bénéfice pour l'image des mathématiques que nous pouvons en tirer, dépendent de l'implication de tous.

**Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles**

# SMAI

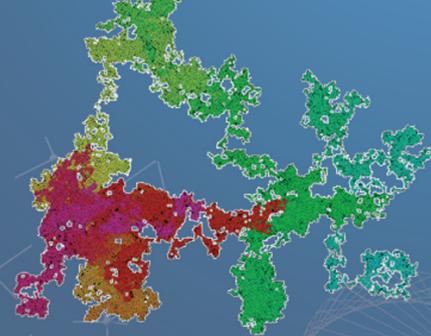


**Nos objectifs :**

- promouvoir la recherche en mathématiques appliquées
- contribuer à la réflexion sur l'enseignement des mathématiques à tous les niveaux
- améliorer les interfaces entre la recherche, l'université et l'entreprise
- intensifier les symbioses entre diverses branches des mathématiques appliquées et les interactions avec d'autres disciplines scientifiques ou technologiques

**Nos activités principales :**

- édition scientifique : collection de livres "Mathématiques et applications" et "Mathématiques appliquées pour le Master/SMAI"; revues ESAIM : COCV, P&S, Proc. et M2AN; RAIRO:RO; MSIA
- organisation de congrès et de journées industrielles
- en liaison avec le monde industriel, l'école d'été du CEMRACS
- bulletin de liaison Matapli pour nos adhérents
- participation à des actions vers la communauté mathématique et vers le grand public
- actions communes avec des sociétés étrangères de mathématiques appliquées



<http://smai.emath.fr>

SMAI Institut Henri Poincaré  
11 rue Pierre et Marie Curie  
75231 Paris cedex 05  
Tel : 01 44 27 66 61

## Le stockage géologique des déchets radioactifs

par Alexandre Ern<sup>1</sup>

### Résumé

Le stockage en couche géologique profonde est actuellement étudié dans divers pays comme mode de gestion durable pour les déchets radioactifs à vie longue de haute ou de moyenne activité. Les questions scientifiques posées par la réalisation d'un tel stockage sont très nombreuses et couvrent un vaste champ disciplinaire. L'objectif est ici de présenter quelques éléments de contexte, puis de fournir un aperçu succinct et non exhaustif de quelques travaux en mathématiques appliquées sur le sujet.

## 1 Éléments de contexte

La radioactivité résulte de l'émission de plusieurs types de rayonnements par des atomes de noyau instable, les radionucléides (RN). Elle se mesure en Becquerels (nombre de désintégrations par seconde, en abrégé Bq). La radioactivité diminue spontanément avec le temps. Elle est divisée par deux au bout d'une durée (appelée demi-vie) qui est extrêmement variable en fonction du RN (elle va d'une douzaine d'années pour le tritium, à des milliers d'années pour le carbone 14 et à des millions d'années pour l'iode 129).

Les usages de la radioactivité dans divers secteurs d'activité (filiale électronucléaire et industrie, défense, médecine, recherche) conduisent à la production de déchets radioactifs. Il s'agit de substances radioactives pour lesquelles aucune utilisation ultérieure n'est prévue ou envisagée (dans le cas contraire, on parle plutôt de matières radioactives). En France, la production annuelle de déchets radioactifs (rapportée au nombre d'habitants) est de 2 kg [1]. L'inventaire national des déchets radioactifs a recensé à fin 2010 un volume total (en équivalent conditionné) de 1,3 millions de m<sup>3</sup> (de l'ordre de la moitié du volume du Stade de France). Parmi ces déchets, ceux à haute activité ( $\sim 10^9$  Bq/g) proviennent essentiellement de la filière électronucléaire ; ils représentent 0.2% du volume et 96% de l'activité. Indépendamment des orientations futures de cette filière se pose donc la question de la gestion durable de ces déchets. La Loi de programme du 28 juin 2006 décline trois axes complémentaires pour les études et recherches en vue de la gestion durable des déchets radioactifs à vie longue de haute ou de moyenne ( $\sim 10^6$  Bq/g) activité : la séparation et la transmutation, le stockage en couche

<sup>1</sup>Université Paris-Est, CERMICS, École des Ponts ParisTech, 77455 Marne la Vallée cedex 2, France (ern@cermics.enpc.fr)

## Le stockage géologique des déchets radioactifs

---

géologique profonde et l’entreposage (afin notamment de répondre aux besoins en termes de capacité et de durée d’entreposage).

En Europe, les pays les plus avancés dans la voie du stockage géologique profond des déchets radioactifs sont la Finlande, la France et la Suède. En France, le projet CIGEO (Centre industriel de stockage géologique) porté par l’Agence nationale pour la gestion des déchets radioactifs (ANDRA) est entré en phase de conception industrielle. Localisé entre les départements de la Meuse et de la Haute Marne à l’est du bassin parisien, CIGEO devrait pouvoir accueillir 10 000 m<sup>3</sup> de déchets de haute activité et 70 000 m<sup>3</sup> de déchets de moyenne activité (dont, respectivement, 30% et 60% sont déjà produits). La roche hôte est une argilite du Callovo-Oxfordien formée il y a 165 millions d’années et située à 500 mètres de profondeur. Le stockage profond des déchets radioactifs fera l’objet d’un débat public en 2013. Une demande d’autorisation de création du stockage (DAC) devrait être déposée en 2014 pour une mise en service prévisionnelle à l’horizon 2025. Pour plus d’informations, on pourra consulter le site de l’ANDRA ([www.andra.fr](http://www.andra.fr)) et celui de l’Institut de radioprotection et de sûreté nucléaire ([www.irsn.fr](http://www.irsn.fr)).

Plusieurs horizons temporels apparaissent dans la conception d’un stockage profond. La centaine d’années correspond à la période d’exploitation et de réversibilité (possibilité de retirer sous certaines conditions les colis). La dizaine de milliers d’années correspond d’une part au retour à l’équilibre de la roche hôte, suite aux perturbations thermiques, hydriques, mécaniques et chimiques (THMC) induites par les opérations de creusement et la présence des colis et, d’autre part, à la dégradation des barrières de confinement d’origine humaine (*e.g.*, conteneurs en béton ou en acier, scellements, barrières ouvragées). Enfin, le million d’années correspond à la demi-vie de certains RN qui, une fois relâchés dans la roche hôte, migreraient lentement par des mécanismes essentiellement diffusifs à travers la géosphère vers les exutoires. Ainsi, la roche hôte constitue la barrière ultime de confinement des déchets indépendamment de toute intervention humaine, et ses propriétés favorables (circulation d’eau très lente, rétention des RN, environnement géologique stable, etc.) sont essentielles en vue de la faisabilité d’un stockage profond.

Les études et recherches sur le stockage géologique profond couvrent un vaste champ disciplinaire, de la sociologie jusqu’aux mathématiques appliquées en passant entre autres par la géologie, la chimie et la mécanique. Les travaux en mathématiques appliquées, notamment par le biais du Groupement national de recherches MoMaS ([www.gdrmomass.org](http://www.gdrmomass.org)) initié par A. Bourgeat, ont contribué, dans une démarche inter-disciplinaire, au développement de nouveaux modèles multi-échelles, à la conception et à l’analyse de schémas numériques performants pour les couplages multi-physiques et multi-domaines, à la quantification des erreurs numériques et des incertitudes paramétriques, et à la réalisation d’exercices d’inter-comparaison de codes par le biais de benchmarks.

Les sections suivantes présentent quelques exemples de résultats : des nouveaux schémas pour discrétiser les problèmes de diffusion hétérogène et anisotrope sur des maillages généraux, les estimations d’erreur *a posteriori* et leur application

à la certification de l’erreur de discrétisation et à l’arrêt des solveurs itératifs, la modélisation des argiles aux très petites échelles et la propagation d’incertitudes paramétriques. D’autres sujets, comme les écoulements multiphasiques ou les solveurs pour le transport réactif, ne seront pas abordés ici ; on en trouvera un premier aperçu sur le site du Groupement MoMaS.

## 2 Schémas numériques innovants

Il peut paraître surprenant, au premier regard, de consacrer encore des efforts de recherche à la résolution numérique du problème elliptique

$$-\nabla \cdot (S \nabla p) = f \quad \text{dans } \Omega, \quad (1)$$

assorti de conditions aux limites usuelles. Et pourtant, un benchmark international a été récemment consacré au sujet [15]. Le problème (1) intervient dans de nombreuses applications ; dans un modèle d’écoulement souterrain régi par la loi de Darcy, l’inconnue  $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  représente la charge hydraulique. Un tel modèle est une des briques élémentaires de modèles plus complexes pour les écoulements multiphasiques en milieux poreux. Plus généralement,  $p$  représente un potentiel (d’où la notation) et (1) est un problème de diffusion. De plus,  $\Omega$  est un ouvert polyédrique de  $\mathbb{R}^3$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  un terme source et  $S : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{3,3}$  un tenseur de diffusion à valeurs symétriques, uniformément positives et bornées.

Où sont les difficultés ? La première se trouve dans le caractère hétérogène et anisotrope de la donnée  $S$ . Cette difficulté se pose particulièrement dans le contexte de la modélisation des écoulements souterrains où les variations de  $S$ , souvent très contrastées, sont dues à la présence de couches géologiques plus ou moins perméables, tandis que le caractère anisotrope de  $S$  provient par exemple de la stratification du sol qui favorise certaines directions d’écoulement. La deuxième difficulté réside dans l’utilisation de maillages dont les mailles (ou cellules) peuvent être des polyèdres assez généraux de  $\mathbb{R}^3$  (plutôt que des tétraèdres ou des parallélépipèdes). De plus, le contact entre deux mailles voisines ne se fait pas forcément en partageant une face commune. De tels maillages sont souvent conçus afin de suivre les interfaces (ou les failles) entre couches géologiques ; leur construction pouvant s’avérer onéreuse, ces maillages sont souvent fournis comme des données d’entrée au numéricien.

Plusieurs avancées ont été accomplies ces dernières années en vue de la discrétisation des problèmes de diffusion hétérogène et anisotrope sur des maillages généraux, notamment en utilisant des méthodes de Galerkin discontinu [9], des méthodes de volumes finis (VF) [14] et des schémas mimétiques [7]. Des liens entre les méthodes de VF hybrides, de VF mixtes et les schémas mimétiques ont été mis en évidence suite à la réalisation de benchmarks [10] (montrant au passage comment de tels exercices d’inter-comparaison de codes stimulent la compréhension amont des différents schémas). Très récemment [4], une classe relativement large de schémas a été identifiée et analysée, basée sur la notion

## Le stockage géologique des déchets radioactifs

d’opérateurs discrets compatibles (CDO, de l’anglais *Compatible Discrete Operators*). L’approche CDO fournit à la fois un paradigme pour développer de nouveaux schémas et une vision unifiée de plusieurs schémas existants (des VF aux éléments finis (EF)). Cette approche s’appuie notamment sur les travaux pionniers de Tonti [21] et de Bossavit [5, 6], et a connu un regain d’intérêt considérable, sous diverses déclinaisons et pour plusieurs applications, depuis une décennie.

Dans le cas du problème de diffusion (1), on introduit le gradient  $g := \nabla p$  et le flux  $\phi := -Sg$ . On dispose d’un premier maillage, dit primal, qui porte les conditions aux limites et les propriétés du milieu (ce qui signifie que le tenseur  $S$  est régulier, par exemple constant, sur chaque cellule du maillage primal). La première idée clé est de positionner les degrés de liberté des champs  $p$ ,  $g$ ,  $\phi$  et  $f$  sur des objets géométriques résultant de la nature physique de ces champs : un potentiel se mesure en des points, un gradient le long d’une ligne, un flux à travers une surface et un terme source dans un volume. L’équation (1) peut se reformuler en utilisant le langage des formes différentielles, cette ré-écriture rendant explicite la différence de nature entre les champs  $p$ ,  $g$ ,  $\phi$  et  $f$ . La deuxième idée clé est d’introduire un deuxième maillage, dit dual, dont la fonction essentielle est de mettre en correspondance univoque les sommets, arêtes, faces et cellules du maillage primal avec, respectivement, les cellules, faces, arêtes et sommets du maillage dual, tout en réalisant un transfert d’orientation. Ainsi, une arête du maillage primal est associée à une unique face du maillage dual dont l’orientation externe (dans quel sens la traverser) est induite par l’orientation interne de l’arête (dans quel sens la parcourir). Un exemple de maillages primal et dual est présenté à la figure 1.

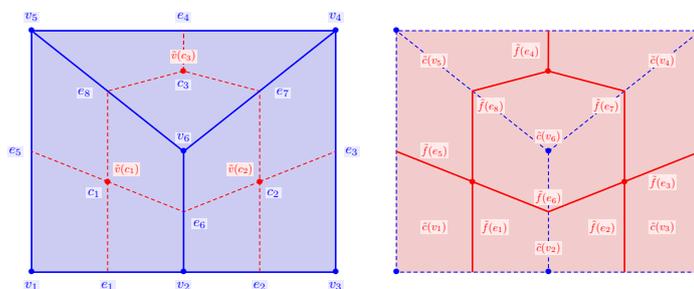


FIG. 1: Exemple de maillages primal (à gauche) et dual (à droite)

Une fois ce cadre mis en place, il reste à choisir le positionnement des degrés de liberté pour le potentiel : soit sur les sommets du maillage primal (schémas orientés sommet, dont des exemples sont les EF classiques ou les schémas mimétiques nodaux) soit sur les sommets du maillage dual (schémas orientés cellule, dont des exemples sont les EF mixtes et les VF). Dans les schémas orientés sommet (le traitement des schémas orientés cellule est analogue, voir [4]), les relations topologiques  $g = \nabla p$  et  $\nabla \cdot \phi = f$  sont discrétisées de manière exacte à l’aide d’un gradient discret, défini sur le maillage primal et noté GRAD, et d’une divergence

discrète, définie sur le maillage dual et notée  $\widetilde{\text{DIV}}$ ; ces deux opérateurs discrets vérifient une propriété (essentielle) d’adjonction. Enfin, la relation constitutive  $\phi = -Sg$  est discrétisée de manière approchée à l’aide d’un opérateur de Hodge discret, noté  $H_S$ , dont la réalisation algébrique est une matrice symétrique définie positive. Les propriétés que doit satisfaire l’opérateur de Hodge discret sont précisées dans [4]. On aboutit ainsi au diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 p & \xrightarrow{\nabla} & g & \xrightarrow{-S} & \phi & \xrightarrow{\nabla \cdot} & f \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 p^d & \xrightarrow{\text{GRAD}} & g^d & \xrightarrow{-H_S} & \phi^d & \xrightarrow{\widetilde{\text{DIV}}} & f^d
 \end{array} \tag{2}$$

La ligne horizontale supérieure représente le problème de diffusion exact (1), celle inférieure le schéma (qui, écrit sous la forme  $-\widetilde{\text{DIV}}(H_S \text{GRAD}(p^d)) = f^d$ , conduit à une matrice symétrique définie positive) et les lignes verticales aux opérateurs de réduction (ou de de Rham) définissant les degrés de liberté. Les sous-diagrammes de gauche et de droite dans (2) sont commutatifs, le sous-diagramme du milieu ne l’est pas, et c’est cette non-commutation qui est, seule, à l’origine de l’erreur de discrétisation. On renvoie à [4] pour l’analyse détaillée.

### 3 Estimations d’erreur *a posteriori*

Si le premier objectif de la simulation numérique est de produire une solution approchée, le deuxième, tout aussi important, est de fournir une borne calculable sur l’erreur d’approximation. L’analyse d’erreur *a priori* fournit une estimation qui n’est pas calculable car elle dépend de la solution exacte qui est inconnue. L’analyse d’erreur *a priori* permet donc de montrer la convergence de la méthode d’approximation, mais elle ne répond pas au deuxième objectif. En revanche, l’analyse d’erreur *a posteriori* permet d’y répondre.

Dans le cas de problèmes elliptiques, comme le problème modèle (1) posé sur un ouvert polyédrique  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^d$  avec un terme source  $f \in L^2(\Omega)$  (l’espace de Lebesgue des fonctions de carré sommable sur  $\Omega$ ), l’approche classique, initiée dans les années 70 autour des travaux de Babuška [3] et qui a atteint sa maturité (voir, par exemple, l’ouvrage de Verfürth [23]), permet de contrôler la norme d’énergie de l’erreur en fonction de résidus locaux de la solution approchée. On note  $p$  la solution exacte de (1) et  $p_{\mathcal{T}}$  la solution approchée obtenue par la méthode classique des EF sur un maillage de simplexes  $\mathcal{T}$  de  $\Omega$  satisfaisant les propriétés de régularité usuelles. La norme d’énergie de l’erreur est donnée par  $\|S^{1/2} \nabla(p - p_{\mathcal{T}})\|_{L^2(\Omega)^d}$ . On note  $\phi := -S \nabla p$  le flux exact et  $\phi_{\mathcal{T}} := -S \nabla p_{\mathcal{T}}$  le flux approché. En général, la composante normale de  $\phi_{\mathcal{T}}$  est discontinue à travers les interfaces du maillage. En notant  $\mathcal{F}^{\text{int}}$  l’ensemble de ces interfaces, on désigne, pour tout  $F \in \mathcal{F}^{\text{int}}$ , par  $[\phi_{\mathcal{T}} \cdot n_F]$  le saut de cette composante normale à travers  $F$ ,  $n_F$  étant la normale unitaire à  $F$  (d’orientation arbitraire mais fixée). Le fait que

## Le stockage géologique des déchets radioactifs

$[\phi_{\mathcal{T}} \cdot n_F] \neq 0$  implique que  $\phi_{\mathcal{T}} \notin H(\operatorname{div}; \Omega) := \{\psi \in L^2(\Omega)^d; \nabla \cdot \psi \in L^2(\Omega)\}$ , alors que  $\phi \in H(\operatorname{div}; \Omega)$ . En revanche, on peut considérer la divergence brisée de  $\phi_{\mathcal{T}}$  sur  $\mathcal{T}$ , notée  $\nabla_{\mathcal{T}} \cdot \phi_{\mathcal{T}}$  et définie en prenant la divergence maille par maille. L’estimation d’erreur *a posteriori* fournit classiquement une borne supérieure pour l’erreur en norme d’énergie, cette borne s’évaluant à partir des résidus locaux  $h_F^{1/2} \|[\phi_{\mathcal{T}} \cdot n_F]\|_{L^2(F)}$  et  $h_T \|f - \nabla_{\mathcal{T}} \cdot \phi_{\mathcal{T}}\|_{L^2(T)}$ , où  $h_F$  et  $h_T$  désignent, respectivement, le diamètre de  $F$  et de  $T$ . Une difficulté avec l’approche classique est qu’elle fait intervenir des constantes génériques dont la valeur n’est pas explicitement connue (voir [22] pour des résultats récents).

Une approche alternative pour l’estimation d’erreur *a posteriori* est basée sur la notion de flux équilibrés. Cette approche, étudiée depuis des décennies (voir, *e.g.*, [20] et [18]), a fait récemment l’objet de nombreux développements. Le principe est de reconstruire, à partir de la solution discrète, un nouveau flux approché  $\hat{\phi}_{\mathcal{T}}$  tel que

$$\hat{\phi}_{\mathcal{T}} \in H(\operatorname{div}; \Omega), \quad \nabla \cdot \hat{\phi}_{\mathcal{T}} = f_{\mathcal{T}}, \quad (3)$$

où  $f_{\mathcal{T}}$  est une approximation du terme source (par exemple, la moyenne de  $f$  sur chaque maille). L’estimation d’erreur *a posteriori* se formule à l’aide du flux équilibré  $\hat{\phi}_{\mathcal{T}}$  sous la forme

$$\|S^{1/2} \nabla(p - p_{\mathcal{T}})\|_{L^2(\Omega)^d} \leq \|S^{-1/2}(\hat{\phi}_{\mathcal{T}} + S \nabla p_{\mathcal{T}})\|_{L^2(\Omega)^d} + \operatorname{osc}_{\mathcal{T}}(f), \quad (4)$$

avec  $\operatorname{osc}_{\mathcal{T}}(f) := \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}} C_{P,T}^2 h_T^2 \lambda_{S,T}^{-1} \|f - f_T\|_{L^2(T)}^2 \right\}^{1/2}$ . Il s’agit d’un terme d’oscillation des données, qui est en général d’ordre supérieur; ici,  $\lambda_{S,T}$  est la plus petite valeur propre de  $S$  sur  $T$  tandis que la constante  $C_{P,T}$  (résultant d’une inégalité de Poincaré(-Wirtinger) locale sur chaque maille) vaut  $\frac{1}{\pi}$  si  $T$  est convexe (et peut être estimée dans le cas contraire). L’approche par flux équilibrés présente deux avantages. D’une part, elle permet de certifier l’erreur grâce à l’estimation (4) qui est entièrement calculable. D’autre part, elle permet un traitement unifié d’une large classe de schémas de discrétisation (EF classiques, Galerkin discontinu, EF mixtes et VF), exploitant dans chaque cas les propriétés (plus ou moins explicites) de conservativité du schéma afin de reconstruire le flux équilibré  $\hat{\phi}_{\mathcal{T}}$ . Divers exemples sont présentés dans [12].

L’estimation d’erreur *a posteriori* est également utile afin d’optimiser les calculs. Une application bien connue est l’utilisation des estimateurs afin d’adapter le maillage. Une autre application, relativement moins connue mais tout aussi intéressante, est l’utilisation de ces estimateurs comme critères d’arrêt adaptatifs pour les solveurs itératifs. Dans le cas d’un problème de diffusion non-linéaire par exemple, la discrétisation conduit à un système d’équations algébriques non-linéaires dont la résolution se fait par un solveur itératif non-linéaire (*e.g.*, la méthode de Newton) mettant en œuvre à chaque pas un solveur itératif linéaire. Ceci conduit à distinguer trois composantes pour l’erreur : celle de discrétisation, celle de linéarisation (attachée au solveur non-linéaire) et celle algébrique (attachée au solveur linéaire). Il est possible d’estimer séparément les trois composantes de

Le stockage géologique des déchets radioactifs

l’erreur, ce qui permet de dériver des critères d’arrêt adaptatifs pour les deux solveurs itératifs. Ainsi, le solveur linéaire est arrêté dès que l’erreur algébrique est dominée par les erreurs de linéarisation et de discrétisation, tandis que le solveur non-linéaire est arrêté dès que l’erreur de linéarisation est dominée par l’erreur de discrétisation. L’utilisation de ces critères d’arrêt adaptatifs peut conduire à des réductions substantielles des coûts computationnels, comme illustré à la figure 2 pour un problème de diffusion non-linéaire (de type  $p$ -Laplacien). La méthode de Newton exacte consiste à résoudre de manière précise les systèmes linéaires et non-linéaires, indépendamment de l’erreur de discrétisation. La méthode de Newton inexacte (utilisée depuis des décennies par les ingénieurs) arrête le solveur linéaire après un nombre fixé d’itérations ; elle permet un gain d’un facteur 6 sur le nombre total d’itérations effectuées par le solveur linéaire. Enfin, la méthode de Newton inexacte adaptative utilise les critères ci-dessus et permet un gain ultérieur d’un facteur 5. On renvoie à [13] pour une description détaillée et une analyse de la méthode.

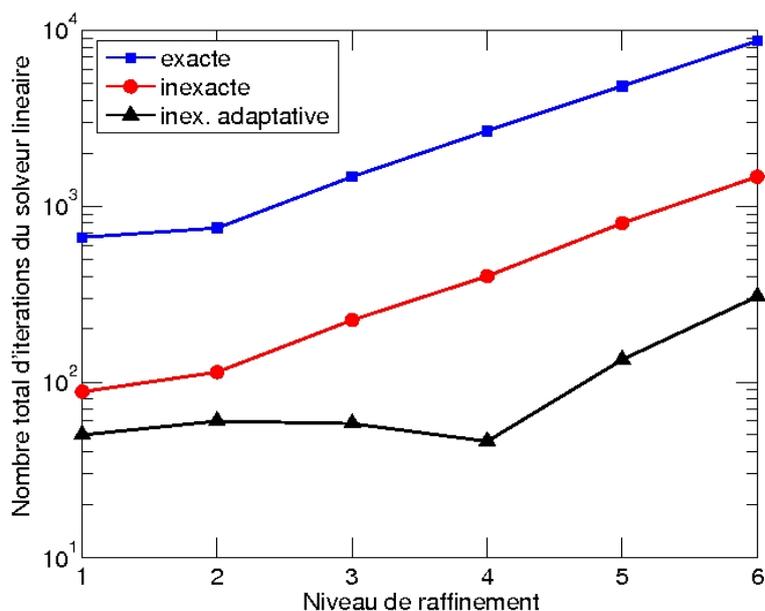


FIG. 2: Nombre d’itérations du solveur linéaire (gradient conjugué) sur 6 maillages pour les méthodes de Newton exacte, inexacte et inexacte adaptative

## 4 Modélisation aux très petites échelles

La roche hôte en vue du stockage géologique profond des déchets radioactifs, l’argilite du Callovo-Oxfordien, est un matériau multi-échelles. Certaines de ses propriétés importantes peuvent être caractérisées expérimentalement à l’échelle décimétrique de l’échantillon. Toutefois, la compréhension fine du comportement de la roche en présence de perturbations THMC induites par le stockage en champ proche et son évolution à long terme nécessitent de descendre à des échelles inférieures. À l’échelle micrométrique, l’argilite apparaît comme un milieu poreux complexe composé d’une phase argileuse, de pores et de solides minéraux (quartz et calcite principalement). La matrice argileuse est constituée d’agrégats de particules d’argile résultant de l’empilement de feuillets portant une charge de surface négative. À l’échelle nanométrique, la porosité inter-particulaire est occupée par des molécules d’eau et des ions.

On considère une situation idéalisée où un réseau périodique d’objets solides portant une charge de surface négative interagit avec une solution ionique. Cette solution est constituée d’eau solvatant des cations et des anions de concentrations notées  $\rho := (\rho_+, \rho_-)$ . On s’intéresse, en l’absence de forçages extérieurs, aux propriétés d’équilibre du système. On se place sur une cellule élémentaire du réseau périodique, où la solution ionique occupe le volume  $\Omega$ . Dans le cadre de la théorie de la fonctionnelle de la densité, cet équilibre est déterminé par la minimisation d’une énergie libre fonction de  $\rho$ , sous des contraintes canoniques fixant la température  $T$  ainsi que les valeurs moyennes de  $(\rho_+, \rho_-)$  tout en assurant l’électroneutralité globale du système. L’énergie libre  $\mathcal{F}$  se décompose sous la forme

$$\mathcal{F}(\rho) = \mathcal{F}_{\text{bulk}}(\rho) + \mathcal{F}_{\text{ext}}(\rho), \quad (5)$$

où  $\mathcal{F}_{\text{bulk}}$  représente l’énergie libre de la solution dans le *bulk* (en l’absence d’objet solide) et  $\mathcal{F}_{\text{ext}}$  celle due à la présence de l’objet solide. Le terme  $\mathcal{F}_{\text{bulk}}(\rho)$  s’évalue sous la forme

$$\mathcal{F}_{\text{bulk}}(\rho) = \int_{\Omega} f_{\text{bulk}}(\rho) d\Omega, \quad (6)$$

où  $f_{\text{bulk}}$  est la densité d’énergie libre dans le *bulk*, tandis que le terme  $\mathcal{F}_{\text{ext}}(\rho)$  s’évalue à partir du potentiel électrostatique qui est solution d’une équation de Poisson dans  $\Omega$  dont le terme source est la densité de charge en solution (fonction de  $\rho$ ) et avec une condition de Neumann non homogène à la surface de l’objet solide.

Dans les milieux confinés avec de fortes charges surfaciques, il est important de prendre en compte des écarts à l’idéalité dans la définition de la densité d’énergie libre  $f_{\text{bulk}}$ . Ces écarts proviennent principalement des corrélations électrostatiques liées au phénomène d’écrantage des charges ioniques et des effets d’exclusion stérique dus à la taille des ions. La densité d’énergie libre  $f_{\text{bulk}}$  se décompose sous la forme

$$f_{\text{bulk}}(\rho) = f_{\text{id}}(\rho) + f_{\text{corr}}(\rho) + f_{\text{ster}}(\rho). \quad (7)$$

## Le stockage géologique des déchets radioactifs

Le terme idéal  $f_{id}$  et le terme d'exclusion stérique  $f_{ster}$  sont convexes en  $\rho$ . Dans le cadre du modèle MSA (Mean Spherical Approximation) [16], le terme de corrélation électrostatique  $f_{corr}$  peut s'évaluer à partir d'une longueur d'écrantage et conduit à une contribution concave en  $\rho$ . Pour des ions de même diamètre  $\sigma$  et de valences opposées  $\pm Z$ , la densité  $f_{corr}$  ne dépend que d'un seul paramètre adimensionné, la température réduite  $T^* = (4\pi\varepsilon)\sigma(k_B T)(Ze)^{-2}$  où  $\varepsilon$  est la permittivité électrique du solvant,  $k_B$  la constante de Boltzmann et  $e$  la charge élémentaire. La convexité de  $f_{bulk}$  dépend de la valeur de ce paramètre. Lorsque  $T^*$  est supérieure à une température critique  $T_{crit}^*$ ,  $f_{bulk}$  est convexe en  $\rho$ . Ce régime a été analysé dans [11]. En revanche, lorsque  $T^* < T_{crit}^*$ , la perte de convexité de  $f_{bulk}$  conduit à chercher des distributions spatiales des densités ioniques  $\rho$  présentant une séparation de phases : une phase condensée près des parois chargées écrantant la quasi-totalité des charges surfaciques et une phase diluée où une description idéale basée sur le modèle de Poisson–Boltzmann est pertinente. Ce régime a été étudié numériquement dans [17]. La figure 3 présente la distribution spatiale de la densité de cations autour d'un réseau périodique d'inclusions circulaires de pas 1 nm et portant une charge surfacique de  $0.2 \text{ Cm}^{-2}$ . On constate que la phase condensée suit assez fidèlement la forme des parois des inclusions circulaires. De tels résultats constituent un point de départ vers une description plus complète du comportement des argilites à plus grande échelle. Des premiers résultats en ce sens ont été obtenus dans [2] pour le modèle de Poisson–Boltzmann.

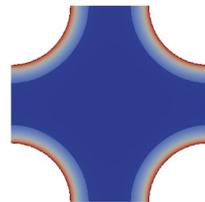


FIG. 3: Densité de cations pour un réseau d'inclusions circulaires

## 5 Propagation d'incertitudes

Plusieurs types d'erreur interviennent dans les simulations. Celles d'origine numérique et provenant de la discrétisation par des schémas et de la convergence des solveurs itératifs ont été abordées ci-dessus. Dans les applications couplant plusieurs processus physiques, parfois très complexes, il est essentiel d'estimer également les erreurs de modélisation. Ces dernières sont dues au fait que l'élaboration d'un modèle repose en général sur une description incomplète des processus visés. Pour fixer les idées, on considère le problème de diffusion (1) et on suppose que les erreurs de modélisation proviennent uniquement d'incertitudes

## Le stockage géologique des déchets radioactifs

sur les valeurs à attribuer au tenseur de diffusion  $S$ . Il s’agit alors d’estimer les incertitudes sur la solution  $p$  ou, plus spécifiquement, sur des quantités d’intérêt dépendant de  $p$ . Une question plus profonde (et bien plus délicate) porte sur les incertitudes provenant de la forme de l’équation aux dérivées partielles. Interprétant  $-S\nabla p$  comme une vitesse de filtration, on peut s’interroger sur sa dépendance fonctionnelle en  $p$  et en ses dérivées, voire sur la nécessité d’introduire d’autres variables d’état.

On considère des quantités d’intérêt  $Y$  dépendant de données d’entrée  $X$  par le biais d’un modèle  $\mathfrak{M}$  sous la forme  $Y = \mathfrak{M}(X)$ . Il s’agit d’une notation abstraite et l’évaluation du modèle  $\mathfrak{M}$  requiert en général la résolution d’une équation aux dérivées partielles. On adopte une description probabiliste des incertitudes sur les données d’entrée  $X$ . On suppose en particulier qu’on peut paramétrer ces incertitudes par le biais de  $N$  variables aléatoires  $\xi := (\xi_1, \dots, \xi_N)$  indépendantes et de densité de probabilité connue. Dans ces conditions, il existe plusieurs méthodes numériques afin de quantifier la propagation d’incertitudes de  $X$  vers  $Y$  à travers le modèle  $\mathfrak{M}$ . La méthode de Monte Carlo permet d’échantillonner  $Y$  à partir de  $X$  ; cette méthode est robuste notamment pour de grandes dimensions stochastiques  $N$  et elle est non-intrusive (le code déterministe associé au modèle  $\mathfrak{M}$  peut être utilisé en boîte noire), mais sa convergence est souvent lente. Les méthodes spectrales stochastiques [19] fournissent une représentation approchée de la dépendance fonctionnelle de  $Y$  en  $\xi$  sous la forme

$$Y(\xi) \sim Y_S(\xi) := \sum_{\alpha \in \mathcal{S}} y_\alpha \Phi_\alpha(\xi), \quad (8)$$

où  $\mathcal{S}$  est un ensemble d’indices,  $(y_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{S}}$  les modes stochastiques de  $Y_S$  et  $(\Phi_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{S}}$  une base fonctionnelle qui, dans le cas le plus simple, est engendrée par tensorisation partielle de bases polynomiales en les  $\xi_i$  (polynômes de chaos). La détermination des modes stochastiques peut se faire par des méthodes non-intrusives basées sur des interpolations ou des projections ou par des méthodes intrusives basées sur la méthode de Galerkin. Les méthodes spectrales stochastiques sont relativement précises, mais elles ne sont viables que pour des dimensions stochastiques modérées ( $N \lesssim 10$ ). Le membre de droite de (8) constitue une approximation de la variable de sortie  $Y$ . De nombreuses informations s’en déduisent facilement, comme les (premiers) moments de  $Y_S$ , des probabilités de dépassement de seuil, des quantiles, etc. En particulier, la représentation fonctionnelle (8) est particulièrement adaptée à l’analyse de sensibilité fondée sur la décomposition hiérarchique de Hoeffding–Sobol de la variance.

La figure 4 issue de [8] présente un exemple d’application à la migration de RN dans la géosphère à l’horizon du million d’années dans le cadre d’un modèle simplifié comprenant 4 couches géologiques (fixes dans le temps). Il y a en tout 10 paramètres incertains liés aux processus de filtration et de diffusion dans les couches géologiques. Le graphe de gauche présente les indices de sensibilité du premier ordre permettant d’étudier l’influence relative des variables d’entrée sur la variance de la sortie, qui est ici un flux à un exutoire. Le graphe de droite

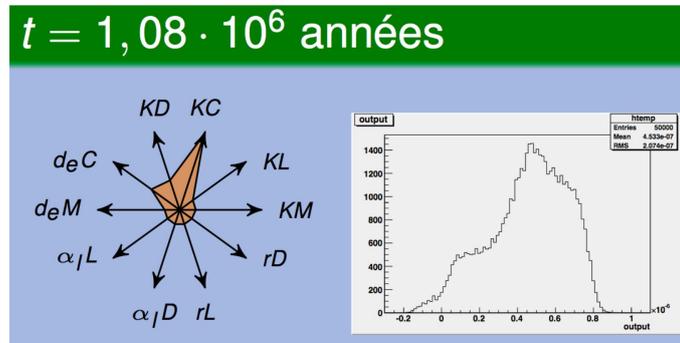


FIG. 4: Incertitudes dans un calcul de migration de RN dans la géosphère

présente la densité de cette sortie.

## Bibliographie

- [1] [www.dechets-radioactifs.com](http://www.dechets-radioactifs.com).
- [2] G. Allaire, A. Mikelić, and A. Piatnitski. Homogenization of the linearized ionic transport equations in rigid periodic porous media. *J. Math. Phys.*, 51 :123103, 2010.
- [3] I. Babuška and W.C. Rheinbolt. A posteriori error estimates for the finite element method. *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, 12 :1597–1615, 1978.
- [4] J. Bonelle and A. Ern. Analysis of compatible discrete operator schemes for elliptic problems on polyhedral meshes. Technical report, hal-00751284, 2012.
- [5] A. Bossavit. On the geometry of electromagnetism. *J. Japan Soc. Appl. Electromagn. & Mech.*, 6 :17–28 (no 1), 114–23 (no 2), 233–40 (no 3), 318–26 (no 4), 1998.
- [6] A. Bossavit. Computational electromagnetism and geometry. *J. Japan Soc. Appl. Electromagn. & Mech.*, 7-8 :150–9 (no 1), 294–301 (no 2), 401–8 (no 3), 102–9 (no 4), 203–9 (no 5), 372–7 (no 6), 1999-2000.
- [7] F. Brezzi, A. Buffa, and K. Lipnikov. Mimetic finite difference for elliptic problem. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 43 :277–295, 2009.
- [8] T. Crestaux. *Méthode adaptative d’intégration multi-dimensionnelle et sélection d’une base de polynômes de chaos*. PhD thesis, Université Paris 13 and CEA/DEN, 2011.
- [9] D. A. Di Pietro and A. Ern. *Mathematical Aspects of Discontinuous Galerkin Methods*, volume 69 of *SMAI Mathématiques et Applications*. Springer, 2012.

## Le stockage géologique des déchets radioactifs

---

- [10] J. Droniou, R. Eymard, T. Gallouët, and R. Herbin. A unified approach to Mimetic Finite Difference, Hybrid Finite Volume and Mixed Finite Volume methods. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 20(2) :265–295, 2010.
- [11] A. Ern, R. Joubaud, and T. Lelièvre. Mathematical study of non-ideal electrostatic correlations in equilibrium electrolytes. *Nonlinearity*, 25 :1635–1652, 2012.
- [12] A. Ern and M. Vohralík. A posteriori error estimation based on potential and flux reconstruction for the heat equation. *SIAM J. Numer. Anal.*, 48(1) :198–223, 2010.
- [13] A. Ern and M. Vohralík. Adaptive inexact Newton methods : a posteriori error control and speed-up of calculations. *SIAM News*, 46(1) :1, 2013.
- [14] R. Eymard, T. Gallouët, and R. Herbin. Discretization of heterogeneous and anisotropic diffusion problems on general nonconforming meshes SUSHI : a scheme using stabilization and hybrid interfaces. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 30(4) :1009–1043, 2010.
- [15] R. Eymard, G. Henry, R. Herbin, F. Hubert, R. Klöfkorn, and G. Manzini. 3d benchmark on discretization schemes for anisotropic diffusion problems on general grids. In *Finite Volumes for Complex Applications VI - Problems & Perspectives*, volume 2, pages 95–130. Springer, 2011.
- [16] M. Jardat, J.-F. Dufrêche, V. Marry, B. Rotenberg, and P. Turq. Salt exclusion in charged porous media : a coarse-graining strategy in the case of montmorillonite clays. *Phys. Chem. Chem. Phys.*, 11 :2023–2033, 2009.
- [17] R. Joubaud. *Modélisation mathématique et numérique des fluides à l’échelle nanométrique*. PhD thesis, Université Paris-Est, 2012.
- [18] P. Ladevèze. *Comparaison de modèles de milieux continus*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie (Paris 6), 1975.
- [19] O. Le Maître and O. Knio. *Spectral Methods for Uncertainty Quantification*. Scientific Computation. Springer, 2010.
- [20] W. Prager and J. L. Synge. Approximations in elasticity based on the concept of function space. *Quart. Appl. Math.*, 5 :241–269, 1947.
- [21] E. Tonti. *On the Formal Structure of Physical Theories*. Istituto di matematica, Politecnico, Milano, 1975.
- [22] A. Veiser and R. Verfürth. Explicit upper bounds for dual norms of residuals. *SIAM J. Numer. Anal.*, 47(3) :2387–2405, 2009.
- [23] R. Verfürth. *A Review of a Posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh-Refinement Techniques*. Wiley, Chichester, UK, 1996.

## Quelques exemples de modélisation ou d'imagerie par ondes acoustiques

par Dimitri Komatitsch<sup>1</sup>

### 1 Introduction : éléments finis spectraux pour les ondes acoustiques ou élastiques, le logiciel SPECFEM3D

Au cours des 35 dernières années, de nombreuses méthodes ont été utilisées pour le calcul numérique de sismogrammes synthétiques (variation du déplacement en un point au cours du temps) dans des modèles géologiques complexes, d'abord à deux dimensions et plus récemment à trois dimensions. La technique des différences finies [29, 19] est la plus répandue et a été appliquée avec succès à des modèles locaux ou régionaux. Une autre technique fréquemment utilisée est la méthode pseudospectrale, qui utilise des bases globales de polynômes de Chebyshev ou de Legendre. Les méthodes intégrales ou d'éléments frontières ont également beaucoup été utilisées. Plus récemment, les méthodes multipôles rapides [3] ainsi que les méthodes de Galerkin discontinues [10, 23] ont connu un développement important. Cependant, dans beaucoup de cas d'intérêt pratique, certaines de ces méthodes traditionnelles souffrent de limitations telles que de la dispersion ou de l'anisotropie numérique, ou alors d'un coût numérique élevé et/ou d'une mise en oeuvre difficile, en particulier sur les ordinateurs parallèles multi-processeurs.

Au cours de la dernière décennie nous avons donc contribué au développement d'une nouvelle technique, appelée la méthode des éléments spectraux (SEM – Spectral Element Method, [27, 22]), qui avait été introduite initialement en mécanique des fluides [21] et que nous avons appliquée pour la première fois à la propagation des ondes dans des structures 3D complexes. Cette technique est fondée sur une formulation variationnelle de l'équation des ondes et combine la flexibilité d'une méthode d'éléments finis avec la précision d'une méthode pseudospectrale globale. Le maillage d'éléments finis est adapté à toutes les discontinuités principales du modèle géologique et par construction la matrice de masse est exactement diagonale. Les effets de l'atténuation et de l'anisotropie sismiques peuvent être pris en compte de manière précise.

Ce travail a montré la supériorité de la méthode des éléments spectraux par rapport à des techniques numériques plus traditionnelles pseudospectrales ou de différences finies en termes de précision, de faible dispersion numérique et de flexibilité géométrique permettant de l'adapter à des modèles 3D complexes de

<sup>1</sup>Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique, CNRS UPR 7051, 31 chemin Joseph Aiguier, 13402 Marseille cedex 20, France. Email : komatitsch@lma.cnrs-mrs.fr

## Quelques exemples de modélisation ou d'imagerie par ondes acoustiques

---

grande taille. Une telle précision est un avantage important pour la résolution de problèmes directs ou inverses en propagation d'ondes.

Nous avons baptisé notre logiciel SPECFEM3D ("SPECtral Finite Element Method in three Dimensions") et nous l'avons rendu open source pour le mettre à la disposition de la communauté scientifique sur Internet (logiciel libre). Il est de ce fait actuellement utilisé par de nombreux groupes dans le monde pour un nombre important d'applications, par exemple pour modéliser la propagation d'ondes sismiques résultant de séismes, modéliser des expériences d'acquisition sismiques effectuées dans l'industrie pétrolière, des expériences dans les cristaux avec des ultrasons, ou encore des expériences de laboratoire pour des problèmes fluide-solide. Nous présentons ci-dessous un certain nombre d'applications de ce type.

## 2 Calcul numérique parallèle à très haute performance "pétaflopique" et "exaflopique", calcul sur des cartes graphiques GPU

Les progrès spectaculaires des technologies informatiques depuis quelques dizaines d'années conduisent à disposer de nos jours pour les plus gros ordinateurs mondiaux de machines dites "pétaflopiques", c'est-à-dire capables d'effectuer  $10^{15}$  opérations numériques en virgule flottante par seconde (1 péta =  $10^{15}$ , 1 flops = 1 floating point operation per second). D'ici moins d'une dizaine d'années, vers 2019-2022, nous devrions disposer de machines mille fois plus puissantes, dites "exaflopiques" (1 exa =  $10^{18}$ ). L'avantage de ces machines est de rendre les calculs 3D à haute résolution possibles à relativement faible coût, mais l'inconvénient est qu'il est nécessaire de modifier de manière significative les algorithmes de calcul séquentiel existants pour utiliser explicitement des bibliothèques de passage de message en parallèle (Message-Passing Interface – MPI) parce que chaque noeud de calcul possède ses propres processeurs et sa propre mémoire, et les communications entre les processeurs doivent donc être programmées explicitement.

Du fait des résolutions de plus en plus élevées que l'on va souhaiter atteindre par exemple dans les communautés d'acoustique, de sismique / sismologie ou de mécanique dans les prochaines années, il est important de commencer à s'intéresser à l'adaptation de nos méthodes numériques aux architectures modernes des ordinateurs de grande taille. En acoustique, on peut par exemple citer le cas de l'échographie, où les fréquences en jeu sont de l'ordre de plusieurs MHz, soit des longueurs d'onde millimétriques, sur des distances de l'ordre de quelques dizaines de centimètres jusqu'au mètre dans des modèles 3D, ou le cas de sonars militaires avec des fréquences typiques autour de 3 kHz sur des distances de quelques kilomètres, soit la nécessité de propager dans des modèles 3D dont la taille fait plusieurs milliers de fois la longueur d'onde. De nombreuses autres

## Quelques exemples de modélisation ou d'imagerie par ondes acoustiques

applications en laboratoire nécessitent des résolutions très élevées en raison des échelles ou des gammes de fréquence mises en jeu.

Sachant que les différents acteurs de la recherche au niveau français, européen et international définissent tous le calcul intensif haute performance comme une priorité pour les prochaines années, il est important de se préparer dès à présent à l'utilisation des plus grosses machines actuelles, dites "pétaflopiques", par exemple le "Très Grand Centre de Calcul – TGCC Curie", et à celles du futur, dites "exaflopiques". Au niveau national ainsi qu'au niveau européen, ces thématiques de calcul très haute performance bénéficient depuis quelques années d'un soutien très important. On peut citer par exemple les organismes français GENCI ("Grand équipement National de Calcul Intensif") et européen PRACE ("Partnership for Advanced Computing in Europe"), le CNRS, le Ministère, le CEA, l'INRIA, l'Académie des Sciences etc., ainsi que plusieurs constructeurs informatiques privés majeurs, qui sont tous très impliqués dans ces thématiques. Dans [14] nous avons montré comment les améliorations effectuées dans notre logiciel nous ont permis de gagner un facteur trois en temps de calcul et ainsi d'aborder des calculs en sismologie globale à une résolution qui n'avait jamais été atteinte auparavant. En raison de son efficacité sur des ordinateurs parallèles, notre logiciel SPECFEM3D a été choisi par le consortium européen PRACE comme l'un des logiciels de référence pour la mise au point de leurs nouvelles générations de supercalculateurs "pétaflopiques".

Par ailleurs, depuis environ cinq ans la communauté des informaticiens a remarqué qu'il était possible de mettre à profit la formidable progression technologique des cartes de jeux vidéo (les cartes graphiques des PCs) pour faire du calcul scientifique accéléré. En effet ces cartes sont conçues pour faire du calcul très rapide sur des objets 3D et il est donc possible de les utiliser sur des jeux de données de propagation d'ondes en faisant appel à leurs outils de traitement 3D qui sont au départ prévus pour autre chose (animer des objets graphiques). Cette technologie récente porte le nom de "General-Purpose computing on Graphics Processing Units" (GPGPU ou GPU computing).

Au cours des dernières années nous avons utilisé cette technologie pour accélérer certains de nos codes de calcul d'un facteur important [13, 20]. Nous avons en particulier adapté des algorithmes de différences finies et des algorithmes d'éléments finis et nous avons obtenu de très bonnes performances y compris sur des réseaux d'ordinateurs comportant un grand nombre de ces cartes graphiques. Ces deux méthodes numériques sont très utilisées dans de nombreux domaines de la propagation d'ondes. Récemment nous avons commencé à utiliser cette technologie GPU pour traiter des problèmes acoustiques pour des modèles fluide-solide [11]. Les codes de calcul doivent en général être significativement modifiés pour tenir compte des spécificités matérielles de ces cartes, mais les efforts de programmation qu'il faut faire sont récompensés par une accélération importante par rapport à une machine classique.

Quelques exemples de modélisation ou d'imagerie par ondes acoustiques

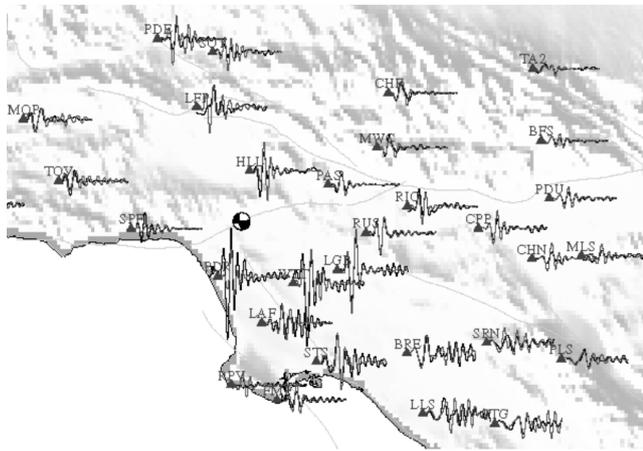


FIG. 1: Simulation d'un petit tremblement de terre qui s'est produit en 2001 dans le bassin sédimentaire de Los Angeles (Californie du Sud, USA).

### 3 Étude de régions complexes à l'échelle locale ou régionale en sismologie ou sismique pétrolière

Nous avons utilisé nos connaissances en modélisation numérique pour étudier des cas réels d'intérêt pratique en propagation d'ondes, par exemple l'étude des mouvements forts du sol et de l'aléa sismique associé dans la région fortement peuplée du bassin de Los Angeles (USA) [15]. La région de Los Angeles est composée d'un bassin sédimentaire de grande taille (plus de 100 kilomètres par 100 kilomètres) qui est l'un des bassins les plus profonds du monde (la couche sédimentaire a une épaisseur maximum d'environ 8,5 kilomètres juste sous le centre ville de Los Angeles), et donc l'un des plus dangereux en raison de l'amplification résultante des ondes élastiques. En utilisant la méthode des éléments spectraux à 3D, nous sommes parvenus pour la première fois à ajuster les trois composantes du vecteur déplacement pour un petit séisme qui s'est produit en 2001 dans le bassin sédimentaire de Los Angeles (Californie du Sud, USA). Les études précédentes par d'autres groupes s'étaient concentrées sur la seule composante verticale (Figure 1).

Plus récemment nous avons poussé cette étude plus loin en abordant un problème inverse [18] : inversion de la source sismique (à modèle géologique constant) en utilisant un calcul complètement 3D par éléments spectraux pour résoudre le problème direct à chaque itération, ce qui n'avait jamais été fait auparavant. Nous avons développé et mis en oeuvre un procédé automatisé d'inversion de tenseur de moment pour déterminer des paramètres de source pour des tremblements de terre en Californie du Sud. La sensibilité aux paramètres de source est déterminée en calculant numériquement les dérivées de Fréchet nécessaires pour l'inversion du tenseur de moment. Nous minimisons une fonction d'écart de forme d'onde ("waveform misfit function") et autorisons des décalages en temps de durée limitée entre les données et les calculs synthétiques correspon-

## Quelques exemples de modélisation ou d'imagerie par ondes acoustiques

dants afin de prendre en compte les effets de l'hétérogénéité 3D supplémentaire qui n'est pas incluse dans notre modèle.

Un domaine d'application important que nous avons étudié pour ces simulations de propagation d'ondes sismiques à l'échelle locale ou régionale est l'étude de modèles pétroliers. En effet, les techniques d'imagerie et de tomographie par les ondes sismiques constituent les méthodes les plus classiques pour localiser des accumulations souterraines de pétrole ou de gaz. On effectue typiquement des expériences de sismique active (génération artificielle d'ondes acoustiques ou élastiques) sur le terrain pour imager les structures géologiques souterraines, et tout le problème réside dans l'analyse et l'interprétation des ondes de compression (parfois aussi de cisaillement) dont l'énergie réfléchiée par les interfaces entre couches géologiques est enregistrée au niveau des capteurs sismiques. Notons que ces problèmes présentent une analogie avec certains modèles rencontrés en acoustique sous-marine.

Dans le cadre de l'industrie pétrolière, il est donc important de développer des outils numériques efficaces pour modéliser avec précision la croûte terrestre à une échelle de quelques dizaines de kilomètres. L'inversion des données sismiques afin d'extraire les paramètres de vitesse des ondes de compression et de cisaillement sismiques est un moyen qui commence à être utilisé pour améliorer itérativement le modèle, en réduisant progressivement l'écart entre des données synthétiques calculées numériquement pour la version actuelle du modèle et les données observées mesurées sur le terrain. Cela conduit à résoudre numériquement le problème dit "direct" un très grand nombre de fois au cours de ce processus itératif, ce qui justifie le besoin de codes de calcul très optimisés. De tels problèmes inverses ont été formulés théoriquement dans les années 80 [16, 26].

### 4 Aléa lié aux ondes sismiques élastiques ou visco-élastiques, effets de site sismiques, sismologie régionale

L'étude de l'aléa produit par les ondes acoustiques ou élastiques (ondes sismiques de volume et de surface) à l'échelle locale ou régionale est un problème très important en raison des tremblements de terre dévastateurs qui se produisent chaque année. Les exemples récents de l'Aquila (Italie, avril 2009), Haïti (janvier 2010) et du Chili (mars 2010) sont venus le rappeler. Les effets potentiellement dévastateurs de ces séismes peuvent provenir à la fois des ondes élastiques de compression/dilatation (ondes P), des ondes de cisaillement (ondes S) et des ondes de surface (ondes de Rayleigh ou de Love), similaires aux ondes de surface (Surface Acoustic Waves – SAW) qui sont utilisées dans le domaine des ultrasons à l'échelle du laboratoire, par exemple pour la caractérisation non destructive (CND).

Ce type d'étude nous permet d'obtenir des cartes de vitesse ou d'accélération

## Quelques exemples de modélisation ou d'imagerie par ondes acoustiques

---

maximale (Peak Ground Velocity – PGV ou Peak Ground Acceleration – PGA) se produisant lors d'un tremblement de terre. Après un tremblement de terre, il est par exemple possible de calculer des cartes d'accélération maximale pour plusieurs scénarios de répliques importantes qui pourraient se produire éventuellement dans la région. Malheureusement, il est impossible de prédire si ou quand un événement sismique pourrait se produire, mais il est possible de faire des simulations de scénarios hypothétiques, c'est-à-dire que si l'on suppose qu'un événement donné se produit à un endroit donné à un instant donné il est possible de calculer une estimation de l'accélération du sol qui en résultera.

Plus récemment nous avons étudié en détail l'influence de la topographie sur les mouvements forts du sol dans l'île de Taiwan. Il est en effet connu que la topographie peut amplifier assez fortement les mouvements forts du sol dans certains endroits, par exemple au sommet d'une colline ou en son voisinage, augmentant ainsi l'aléa sismique si des bâtiments sont construits sur de tels sites, ce qui est le cas à Taiwan. Dans [17] nous avons donc simulé les mouvements forts du sol dans toute la zone métropolitaine de la capitale, Taipei.

## 5 Ondes de surface dans un cristal très anisotrope, caractérisation non destructive (CND) des matériaux

Un autre sujet que nous avons étudié récemment est celui de la propagation des ondes de surface (Surface Acoustic Waves – SAW) dans le domaine des ultrasons à l'échelle du laboratoire, par exemple dans les cristaux anisotropes. Il existe en effet un débat dans la littérature abondante et parfois contradictoire traitant de la propagation des ondes de surface dans un cristal très anisotrope (voir par exemple [9, 5, 2]). Nous avons voulu clarifier cela grâce au calcul numérique à haute résolution, ce qui illustre l'utilité de disposer de tels outils numériques. Afin d'analyser les différents types d'ondes de surface existant ou non dans de tels cristaux très anisotropes nous avons étudié la propagation d'une onde de Rayleigh à la surface libre d'un milieu anisotrope à symétrie cubique. Notre code de calcul numérique SPECFEM3D permettant de simuler la propagation des ondes sismiques dans des milieux anisotropes complexes pouvant avoir jusqu'à 21 coefficients d'anisotropie indépendants, c'est-à-dire le cas le plus général, en calculant numériquement la réponse d'un cristal de cuivre à une source impulsionnelle nous avons pu étudier la propagation d'ondes pour différentes directions le long des plans cristallins (001), (111) et (110) (Figure 2).

Dans [6, 12] les résultats que nous avons obtenus pour des orientations et des directions de propagation spécifiques ont été interprétés en termes des mécanismes physiques et des transformations de type d'ondes décrits dans la littérature. Ce travail nous a permis de pousser plus avant l'analyse de la propagation des ondes de surface pour une variation continue de l'azimut de propagation dans les plans cristallins (001), (111) et (110) du milieu cubique, ce qui est intéressant pour la connaissance de la propagation des ondes de Rayleigh en milieu anisotrope.

Quelques exemples de modélisation ou d'imagerie par ondes acoustiques

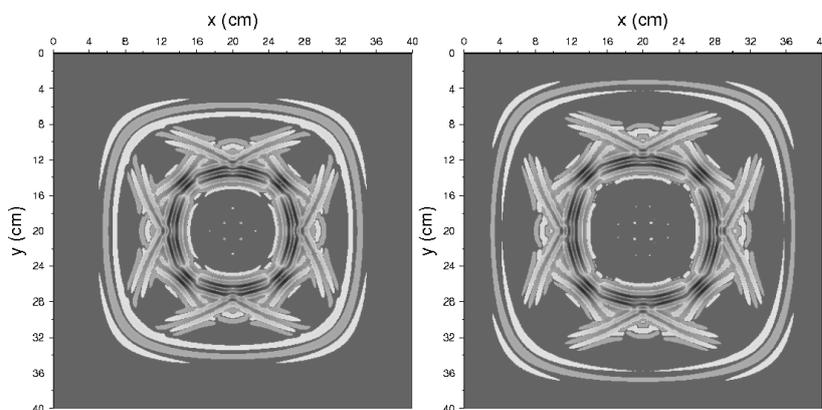


FIG. 2: Modélisation numérique 3D par la méthode des éléments spectraux grâce à notre code de calcul SPECFEM3D de la propagation des ondes à la surface libre, orientée dans le plan cristallin (001), d'un cristal de cuivre (système cubique). On voit l'onde de surface se développer et se propager.

Dans un futur proche nous pouvons envisager des applications en caractérisation non destructive (CND) des matériaux, par exemple la caractérisation de la diffusion par un ensemble de cavités. Cela permettrait de mieux caractériser des milieux multi-diffusants. Un autre intérêt de simulations numériques à grande précision serait de modéliser avec une très bonne fiabilité la "coda" des signaux, c'est-à-dire leur partie tardive qui est présente tant dans les signaux transmis que dans les signaux rétrodiffusés et qui est générée par multi-diffusion. Cette coda contient potentiellement des informations utiles sur les caractéristiques du milieu, mais celles-ci sont difficiles à exploiter actuellement par manque d'outils d'analyse numériques précis. Des codes de calcul haute performance peuvent pallier ce manque.

## 6 Tomographie acoustique, méthodes adjointes, problèmes inverses et imagerie en milieu complexe

Ces dernières années, les travaux théoriques de [16] et [26] sur l'inversion des ondes sismiques et l'imagerie ont commencé à être appliqués de manière spectaculaire à des modèles 3D de grande taille car les progrès importants des ordinateurs ont commencé à rendre les calculs que cela implique réalisables. En effet, il est de nos jours possible de calculer des sismogrammes synthétiques dans des modèles géologiques 3D complexes de manière très précise et de calculer les dérivées de Fréchet. De ce fait, on peut appliquer des techniques de rétro-propagation

## Quelques exemples de modélisation ou d'imagerie par ondes acoustiques

---

en inversant le temps et en calculant des opérateurs adjoints, comme cela a été montré dans le domaine temporel par exemple par [27] ainsi que par [7]. Dans le domaine fréquentiel des résultats importants ont été obtenus pour la résolution de problèmes inverses, par exemple par [28]. Tous ces travaux étendent les principes d'imagerie que les pétroliers ont commencé à utiliser il y a plusieurs décennies suite en particulier aux travaux de [4]. De ce fait, l'industrie pétrolière s'intéresse grandement à ces thèmes.

En établissant des connexions entre la tomographie sismique, les méthodes d'adjoint qui sont utilisées classiquement dans le domaine du climat et de la dynamique des océans, et l'imagerie par renversement temporel, on peut montrer qu'une itération du processus d'inversion tomographique peut être effectuée avec deux simulations numériques seulement pour chaque source sismique : un calcul pour le modèle actuel et un second calcul adjoint qui utilise simultanément comme sources fictives les signaux renversés en temps qui ont été enregistrés aux récepteurs [26, 24, 8, 1, 27, 7, 22]. Ces méthodes numériques peuvent être utilisées en résolvant un problème de minimisation dans le contexte de la tomographie acoustique par le calcul de l'adjoint. Cela commence à rendre possible la résolution de problèmes inverses 3D réalistes, à savoir utiliser les différences entre les données et les simulations pour améliorer des images de l'intérieur de la terre. Nous avons donc ajouté des capacités de calcul du problème adjoint à notre logiciel SPECFEM3D [27, 22]. Avec ces nouveaux outils de modélisation la communauté va pouvoir aller au delà de la tomographie simplifiée actuelle, utiliser des modèles de départ complètement 3D pour initialiser le problème inverse et exploiter autant d'information que possible dans les données sismiques.

En utilisant SPECFEM3D, le groupe de Jeroen Tromp à Princeton (USA), avec qui nous collaborons, a publié récemment dans [25] une tomographie élastique par inversion itérative basée sur les ondes élastiques d'un modèle de toute la région de Californie du sud fondée sur les noyaux de sensibilité 3D appelés "Banana-Donut sensitivity kernels". Un total de 143 tremblements de terre a été utilisé pour mener à bien cette inversion. Les 16 itérations ont requis un grand nombre de calculs 3D (6864 résolutions du problème direct) mais cela a permis une amélioration importante de la connaissance du modèle géologique de cette région fortement peuplée, et un accord aux données réelles largement meilleur (Figure 3). De telles inversions restent coûteuses, car il a fallu utiliser 168 processeurs d'un ordinateur parallèle pendant 45 minutes pour effectuer chaque calcul, ce qui donne un total de près d'un million d'heures de calcul pour résoudre l'ensemble du problème. Cependant ce résultat est prometteur car il montre que l'inversion tridimensionnelle sismique commence à devenir réalisable en pratique pour imager des zones très complexes.

Quelques exemples de modélisation ou d'imagerie par ondes acoustiques

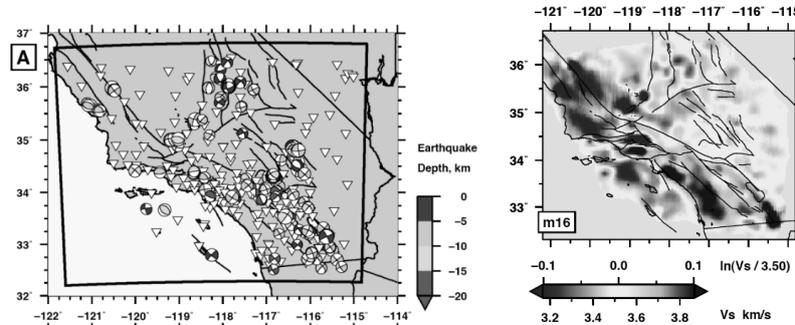


FIG. 3: Pris dans [25] : tomographie élastique par inversion itérative des ondes sismiques dans un modèle géologique de l'ensemble de la Californie du sud.

## Bibliographie

- [1] V. Akçelik, J. Bielak, G. Biros, I. Epanomeritakis, A. Fernandez, O. Ghattas, E. J. Kim, J. Lopez, D. O'Hallaron, T. Tu, and J. Urbanic. High-resolution forward and inverse earthquake modeling on terascale computers. In *SC'03 : Proceedings of the 2003 ACM/IEEE conference on Supercomputing*, pages 52–72, Phoenix, Arizona, USA, 2003.
- [2] C. Bescond and M. Deschamps. Dynamical surface response of a semi-infinite anisotropic elastic medium to an impulsive force. *J. Acoust. Soc. Am.*, 103(1) :114–124, 1998.
- [3] S. Chaillat, M. Bonnet, and J.-F. Semblat. A multi-level fast multipole BEM for 3-D elastodynamics in the frequency domain. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 197(49-50) :4233–4249, 2008.
- [4] J. F. Claerbout. Toward a unified theory of reflector mapping. *Geophysics*, 36 :467–481, 1971.
- [5] G. W. Farnell. Properties of elastic surface waves. In W. P. Mason and R. N. Thurston, editors, *Physical Acoustics*, volume 6, chapter 3, pages 109–166. Academic Press, New York, USA, 1970.
- [6] N. Favretto-Cristini, D. Komatitsch, J. Carcione, and F. Cavallini. Elastic surface waves in crystals : Part I : Review of the physics. *Ultrasonics*, 51(6) :653–660, 2011.
- [7] A. Fichtner. *Full Seismic Waveform Modelling and Inversion*. Advances in Geophysical and Environmental Mechanics and Mathematics. Springer Verlag, Heidelberg, Germany, 2010.
- [8] M. Fink, D. Cassereau, A. Derode, C. Prada, P. Roux, M. Tanter, J.-L. Thomas, and F. Wu. Time-reversed acoustics. *Reports on Progress in Physics*, 63(12) :1933, 2000.

Quelques exemples de modélisation ou d'imagerie par ondes acoustiques

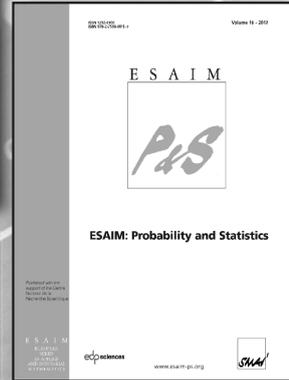
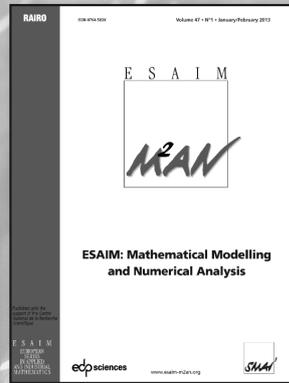
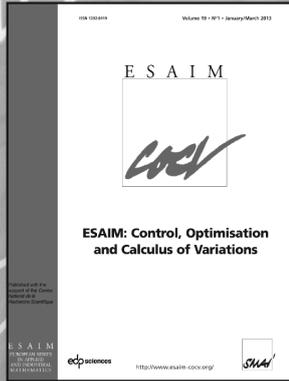
---

- [9] D. C. Gazis, R. Herman, and R. F. Wallis. Surface elastic waves in cubic crystals. *Physical Review*, 119(2) :533–544, 1960.
- [10] F. Q. Hu, M. Y. Hussaini, and P. Rasetarinera. An analysis of the discontinuous Galerkin method for wave propagation problems. *J. Comput. Phys.*, 151(2) :921–946, 1999.
- [11] D. Komatitsch. Fluid-solid coupling on a cluster of GPU graphics cards for seismic wave propagation. *C. R. Acad. Sci., Ser. IIb Mec.*, 339 :125–135, 2011.
- [12] D. Komatitsch, J. Carcione, F. Cavallini, and N. Favretto-Cristini. Elastic surface waves in crystals : Part II : Cross-check of two full-wave numerical modeling methods. *Ultrasonics*, 51(8) :878–889, 2011.
- [13] D. Komatitsch, G. Erlebacher, D. Göddeke, and D. Michéa. High-order finite-element seismic wave propagation modeling with MPI on a large GPU cluster. *J. Comput. Phys.*, 229(20) :7692–7714, 2010.
- [14] D. Komatitsch, J. Labarta, and D. Michéa. A simulation of seismic wave propagation at high resolution in the inner core of the Earth on 2166 processors of MareNostrum. *Lecture Notes in Computer Science*, 5336 :364–377, 2008.
- [15] D. Komatitsch, Q. Liu, J. Tromp, P. Süß, C. Stidham, and J. H. Shaw. Simulations of ground motion in the Los Angeles basin based upon the spectral-element method. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 94(1) :187–206, 2004.
- [16] P. Lailly. The seismic inverse problem as a sequence of before-stack migrations. In *Proceedings of the Conference on Inverse Scattering, Theory and Application Expanded Abstracts*, pages 206–220, Philadelphia, USA, 1983. Society of Industrial and Applied Mathematics.
- [17] S. J. Lee, H. W. Chen, Q. Liu, D. Komatitsch, B. S. Huang, and J. Tromp. Three-dimensional simulations of seismic wave propagation in the Taipei basin with realistic topography based upon the spectral-element method. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 98(1) :253–264, 2008.
- [18] Q. Liu, J. Polet, D. Komatitsch, and J. Tromp. Spectral-element moment tensor inversions for earthquakes in Southern California. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 94(5) :1748–1761, 2004.
- [19] R. Madariaga. Dynamics of an expanding circular fault. *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 66(3) :639–666, 1976.
- [20] D. Michéa and D. Komatitsch. Accelerating a 3D finite-difference wave propagation code using GPU graphics cards. *Geophys. J. Int.*, 182(1) :389–402, 2010.
- [21] A. T. Patera. A spectral element method for fluid dynamics : laminar flow in a channel expansion. *J. Comput. Phys.*, 54 :468–488, 1984.
- [22] D. Peter, D. Komatitsch, Y. Luo, R. Martin, N. Le Goff, E. Casarotti, P. Le Locher, F. Magnoni, Q. Liu, C. Blitz, T. Nissen-Meyer, P. Basini, and J. Tromp. Forward and adjoint simulations of seismic wave propagation on fully unstructured hexahedral meshes. *Geophys. J. Int.*, 186(2) :721–739, 2011.

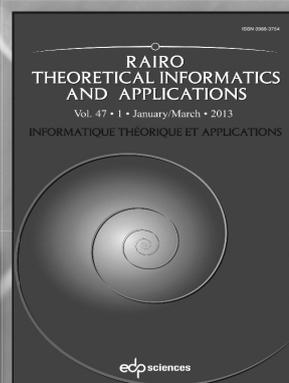
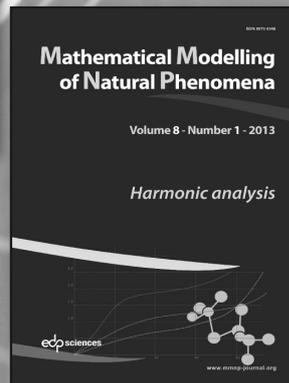
---

Quelques exemples de modélisation ou d'imagerie par ondes acoustiques

- [23] B. Rivière and M. F. Wheeler. Discontinuous finite element methods for acoustic and elastic wave problems. *Contemporary Mathematics*, 329 :271–282, 2003.
- [24] O. Talagrand and P. Courtier. Variational assimilation of meteorological observations with the adjoint vorticity equation. I : Theory. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, 113 :1311–1328, 1987.
- [25] C. Tape, Q. Liu, A. Maggi, and J. Tromp. Adjoint tomography of the southern California crust. *Science*, 325 :988–992, 2009.
- [26] A. Tarantola. Inversion of seismic reflection data in the acoustic approximation. *Geophysics*, 49 :1259–1266, 1984.
- [27] J. Tromp, D. Komatitsch, and Q. Liu. Spectral-element and adjoint methods in seismology. *Communications in Computational Physics*, 3(1) :1–32, 2008.
- [28] J. Virieux and S. Operto. An overview of full-waveform inversion in exploration geophysics. *Geophysics*, 74(6) :WCC1–WCC26, 2009.
- [29] K. S. Yee. Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell’s equations. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 14 :302–307, 1966.



edpsciences



## Les différentes échelles de temps de l'évolution

*par* Vincent Bansaye, Sylvie Méléard et Amandine Véber

### 1 Une modélisation complexe et des enjeux importants

A l'heure du réchauffement climatique et de la prise de conscience de l'impact de l'activité humaine sur l'environnement, une bonne compréhension des mécanismes d'évolution de la biodiversité est devenue une démarche essentielle, notamment pour la prise de décisions. Prédire si une espèce va s'éteindre prochainement, comprendre quelles sont les conséquences du fractionnement de son habitat sur son développement, connaître le fonctionnement d'un écosystème et les changements engendrés par la disparition de l'une de ses espèces : autant de questions complexes qui nécessitent non seulement des outils mathématiques sophistiqués, mais également un dialogue constant avec les biologistes de l'évolution.

Comme pour tout modèle mathématique, la modélisation de l'évolution d'une (ou plusieurs) espèce(s) passe par une simplification intelligente des phénomènes biologiques. Celle-ci permet à la fois de faire intervenir des objets mathématiques suffisamment compréhensibles pour espérer tirer quelque chose de leur étude et de mettre en avant les forces principales qui agissent sur la population considérée. On cherche ensuite à identifier des quantités calculables qui décrivent tout ou une partie des mécanismes de l'évolution, comme par exemple le temps d'extinction d'une espèce, la probabilité qu'un gène particulier envahisse entièrement la population, ou qu'au contraire celle-ci finisse par se scinder en deux sous-populations suffisamment distinctes génétiquement pour que naisse une nouvelle espèce. Ces quantités nous permettent de comprendre l'effet à long terme des interactions entre les individus, de leur différences phénotypiques ou génotypiques ou des variations de l'environnement sur la dynamique des populations. En parallèle de cette étude analytique, le développement d'algorithmes de simulation est d'une grande aide pour la prédiction de certains comportements. Par ailleurs, l'utilisation « concrète » de ces modèles nécessite la mise au point de méthodes statistiques permettant de reconstruire les grandeurs d'intérêt ou de tester la validité d'une approche à partir d'un jeu de données réelles.

Cette interface entre mathématiques et biologie n'est pas une discipline récente. Au XIX<sup>ème</sup> et début du XX<sup>ème</sup> siècle, de nombreux modèles (déterministes pour la plupart) ont été développés pour étudier la dynamique des populations (Malthus, Verhulst, Lotka, Volterra, . . . , voir le premier chapitre de [Mur02]). D'autres modèles plus probabilistes ont également été proposés pour étudier la diversité

## Les différentes échelles de temps de l'évolution

génétique des populations (Fisher, Galton, Haldane, Wright..., cf. §3). Au cours des dernières décennies, les biologistes se sont largement concentrés sur la biologie moléculaire et sur la formidable masse de données que les nouvelles technologies leur ont permis d'obtenir. Les méthodes de séquençage ont apporté beaucoup d'informations qu'il a fallu trier, classer, ordonner et analyser. Forts de ces données, les biologistes ressentent de nouveau la nécessité de créer des modèles pour leur donner une cohérence et en déduire des prédictions sur les comportements biologiques et écologiques.

Bien que toutes les questions citées ci-dessus soient liées, elles mettent en jeu des échelles de temps très différentes : l'apparition ou la disparition d'une population de petite taille se déroule sur des périodes de l'ordre d'une dizaine de générations, tandis que la diversité génétique (ou phénotypique) d'une population ayant atteint un équilibre démographique à une taille relativement élevée évolue sur une échelle de l'ordre de centaines de générations ; enfin, la création et la disparition de nouvelles espèces se compte plutôt en milliers de générations. Ce sont à ces trois échelles que nous nous attacherons dans la suite de cet article.

## 2 Modèles d'évolution démographique d'une population

Commençons par nous intéresser à l'évolution au cours du temps de la taille d'une population. Celle-ci est une fonction de l'environnement dans lequel la population se développe, de la compétition entre ses membres pour l'utilisation des ressources, voire de l'organisation géographique des individus. Pour inclure tous ces facteurs, des modèles de population de plus en plus élaborés ont été et continuent à être proposés.

Le modèle probabiliste le plus classique en la matière est le processus de Galton-Watson. Il permet de prendre en compte de la manière la plus simple possible la stochasticité démographique, c'est-à-dire le fait que tous les individus n'ont pas nécessairement le même nombre d'enfants. Il suppose que chaque individu se reproduit indépendamment des autres, toujours selon la même loi de reproduction. Ainsi, si  $Z_n$  est la taille de la population à la  $n$ ème génération, alors

$$Z_{n+1} = X_{1,n} + \dots + X_{Z_n,n},$$

où  $X_{i,n}$  est le nombre d'enfants du  $i$ ème individu à la génération  $n$ . Les variables  $X_{i,n}$  sont indépendantes et toutes distribuées selon la loi d'une variable  $X$ . En particulier, le nombre moyen  $m = \mathbb{E}(X)$  d'enfants par individu est constant.

Ce processus vérifie la *propriété de branchement*, à savoir que les familles générées par deux individus distincts pris à une même génération se comportent de manière indépendante. En notant  $u_n = \mathbb{E}(Z_n)$  la taille moyenne de la population à la génération  $n$ , on retrouve le modèle de croissance de Malthus :

$$u_{n+1} = m u_n, \quad \text{et donc} \quad u_n = u_0 m^n.$$

## Les différentes échelles de temps de l'évolution

Notons au passage que si l'on considère des générations de plus en plus courtes ou de plus en plus d'individus, le modèle en temps continu associé est le modèle exponentiel de Malthus, décrit par l'équation  $y' = (m - 1)y$ . Si  $m = 1$ , la taille moyenne  $u_n$  de la population reste donc constante, alors qu'on peut montrer que la population s'éteint en temps fini avec probabilité 1 dès lors que la variance de la loi de reproduction est non nulle. Ce phénomène est entièrement dû au fait que la variance de la taille de la population augmente au cours du temps, de sorte que  $Z_n$  finit par toucher 0 bien que  $\mathbb{E}[Z_n]$  reste constante. On peut également montrer que la population s'éteint presque-sûrement si  $m < 1$  et survit avec probabilité positive si  $m > 1$ . Lorsque  $m > 1$  la croissance de la taille de la population est décrite par la croissance moyenne  $m^n$ , ce que l'on peut établir grâce à un argument de martingale. La simplicité de ce modèle permet aussi d'obtenir des résultats numériques. Par exemple, puisque le nombre moyen de petits d'une baleine noire est actuellement estimé à 0,976 et que l'abondance des femelles était estimée à 150 en 1994, on peut montrer qu'il y a 99% de chances pour que ces baleines aient totalement disparu en 2389 (voir [HJV05]). Le comportement en temps long d'une population dont le nombre moyen de descendants est inférieur à un est donc évident. Toutefois des biologistes ont mis en évidence des phases de stabilité transitoire de la taille de la population avant son extinction. La compréhension de ces paliers de stabilité est obtenue en considérant la loi de la taille de la population conditionnellement à ce qu'elle soit non nulle aux instants d'observation. La limite en temps long de cette loi est appelée *limite de Yaglom*. Cette limite n'est pas une loi stationnaire pour le processus puisque celui-ci finira par atteindre 0, mais il s'agit d'une distribution dite *quasi-stationnaire*. La recherche de distributions quasi-stationnaires et l'étude de leurs propriétés font partie d'un champ de recherches qui se développe actuellement, cf. [MV12].

Dans le modèle de Galton-Watson, la loi de reproduction est fixée une fois pour toute. Mais au cours des saisons, des années et à plus forte raison sur des échelles de temps de plusieurs dizaines de générations, il est fort probable que cette loi va fluctuer (par exemple, sous l'effet de l'alternance d'hivers rudes et de printemps ensoleillés et humides, voir Figure 1). Une généralisation naturelle consiste alors à utiliser des lois de reproduction qui peuvent être différentes pour chaque génération. De surcroît, pour prévoir l'évolution de la population ou si l'on ne connaît pas explicitement l'environnement, on est amené à faire évoluer cette loi de reproduction elle-même de manière aléatoire. Cela définit les processus de Galton-Watson en environnement aléatoire, qui ont été introduits à la fin des années 60 [SW69]. A la stochasticité démographique liée aux reproductions de nos individus s'ajoute maintenant la stochasticité environnementale, ce qui n'est pas sans avoir de conséquence parfois contre-intuitive : notamment, la taille moyenne de la population peut tendre vers l'infini alors que la population s'éteint presque sûrement... Comprendre les effets des fluctuations aléatoires de l'environnement sur la survie et la croissance de la population amène de nombreux problèmes mathématiquement délicats. Ces questions sont liées à la manière dont les deux sources d'aléa (démographique et environnemental) influencent le processus :

Les différentes échelles de temps de l'évolution

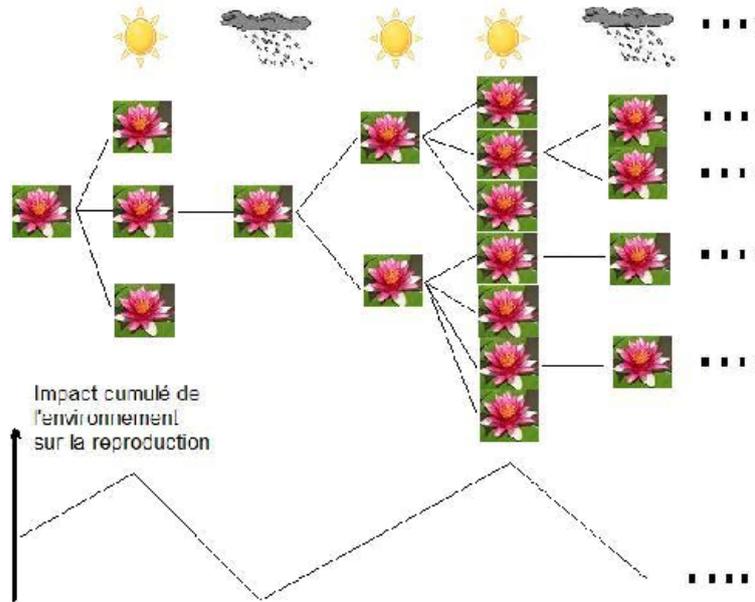


FIG. 1: Exemple de processus de Galton-Watson en environnement aléatoire. Ici les nénuphars se reproduisent en moyenne plus pendant les périodes ensoleillées que pendant les périodes de mauvais temps.

l'une prend parfois le pas sur l'autre [AG05], d'autres fois elles se combinent [BB09], faisant apparaître différents comportements asymptotiques.

Les modèles développés cherchent aussi à prendre en compte la variété des individus d'une population, que ce soit en termes de phénotype, génotype, âge, répartition spatiale, ... Pour conserver la propriété de branchement, on doit encore supposer que chaque individu se reproduit indépendamment des autres, mais à présent la loi de reproduction dépend du type de l'individu. Un individu de type  $i$  donnera ainsi naissance à un nombre moyen  $m_{ij} = \mathbb{E}(X_{i,j})$  d'individus de type  $j$ . La taille moyenne de la population à la génération  $n$  vaut alors  $\mathbb{E}(Z_n) = \mathbb{E}(Z_0)M^n$ , où  $M = (m_{ij})$  est la matrice des moyennes. Lorsque le nombre de types est fini et que la matrice  $M$  est fortement irréductible, les résultats concernant le comportement en temps long du processus multitype sont similaires au cas du processus de Galton-Watson, avec un taux de croissance donné par la valeur propre maximale de Perron-Frobenius de  $M$ . Lorsque le nombre de types est infini, déjà le comportement moyen du processus pose problème ( $M$  est alors un opérateur). Un cas finement étudié est celui où le type du descendant s'écrit comme le type du parent, plus un incrément d'une certaine loi  $\xi$ . Lorsqu'on suit une lignée de descendance, le type de l'individu rencontré à chaque génération suit donc une marche aléatoire de pas  $\xi$  et puisqu'on a à la fois repro-

## Les différentes échelles de temps de l'évolution

duction des individus et déplacement de la population dans l'espace des types, on parle de *marches aléatoires branchantes*. Le comportement asymptotique de la position de l'individu le plus éloigné de l'origine (i.e., la particule extrême) est décrit par les travaux de Hammersley, Kingman et Biggins et plus récemment ceux de Aidekon, Hu et Shi entres autres. En particulier, l'évolution de la distribution de cette position est donnée par l'équation aux dérivées partielles KPP (Kolmogorov-Petrovsky-Piskounov). Mais la modélisation en écologie pousse à considérer des cas plus complexes, où la propriété de branchement est mise en défaut. Par exemple, on peut s'intéresser à l'effet d'un milieu aléatoire (en temps ou en espace), qui donne lieu à des comportements surprenants tels que la possibilité de survivre pour la population globale alors que chaque phénotype s'éteindrait séparément. La prise en compte de l'effet d'une compétition entre les individus pousse aussi à s'intéresser au processus où l'on ne garde à chaque génération que les  $N$  individus extrêmes.

L'étude des processus à temps continu (qui permettent en particulier de rendre compte de phénomènes qui ne sont pas saisonniers, cycliques ou synchrones) s'est aussi largement développée et nous allons en détailler quelques exemples ci-dessous. Nous citerons en particulier les processus de branchement en temps continu, les processus de naissance et mort ou les modèles de coalescence qui décrivent les arbres généalogiques d'un échantillon d'individus. Tous ces modèles peuvent être obtenus comme limites d'échelles des processus à temps discret. En effet, lorsque le passage à la limite ne tue pas l'aléa démographique (par un phénomène de loi des grands nombres), les processus limites sont aléatoires, à temps et espace continus. Ils peuvent alors être décrits par une équation différentielle stochastique, ou un processus à valeurs mesures permettant de suivre l'évolution de différents types d'individus, ou encore des EDP stochastiques lorsque les types prennent leurs valeurs dans un continuum.

La majorité des processus précédents ne prennent pas en compte les interactions entre les individus. Ils bénéficient donc toujours de la propriété de branchement (qui se traduit sur la moyenne par une linéarité), utilisée de manière fondamentale dans leur étude mathématique. Or l'écologie cherche précisément à comprendre et modéliser ces interactions. Ainsi, si la limitation des ressources ne pose pas forcément de problème dans les premiers stades de développement d'une population, voire pour les questions de persistance sur des temps plus longs, à un moment ou à un autre elle modifie profondément la croissance de la population. Le processus stochastique correspondant doit donc aussi tenir compte de la mortalité due à la densité de la population. Les modèles classiques (celui de Verhulst, ou *équation logistique*) décrivent une telle dynamique en supposant que la taille  $n(t)$  de la population au temps  $t$  est solution de

$$n'(t) = n(t)(b - cn(t)).$$

Dans cette équation, le paramètre  $b$  décrit le taux de croissance *intrinsèque* de la population et  $c$  mesure la compétition entre deux individus pour le partage des ressources. Pour des temps  $t$  très grands, cette taille se stabilise en la valeur limite

## Les différentes échelles de temps de l'évolution

$b/c$ , appelée *capacité de charge* de l'environnement. Un autre modèle d'approximation en grande population, lorsqu'on souhaite prendre en compte les fluctuations aléatoires de la taille de la population, est la *diffusion de Feller logistique* décrite par l'équation

$$dX_t = \sqrt{\gamma X_t} dB_t + X_t(b - cX_t)dt.$$

Il est intéressant de souligner que ce processus atteint 0 (et donc la population s'éteint) en temps fini presque-sûrement. A nouveau, les modèles déterministes et probabilistes, même proches, se comportent différemment en temps long. Différentes échelles de temps apparaissent dans l'approximation déterministe des processus, qui peuvent être expliquées par des résultats de grandes déviations.

Si la population comporte des individus de plusieurs types, elle est alors décrite par un système d'équations. Par exemple, dans le modèle de proies-prédateurs introduit par Volterra, les nombres  $n_1(t)$  et  $n_2(t)$  de proies et de prédateurs au temps  $t$  satisfont le système d'équations :

$$\begin{cases} n_1'(t) = an_1(t) - bn_1(t)n_2(t) \\ n_2'(t) = -cn_2(t) + dn_1(t)n_2(t). \end{cases}$$

Cette dynamique montre un comportement cyclique : un nombre faible de proies entraîne le déclin de la population de prédateurs, qui à son tour permet au nombre de proies de réaugmenter, et ainsi de suite. Dans le cas d'un continuum de types (phénotypes, génotypes, positions spatiales dans  $\mathbb{R}$ ), l'analogue de ce système consiste en une équation aux dérivées partielles non linéaire. Ces modèles déterministes sont des modèles macroscopiques (autrement dit, ils considèrent le comportement moyen ou global d'un ensemble d'individus) et ne prennent pas en compte les comportements individuels, ni les naissances aléatoires d'individus mutants. S'ils apparaissent naturellement comme modèles limites lorsqu'on fait tendre la taille de la population vers l'infini, ils ne sont pas représentatifs des comportements des petites populations pour lesquels les fluctuations aléatoires sont une composante essentielle de l'évolution. Modéliser le comportement individuel par un processus stochastique, obtenir des résultats qualitatifs ou quantitatifs sur ces modèles, les comparer aux modèles déterministes en grande population ou en temps long, etc., font partie des enjeux majeurs des recherches actuelles.

### 3 Evolution génétique d'une population stable

Imaginons à présent que la population à laquelle on s'intéresse a vécu assez longtemps pour atteindre la capacité de charge de son environnement. Autrement dit, elle utilise les ressources à sa disposition de manière optimale et ne peut plus se développer au risque de surpeupler son habitat. C'est le cas de nombreuses espèces qui, au moins de manière transitoire, se trouvent dans une situation de quasi-équilibre démographique.

Les différentes échelles de temps de l'évolution

Même si la taille de la population n'évolue presque plus, il n'en est pas de même pour sa composition génétique : au fur et à mesure des générations, les individus transmettent tout ou une partie de leur patrimoine génétique à leurs enfants, créant ainsi des fluctuations dans les fréquences alléliques (i.e., des différentes versions d'un gène donné) simplement à cause de l'aléa des reproductions. Quantifier la taille et l'impact de ces fluctuations est une première question importante si l'on veut comprendre comment les différents allèles diffusent dans la population et savoir si un équilibre se forme au bout d'un certain temps. En outre, sur l'échelle de temps considérée (plusieurs centaines de générations), des *mutations* apparaissent régulièrement sur certains génomes et augmentent la diversité génétique de la population. A l'inverse, une pression de *sélection naturelle* octroyant un avantage reproductif aux porteurs de certains allèles tend à faire diminuer la diversité globale en privilégiant l'invasion de la population par certains gènes. Ces trois mécanismes (aléa reproductif, mutation et sélection) sont depuis longtemps considérés comme les forces majeures à l'oeuvre dans le maintien de la diversité génétique d'une population. Bien que plusieurs écoles se soient longtemps opposées au sujet de l'importance de chacun, la plupart des modèles actuels incluent ces trois ingrédients pour tenter d'en déterminer les effets combinés.

Le modèle le plus classique de *génétique des populations* est le *modèle de Wright-Fisher*. Il suppose que la population a une taille fixe  $N$ , que la population n'a pas de structure (au sens où chaque paire d'individus interagit avec la même fréquence) et que les individus ne portent qu'une seule copie de leur génome (ils sont *haploïdes*). Pour simplifier la description de ce modèle, supposons qu'on ne s'intéresse qu'à un seul gène ayant seulement deux allèles possibles,  $A$  et  $a$ . Le mécanisme d'évolution est le suivant : pour former la génération  $n + 1$ ,

- chaque individu de cette génération choisit un parent dans la génération précédente indépendamment des autres. Lors de ce choix, les parents potentiels d'allèle  $A$  reçoivent un poids  $1 + s$  tandis que les  $a$  reçoivent un poids 1. Autrement dit, si  $p(n)$  est la proportion d'individus  $A$  à la génération  $n$ , alors

$$\mathbb{P}[\text{parent choisi est } A] = \frac{(1 + s)p(n)}{(1 + s)p(n) + 1 - p(n)} = 1 - \mathbb{P}[\text{parent choisi est } a].$$

Ainsi, si  $s > 0$  les individus d'allèle  $A$  ont plus de chances d'être choisis comme parents, tandis que si  $s \in (-1, 0)$  ce sont les  $a$  qui sont avantagés. On appelle  $s$  le *coefficient de sélection* ;

- une fois son parent choisi, chaque individu de la génération  $n + 1$  hérite de l'allèle de son parent avec probabilité  $1 - \mu$  ou mute en l'autre allèle avec probabilité  $\mu$ . Les mutations peuvent bien sûr être rendues asymétriques en supposant que les individus de parent  $A$  (resp.,  $a$ ) mutent en l'autre type avec probabilité  $\mu_{Aa}$  (resp.,  $\mu_{aA}$ ).

Sous ce modèle simple, la suite  $(p(n))_{n \in \mathbb{N}}$  est une chaîne de Markov à valeurs dans  $\{0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \dots, 1\}$  dont on sait caractériser les équilibres possibles et la vitesse de convergence. Mais la combinatoire associée au calcul de la plupart des grandeurs d'intérêt est complexe et a tendance à masquer les éléments principaux de

## Les différentes échelles de temps de l'évolution

l'évolution. En outre, lorsque la population est très grande, d'une génération à la suivante les fluctuations de  $p(n)$  sont très faibles et il faut de l'ordre de  $N$  générations pour voir un changement appréciable. Ceci suggère de changer l'échelle de temps du processus, en considérant qu'une unité de temps correspond à  $N$  générations. En faisant l'hypothèse que les mutations et la pression de sélection ont un effet faible, on obtient alors que, lorsque la taille de la population est très grande, le processus  $p^N = (p(\lfloor Nt \rfloor))_{t \geq 0}$  est très proche de la solution de l'équation différentielle stochastique

$$dp_t = \{sp_t(1-p_t) + \mu_{aA}(1-p_t) - \mu_{aA}p_t\} dt + \sqrt{p_t(1-p_t)} dB_t.$$

Autrement dit, la sélection naturelle et les mutations induisent une tendance générale à augmenter ou à décroître (en fonction du signe de leur coefficient) pour la fréquence des  $A$ , tandis que les reproductions induisent un effet aléatoire de moyenne nulle et de variance proportionnelle à la fréquence des « rencontres » entre individus  $A$  et  $a$ . Bien qu'aucune population réelle ne soit de taille infinie, la théorie des équations différentielles stochastiques nous offre beaucoup plus d'outils pour étudier l'évolution dans le temps de cette fréquence et notamment obtenir la probabilité que l'allèle  $A$  envahisse la population (ou au contraire disparaisse), le temps à attendre avant cette *fixation* de l'un des allèles, les équilibres possibles lorsqu'il n'y a pas fixation, etc. On renvoie aux premiers chapitres de [Dur08] pour plus de détails et d'autres modèles. On notera ici que le changement de temps reflète bien le fait que l'évolution s'effectue sur des périodes très longues comparées à la durée d'une génération.

Tous les résultats mentionnés précédemment concernent les populations sans structure. Cependant, à l'échelle d'une espèce entière les individus sont souvent organisés en communautés, reliées entre elles par des migrations. Et à défaut de sous-populations clairement identifiables, il peut être important de tenir compte du fait que deux individus éloignés ont tendance à interagir beaucoup moins que ne le font deux voisins. Le modèle précédent doit alors être modifié en conséquence et des outils mathématiques plus complexes sont nécessaires pour prendre en compte le caractère local de l'évolution. C'est par exemple ce qui est fait dans le modèle *stepping-stone*, dans lequel les communautés se situent aux points d'un graphe  $G$  et les fréquences alléliques  $\{p_t^{(i)}\}_{t \geq 0}, i \in G\}$  sont couplées par un terme de migration :

$$dp_t^{(i)} = \sum_{j \in G} m_{ji}(p_t^{(j)} - p_t^{(i)}) dt + \sqrt{p_t^{(i)}(1-p_t^{(i)})} dB_t^{(i)}, \quad i \in G,$$

où  $m_{ji}$  décrit le flux de migrants partant de la communauté  $j$  vers la communauté  $i$  et les  $B^{(i)}$  sont des mouvements browniens indépendants. Bien que ce modèle soit assez ancien [KW64], des travaux récents sur les généalogies aléatoires engendrées par cette évolution ont permis de mieux comprendre la compétition entre migrations (qui assurent un certain *brassage génétique*) et reproductions locales (qui tendent à réduire la diversité génétique de chaque sous-population) et

Les différentes échelles de temps de l'évolution

ainsi de quantifier la vitesse à laquelle un gène peut se répandre dans la population globale en fonction de ces deux forces. On consultera par exemple [ABL12] et les références qui y sont citées.

Le cas où l'espace est continu pose des problèmes dès l'étape de modélisation : l'analogie sur  $\mathbb{R}^d$  du modèle stepping-stone auquel on pourrait penser est l'EDP stochastique

$$\frac{\partial p}{\partial t}(t, x) = \frac{1}{2} \Delta p(t, x) dt + \sqrt{p(t, x)(1 - p(t, x))} \dot{W}(t, x),$$

où  $W$  est appelé *bruit blanc gaussien*. Or cette équation n'a de solution qu'en dimension 1, tandis que la plupart des populations auxquelles on s'intéresse évolue dans un espace de dimension 2. Ce manque a récemment conduit à l'introduction d'un modèle appelé *processus  $\Lambda$ -Fleming-Viot spatial* [BEV10], dans lequel la dynamique est dictée par une suite aléatoire d'événements de reproduction touchant chacun une zone plus ou moins étendue de l'espace. L'état de la population à ce moment, décrit par une mesure aléatoire sur l'espace produit des positions spatiales et des types, n'est alors modifié que dans la région où l'événement se déroule. Grâce à ce modèle et à l'étude des arbres généalogiques qu'il génère, on a notamment pu décrire l'impact de catastrophes rares mais de grande ampleur sur la diversité génétique actuelle de la population [BEV12], ainsi que le front de propagation d'un allèle favorable qui envahit peu à peu l'espace [BE13]. Mais de nombreuses questions restent en suspens, parmi lesquelles l'influence de la propagation d'un gène favorisé par la sélection naturelle sur un gène neutre porté par le même chromosome, la forme de la diversité génétique laissée derrière elle par la colonisation rapide d'un nouveau territoire (on pensera notamment aux espèces invasives) ou encore l'impact précis d'un environnement inhomogène sur l'évolution génétique de la population.

Un effet particulièrement intéressant de ce dernier point est le phénomène de *clustering* (ou agrégation), par lequel la population tend d'elle-même à former des communautés d'individus proches génétiquement ou phénotypiquement (cf. Figure 2). Pour rappel, le phénotype d'un individu est l'ensemble des caractéristiques physiques correspondant à un gène ou un génome particulier. On peut par exemple s'intéresser à la longueur du bec d'un oiseau, qui va déterminer le type de graines qu'il pourra consommer, ou la couleur de son plumage qui influencera son pouvoir de séduction auprès des femelles. La fonction de traduction d'un génotype en phénotype est encore très loin d'être comprise, de sorte que pour modéliser la compétition entre les individus une autre possibilité est de se placer d'emblée au niveau des phénotypes et d'encoder la force de la compétition entre les individus à travers une fonction de *fitness* prenant en compte l'adaptation de l'individu à son environnement. Par exemple, on pourra faire dépendre la *fitness* associée à la longueur du bec de la taille moyenne des graines à disposition. De cette manière, on prend en compte l'*écologie* de l'espèce dans son évolution.

Grâce à ce type de modèles écologiques, on a pu mettre en évidence le phénomène de clustering observé dans la Figure 2. Dans [CM07], des simulations ont

## Les différentes échelles de temps de l'évolution

montré que sous certaines conditions, la population tendait à se regrouper en des communautés de taille moyenne et de phénotypes similaires qui semblent émaner d'un compromis entre une adaptation locale aux ressources et la tendance des individus à migrer pour explorer de nouveaux territoires où la compétition avec les autres serait moins sévère.

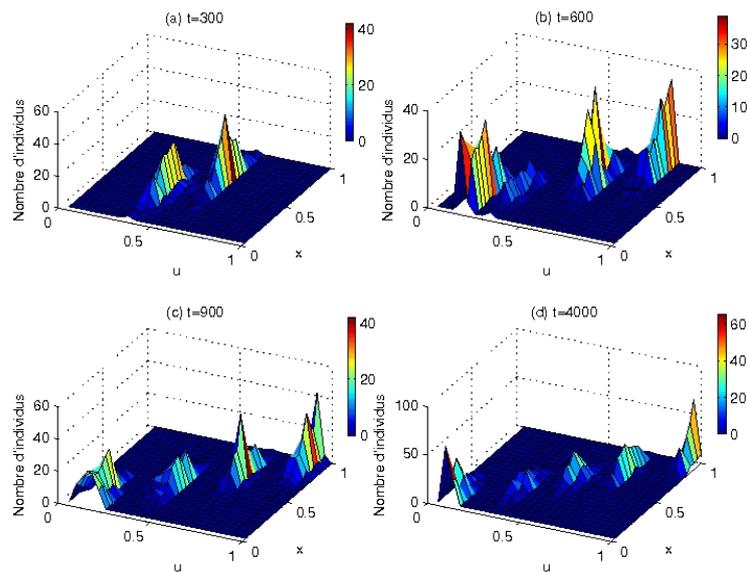


FIG. 2: Formation de *clusters* en espace (coordonnée  $x \in [0, 1]$ ) et en phénotype (coordonnée  $u \in [0, 1]$ ). Ici le phénotype optimal à la position  $x$  est  $u = x$ , de sorte qu'après un certain temps la population se concentre sur la diagonale. Plus étonnant, on observe des écarts manifestes entre des sous-populations au lieu d'une occupation de la diagonale dans son entier.

De nombreuses questions biologiques sont aussi liées au comportement spatial des populations : par exemple, les problèmes d'invasion ou de dispersion. En introduisant une donnée génétique dans le scénario de propagation des crapauds-buffles dans les champs de cannes à sucre, il a ainsi été possible d'expliquer pourquoi la vitesse du front d'invasion des crapauds augmentait [CM07].

## 4 Modèles de diversification des espèces

La notion d'espèce a longuement évolué, partant de critères exclusivement physiques (phénotypiques) jusqu'à être définie par l'incapacité à se reproduire avec des individus n'appartenant pas au même groupe. Au fil du temps, la formation et la disparition de nouvelles espèces a suscité de nombreuses théories, dont

---

## Les différentes échelles de temps de l'évolution

beaucoup nous semblent aujourd'hui fantaisistes bien qu'elles aient également contribué à une meilleure compréhension de l'évolution des espèces à une époque où la génétique n'existait pas. D'ailleurs, les prémices de l'étude moderne de la biodiversité n'ont pas attendu que nous puissions décortiquer nos gènes. Déjà Mauperthuis (1698-1759), mathématicien et naturaliste, soulignait l'apparition au hasard de mutants qui se développent et forment une nouvelle population : « Nous voyons paraître des races de chiens, de pigeons, de serins qui n'étaient point auparavant dans la nature. Ce n'ont été d'abord que des individus fortuits ; l'art et les générations répétées en ont fait des espèces ». Dans l'oeuvre de Lamarck (1744-1829), l'image linéaire de la grande chaîne des êtres est remplacée par un « arbre buissonnant ». Finalement, dans son fameux ouvrage *On the origin of species by natural selection*, Darwin (1809-1882) introduit l'idée de sélection naturelle et d'arbre des espèces, avec disparition de certaines espèces par sélection des plus adaptées et apparition de nouvelles, telles les différentes espèces de pinsons qu'il met en évidence sur les îles Galapagos.

Darwin, comme l'avait déjà fait Mauperthuis de son temps, insiste sur l'importance de l'aléatoire pour comprendre l'évolution des espèces. En effet, l'évolution a lieu grâce à la variabilité des paramètres génétiques, héritable en général mais qui peuvent également être soumis au hasard d'une mutation. Si l'environnement change, ce sont peut-être ces individus mutants qui seront mieux adaptés au nouvel environnement, au sens où leur probabilité de reproduction et de survie seront plus grandes. La sous-population issue de ces individus mutants pourra alors se développer plus vite que la population résidente. La sélection naturelle traduit la compétition des individus entre eux et des individus avec leur environnement qui va entraîner, sans événement ponctuel extérieur, l'émergence et la fixation des populations les mieux adaptées, à chaque instant. Ce raisonnement est fondamentalement aléatoire, au sens où un seul individu mutant, s'il est suffisamment favorable, va pouvoir être l'ancêtre d'une sous-population qui va se développer et peut-être envahir peu à peu tout l'espace, créant ainsi un saut évolutif.

Pour pouvoir intégrer ces événements au modèle, il est important de revenir à une description du comportement de chaque individu en prenant en compte ses propres caractéristiques. Les modèles probabilistes utilisés sont alors des généralisations des processus de branchement, centrés sur le comportement aléatoire des individus qui seront caractérisés, comme nous l'avons vu précédemment, par leur phénotype.

Reprenons l'exemple des oiseaux dont le phénotype observé est la longueur du bec. Appelons  $x$  ce caractère, qui varie par exemple dans  $[0, 4]$ . Nous allons décrire la dynamique individuelle de cette population d'oiseaux de la façon suivante. Supposons que le temps qu'un individu de type  $x$  met à se reproduire soit une variable aléatoire exponentielle de paramètre  $b(x)$ , par exemple  $b(x) = 4 - x$ . Le temps moyen pour que cet individu se reproduise est donc  $1/b(x)$ , de sorte qu'un grand individu dépensant beaucoup d'énergie à se nourrir en a moins pour se reproduire. A chaque naissance, l'individu crée un clone de même type  $x$ , mais

## Les différentes échelles de temps de l'évolution

il arrive que son descendant mute en un individu de type  $y$  (choisi aléatoirement suivant une loi normale centrée sur  $x$ ), qui va se reproduire et créer ensuite sa propre descendance de type  $y$ . Les mutations introduisent ainsi de la variabilité génétique. Pour finir, supposons que le taux auquel un individu meurt dépend de ses propres paramètres génétiques (ici  $x$ ), mais aussi de la compétition pour les ressources qu'il subit de la part de ses congénères. Ainsi, si un individu est de type  $y > x$ , il consommera plus de ressources que celui de trait  $x$ , qui va donc voir ses possibilités de survie s'amoinrir. La sélection naturelle qui doit permettre à la population de s'adapter est donc confrontée à un compromis (ou « trade-off ») entre le fait de favoriser les petits individus pour accroître leur capacité de reproduction et de favoriser les grands individus pour leur permettre d'être plus forts dans la compétition pour les ressources. C'est ce type d'optimisation évolutive que les mathématiciens étudient, dans des échelles de temps et d'espaces propres aux biologistes et à la base de la théorie biologiste de la dynamique adaptative. (Voir [CFM06], [CM11]).

Dans certains cas, la population peut avoir tendance à optimiser sa survie en créant une scission en deux sous-populations caractérisées par des phénotypes très différents. Par exemple, chacune des deux sous-populations sera spécialisée dans la consommation d'une ressource différente. Dans ce cas, les populations vont pouvoir devenir si différentes qu'elles ne vont plus interférer, ni pour le partage des ressources, ni pour la reproduction (pour des populations sexuées). On observe alors un *branchement évolutif* qui va conduire à la création de deux espèces distinctes. Bien évidemment, le nombre de changements menant à la divergence de deux populations est tel qu'il implique souvent des échelles de temps extrêmement longues. La Figure 3 montre des simulations de l'évolution des phénotypes pour le modèle décrit ci-dessus. Celles-ci mettent en évidence l'apparition d'une diversification des espèces. Le temps de spéciation est appelé *point de branchement évolutif*.

Ainsi, les modèles stochastiques individu-centrés sont très adaptés pour prouver par des théorèmes mathématiques rigoureux l'apparition de paliers évolutifs et d'espèces nouvelles et pour mieux comprendre les échelles évolutives et le comportement qualitatif des populations étudiées.

Cependant, pour répondre à des questions plus quantitatives, il est souvent nécessaire de revenir vers des modèles plus simples afin de mettre au point des méthodes statistiques aussi robustes que possible. Cette approche statistique est essentielle pour essayer d'estimer les paramètres de ces modèles à partir d'observations et de quantifier les phénomènes décrits. Le type de questions auxquelles on tente alors de répondre incluent :

- Depuis combien de temps deux espèces ont-elles divergé ?
- Peut-on estimer le taux de spéciation et d'extinction d'un groupe d'espèces ?
- Ceux-ci sont-ils constants au cours du temps, ou y a-t-il eu des périodes d'événements en cascade tels que des extinctions massives (durant les périodes glaciaires, par exemple) ou au contraire des épisodes de *radiation adaptative* (i.e., un groupe d'espèces se développant très rapidement, par exemple lors de la

Les différentes échelles de temps de l'évolution

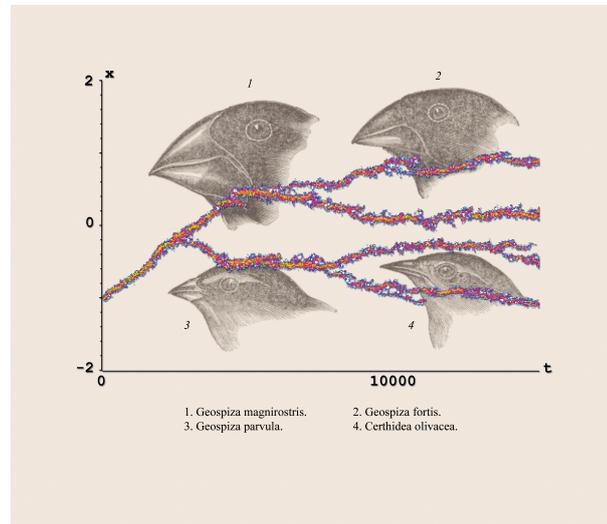


FIG. 3: Un exemple de branchement évolutif, dans lequel on observe à plusieurs reprises la formation de deux populations de phénotypes différents à partir d'une même « population-mère ».

recolonisation des continents par les rongeurs qui suivit la disparition des dinosaures) ?

- Comment peut-on expliquer que les taux de diversification soient plus élevés sous les tropiques que dans les zones tempérées ?

Les modèles utilisés pour répondre quantitativement à ces questions et en donner une approche statistique, décrivent la dynamique de population au moyen d'un processus appelé *processus de naissance et mort*. Dans ce modèle, chaque espèce « branche » en deux espèces distinctes à un taux (une vitesse) qui peut être identique pour toutes les espèces, ou alors dépendre de certains caractères phénotypiques ou encore de l'environnement. De même, chaque espèce s'éteint à un certain taux. Ainsi, le nombre d'espèces fluctue au cours du temps et celles en vie à un temps donné sont reliées entre elles par un *arbre phylogénétique* qui décrit en quelque sorte leurs liens « généalogiques ». On pourra consulter [Fel04] pour plus de détails sur la reconstruction des arbres phylogénétiques.

La Figure 4 (cf. [MW09]) montre la reconstruction de l'arbre phylogénétique reliant une centaine d'espèces de grenouilles. Chaque couleur met en valeur un groupe (une *clade*) d'espèces plus proches entre elles que des autres espèces. On suit alors les modifications de la longueur du corps de chaque espèce de grenouille, en supposant que celle-ci évolue le long de chaque branche de l'arbre suivant un mouvement brownien de variance  $\sigma^2$  indépendant des autres branches. En se basant sur ce modèle, Moen et Wiens ont ainsi pu mettre en avant une variabilité (i.e., un écart-type) et une vitesse d'évolution très différentes entre les

## Les différentes échelles de temps de l'évolution

clades. Ces différences ont-elles un impact sur les taux de spéciation ou d'extinction à l'intérieur de chaque clade ? Ont-elles permis voire accéléré l'invasion de l'habitat des grenouilles *Lophiohylini* par les *Osteopilus* ?

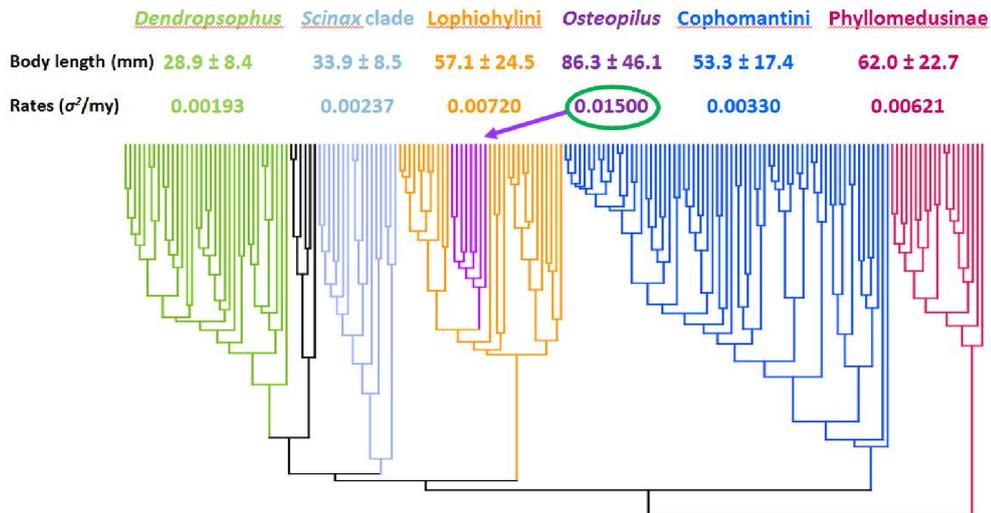


FIG. 4: Arbre phylogénétique d'une centaine d'espèces de grenouilles arboricoles des Caraïbes. La première ligne donne le nom des *clades*, la seconde la taille du corps moyenne et l'écart-type à l'intérieur de chaque groupe et la troisième ligne donne une estimation de la vitesse d'évolution de cette caractéristique pour chaque clade (modifié à partir de [MW09]).

**Remarque 1.** Dans cet arbre ne sont représentées que les espèces encore en vie aujourd'hui, mais il est très probable que de nombreuses espèces soient apparues dans le passé et aient disparu avant que nous ne puissions les observer.

Les réponses aux questions mentionnées ci-dessus permettent de mieux comprendre les mécanismes qui régissent l'évolution de la biodiversité et de prévoir quel sera l'impact de certains changements (apparition d'une espèce mieux adaptée, fractionnement de l'habitat, disparition d'une espèce ou d'une ressource, perturbation de l'environnement...) sur le fonctionnement des écosystèmes. Elles nécessitent à la fois l'approfondissement des résultats déjà obtenus (notamment sur les processus de naissance et mort, multitypes ou de coalescents...) mais également l'introduction et l'étude de nouveaux modèles prenant en compte les interactions entre les espèces, quasiment absentes des travaux de recherches déjà menés, les fluctuations de l'environnement dans lequel elles évoluent ou encore l'influence d'une structure spatiale sur l'évolution des relations entre espèces.

**Remerciements** : Les auteurs souhaitent remercier Hélène Leman pour les simulations de la Figure 2, Nicolas Champagnat pour les simulations de la figure 3 et Daniel Moen pour la reconstruction d'arbre phylogénétique de la Figure 4.

## Bibliographie

- [AG05] V.I. Afanasyev, J. Geiger, G. Kersting et V.A. Vatutin (2005). Criticality for branching processes in random environment. *Ann. Probab.*, 33 :645–673.
- [ABL12] O. Angel, N. Berestycki et V. Limic (2012). Global divergence of spatial coalescents. *Probab. Theory Relat. Fields*, 152 :625–679.
- [BB09] V. Bansaye et J. Berestycki (2009). Large deviations for branching processes in random environment. *Markov Process. Related Fields*, 15 :493–524.
- [BE13] N.H. Barton, A.M. Etheridge, J. Kelleher et A. V eber (2013). Genetic hitchhiking in spatially extended populations. *Theor. Pop. Biol.*, Online First.
- [BEV10] N.H. Barton, A.M. Etheridge et A. V eber (2010). A new model for evolution in a spatial continuum. *Electron. J. Probab.*, 15 :162–216.
- [BEV12] N. Berestycki, A.M. Etheridge et A. V eber (2012). Large scale behaviour of the spatial  $\Lambda$ -Fleming-Viot process. A paraître dans *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*
- [CFM06] N. Champagnat, R. Ferriere, and S. M el eard. Unifying evolutionary dynamics : From individual stochastic processes to macroscopic evolution. *Theor. Pop. Biol.*, 69 :297–321, 2006.
- [CM07] N. Champagnat et S. M el eard (2007). Invasion and adaptive evolution for individual-based spatially structured populations. *J. Math. Biol.* 55 :147–188.
- [CM11] Champagnat, N. ; M el eard, S. : Polymorphic evolution sequence and evolutionary branching, *Probability Theory and Related Fields* 151, 45–94 (2011).
- [Dur08] R. Durrett (2008). *Probability models for DNA sequence evolution*. Springer, 2nde  dition.
- [Fel04] J. Felsenstein (2004). *Inferring phylogenies*. Sinauer.
- [HJV05] P. Haccou, P. Jagers, V.A. Vatutin. *Branching Processes : Variation, growth and extinction of populations*, Cambridge University Press, 2005.
- [KW64] M. Kimura et G.H. Weiss (1964). The stepping stone model of population structure and the decrease of genetic correlation with distance. *Genetics*, 49 :561–576.
- [MV12] S. M el eard et D. Villemonais (2012). Quasi-stationary distributions and population processes. *Pr epublication*, <http://arxiv.org/abs/1112.4732>.

### Les différentes échelles de temps de l'évolution

---

- [MW09] D.S. Moen et J.J. Wiens (2009). Phylogenetic evidence for competitively driven divergence : body-size evolution in Caribbean treefrogs. *Evolution*, 63 :195–214.
- [Mur02] J.D. Murray (2002). *Mathematical Biology : I. An introduction*. Springer, 3ème édition.
- [SW69] W.L. Smith et W.E. Wilkinson (1969). On branching processes in random environments. *Ann. Math. Statist.*, 40 :814–827.

## Modélisation et simulation des avalanches de neige

par Caterina Calgaro<sup>1</sup>, Emmanuel Creusé<sup>1</sup> et Thierry Goudon<sup>2</sup>

### Résumé

Une avalanche de neige peut être vue comme l’écoulement d’un mélange complexe où les contrastes de densité jouent un rôle majeur sur le déplacement. Les équations aux dérivées partielles correspondantes, qui apparaissent comme des variantes des équations de Navier-Stokes, conduisent à des questions nouvelles, tant pour l’analyse que pour la simulation numérique.

## 1 Introduction

Les avalanches de neige peuvent se révéler très destructrices, voire mortelles. Le risque d’avalanches ne dépend pas seulement de la hauteur du manteau neigeux. Beaucoup d’autres phénomènes interviennent : la densité de la neige, l’évolution liée à la température, le vent, les instabilités dans la couche neigeuse provoquées par exemple par les skieurs, etc... L’implantation de murs paravalanches et leur calibrage peuvent permettre la prévention des dommages aux biens et aux personnes. Afin d’optimiser ces dispositifs de protection, des expériences peuvent être menées en laboratoire (voir le site de l’IRSTEA [1]). Les résultats expérimentaux peuvent être confrontés aux prévisions produites par des modèles mathématiques d’avalanches qui permettent d’estimer la vitesse de propagation des fronts d’avalanches, leur hauteur ou la longueur du phénomène [8, 27]. Mais le vocable “avalanche” peut recouvrir des phénomènes physiques très différents, et des écoulements de nature très variées, qui font donc appel à des modélisations de natures sensiblement différentes [5, 27]. Rechercher des modèles plus réalistes et concevoir des méthodes de simulation numérique spécifiques constituent aujourd’hui un véritable défi.

## 2 Modélisation d’un mélange

Dans ce qui suit nous allons nous intéresser à des modèles pour les avalanches de neige poudreuse (ou “en aérosol”). La description qui en est faite rejoint la théorie des mélanges. On suppose que le mélange est ici composé d’un fluide dense

<sup>1</sup>Université Lille 1 - Laboratoire Paul Painlevé and E.P.I. SIMPAF - INRIA Lille Nord Europe, Cité scientifique, 59655 Villeneuve d’Ascq Cedex, France. [caterina.calgaro@math.univ-lille1.fr](mailto:caterina.calgaro@math.univ-lille1.fr), [emmanuel.creuse@math.univ-lille1.fr](mailto:emmanuel.creuse@math.univ-lille1.fr)

<sup>2</sup>E.P.I. COFFEE - INRIA Sophia Antipolis Méditerranée et Laboratoire J.A.Dieudonné, UMR 6621, CNRS, Université de Nice Sophia Antipolis, 2004 route des Lucioles, BP93 06902 Sophia Antipolis Cedex, France. [thierry.goudon@inria.fr](mailto:thierry.goudon@inria.fr)

## Modélisation et simulation des avalanches de neige

(le manteau neigeux) et d'un fluide léger (l'air). On ne cherche pas à ce que les équations décrivent les détails à l'échelle des cristaux de neige, mais elles doivent simplement rendre compte du comportement moyen de l'écoulement des deux fluides en interaction. On note  $\bar{\rho}_1$  la densité de la neige et  $\bar{\rho}_2$  la densité de l'air, qui sont des constantes strictement positives. On considère aussi les champs de vitesse de chaque composant, notés respectivement  $u_1(t, x)$  et  $u_2(t, x) \in \mathbb{R}^N$ , fonctions du temps  $t \geq 0$  et de la position  $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$ , avec  $N=2$  ou  $3$ . On peut alors définir la fraction volumique  $\phi(t, x) \in [0, 1]$  qui décrit le mélange des deux fluides :

$$\phi(t, x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{Volume occupé au temps } t \text{ par l'air dans } B(x, r)}{|B(x, r)|},$$

où  $B(x, r)$  est la boule de centre  $x$  et de rayon  $r$  et  $|B(x, r)|$  sa mesure.

Si on suppose que chaque phase est incompressible, la densité  $\rho$  du mélange est alors définie par :

$$\rho(t, x) = \underbrace{\bar{\rho}_1(1 - \phi(t, x))}_{:=\rho_1(t, x)} + \underbrace{\bar{\rho}_2\phi(t, x)}_{:=\rho_2(t, x)} = \bar{\rho}_1 + (\bar{\rho}_2 - \bar{\rho}_1)\phi(t, x). \quad (1)$$

L'équation de conservation de la masse pour chacun de deux fluides s'écrit simplement :

$$\partial_t \rho_1 + \nabla_x \cdot (\rho_1 u_1) = 0 = \partial_t \rho_2 + \nabla_x \cdot (\rho_2 u_2), \quad (2)$$

où  $\partial_t$  et  $\nabla_x \cdot$  sont respectivement la dérivée partielle par rapport au temps et l'opérateur divergence en espace. En définissant la *vitesse massique moyenne*  $u(t, x) \in \mathbb{R}^N$  par

$$\rho u(t, x) = (\rho_1 u_1 + \rho_2 u_2)(t, x),$$

on trouve immédiatement l'équation de conservation de la masse pour le mélange décrit par la densité  $\rho(t, x) \in \mathbb{R}_+^*$  :

$$\partial_t \rho + \nabla_x \cdot (\rho u) = 0. \quad (3)$$

En définissant maintenant la *vitesse volumique moyenne*  $v(t, x) \in \mathbb{R}^N$  par

$$v(t, x) = (1 - \phi(t, x))u_1(t, x) + \phi(t, x)u_2(t, x), \quad (4)$$

et en utilisant (4), (1) et (2), on montre que  $v$  est solénoïdale :

$$\nabla_x \cdot v = \nabla_x \cdot \left( \frac{\rho_1 u_1}{\bar{\rho}_1} + \frac{\rho_2 u_2}{\bar{\rho}_2} \right) = -\partial_t \left( \frac{\rho_1}{\bar{\rho}_1} + \frac{\rho_2}{\bar{\rho}_2} \right) = -\partial_t(1 - \phi + \phi) = 0.$$

La conservation de la quantité de mouvement donne une équation d'évolution pour  $\rho u$  :

$$\partial_t(\rho u) + \text{Div}_x(\rho u \otimes u) + \nabla_x p = \rho g + \text{Div}_x(2\mu(\rho)\mathbb{D}(u)), \quad (5)$$

Modélisation et simulation des avalanches de neige

avec  $\mathbb{D}(u) = \frac{1}{2}(\nabla_x u + \nabla_x u^T)$  le tenseur des contraintes. Dans (5),  $g$  est le vecteur accélération de gravité et  $\mu(\rho)$  représente la viscosité dynamique du fluide (qui peut donc varier suivant la composition locale du mélange). Étant donnés les vecteurs  $u$  et  $v$ , on pose  $u \otimes v$  la matrice  $N \times N$  de composantes  $u_i v_j$  ; étant donnée la fonction matricielle  $A$ , on note  $\text{Div}_x A$  le vecteur de composantes  $\sum_{j=1}^N \partial_{x_j} A_{ij}$ .

La dernière variable physique, correspondant à la pression  $p(t, x) \in \mathbb{R}$ , est associée à une contrainte satisfaite par la divergence de la vitesse massique  $u$ . Dans le modèle de mélange qui nous intéresse, cette contrainte relie la divergence du champ de vitesses à des dérivées de la densité

$$\nabla_x \cdot u = -\nabla_x \cdot (\kappa \nabla_x \ln(\rho)), \tag{6}$$

où  $\kappa$  est un coefficient de diffusion positif, homogène à une viscosité cinématique.

Si  $\kappa = 0$  le système (3)–(5)–(6) n’est rien d’autre que le système de Navier-Stokes incompressible à densité variable, qui décrit l’évolution de deux fluides immiscibles. De plus, si à  $t = 0$  on a un seul fluide de densité homogène ( $\rho(0, x) = \bar{\rho} > 0$ ), (3) se réduit à une équation de transport associée à la vitesse  $u$ . La méthode des caractéristiques donne alors  $\rho(t, x) = \bar{\rho}$  pour tout  $t > 0$ . Les équations de Navier-Stokes homogènes ont motivé beaucoup de travaux théoriques et numériques (voir par exemple les livres de R. Temam [30], V. Girault–P.-A. Raviart [22] et J.-Y. Chemin [15]). Les fluides non homogènes mais incompressibles demandent une analyse plus fine pour montrer le caractère bien posé du problème (voir le livre de P.-L. Lions [26] ou [16]) et présentent aussi des difficultés numériques spécifiques (voir nos premiers travaux [12, 13] et leurs références).

Si  $\kappa > 0$  la relation de fermeture (6) est censée rendre compte de phénomènes de diffusion aux interfaces entre les différents constituants du mélange. Une telle relation a été introduite par D. Graffi [23], puis reprise par A. Kazhikhov, S. Smagulov [24] et F. Franchi, B. Straughan [21] afin de modéliser les écoulements dans lesquels certaines espèces (comme le sel ou un polluant) sont dissoutes dans un fluide compressible ou incompressible. Les questions d’existence et d’unicité du modèle (3)–(5)–(6) ont été étudiées par S. Antontsev, A. Kazhikhov, V. Monakhov [7], B. Da Veiga [9] et P. Secchi [28, 29]. Plus récemment, l’analyse a été complétée par D. Bresch H. El Essoufi et M. Sy dans [11], où des estimations d’énergie sont établies en supposant une relation particulière entre la viscosité  $\mu(\rho)$  et le coefficient de diffusion  $\kappa$ . Ce modèle ressemble par plusieurs aspects aux modèles “zéro-Mach” issus de la théorie de la combustion (voir les thèses de G. Ansanay-Alex [6] et X. Liao [25] et leurs références) : dans les régimes à faible Mach, le logarithme dans (6) est remplacé par une autre fonction de la densité. Ici, la mise en équations repose sur la distinction entre vitesses moyennes volumique et massique, un point de vue qui a été largement exploré par H. Brenner [10] et qui peut conduire à des systèmes d’équations ayant des structures remarquables [20]. Appliquer le modèle de Kazhikov–Smagulov à la description des avalanches poudreuse a été proposé par J. Etienne et P. Saramito [18, 19] et repris

## Modélisation et simulation des avalanches de neige

par C. Acary-Robert, D. Bresch et D. Dutykh [17, 4], puis dans [14], avec des stratégies numériques différentes.

Au lieu de travailler avec la vitesse massique moyenne  $u(t, x)$ , il peut être comode de travailler avec la vitesse volumique moyenne  $v(t, x)$  qui vérifie

$$\nabla_x \cdot v = 0, \quad (7)$$

alors que (6) peut s’exprimer sous la forme

$$u = v - \kappa \nabla_x \ln(\rho).$$

La conservation de la masse (3) devient alors une équation de convection–diffusion

$$\partial_t \rho + \nabla_x \cdot (v\rho) = \kappa \Delta_x \rho, \quad (8)$$

avec  $\Delta_x$  l’opérateur de Laplace  $\sum_{j=1}^N \partial_{x_j}^2$ . Pour l’équation de conservation de la quantité de mouvement (5), en développant les termes en  $u$  par rapport à la vitesse volumique  $v$ , on arrive à l’équation

$$\begin{aligned} \rho(\partial_t v + (v \cdot \nabla_x)v) + \nabla_x p = & \rho g + \text{Div}_x(2\mu(\rho)\mathbb{D}(v)) \\ & + \kappa(\nabla_x v - \nabla_x v^T)\nabla_x \rho \\ & + \kappa^2 \left( \nabla_x \Delta_x \rho - \text{Div}_x \left( \frac{\nabla_x \rho \otimes \nabla_x \rho}{\rho} \right) \right) \\ & - \kappa \text{Div}_x(\mu(\rho)D_x^2 \ln(\rho)). \end{aligned} \quad (9)$$

Le nouveau système (8)–(9)–(7) est équivalent au système de départ (3)–(5)–(6). Cependant, cette reformulation fait apparaître des termes d’ordre supérieur dans les équations (8) et surtout (9). On peut alors discuter certaines mises à l’échelle du problème qui permettent de dessiner une hiérarchie de modèles, plus ou moins complexes. Dans cette hiérarchie nous allons nous intéresser au cas où seuls les termes d’ordre un en la densité sont retenus et (9) est remplacée par :

$$\rho(\partial_t v + (v \cdot \nabla_x)v) + \nabla_x p = \rho g + \text{Div}_x(2\mu(\rho)\mathbb{D}(v)) + \kappa(\nabla_x v - \nabla_x v^T)\nabla_x \rho. \quad (10)$$

### 3 Schéma Numérique

J. Etienne, P. Saramito et E. Hopfinger [19, 18] ont proposé et mis en œuvre des schémas numériques pour simuler de tels modèles (plus précisément une variante où l’équation sur la densité est remplacée par une équation sur la fraction volumique  $\Phi$ ) et représenter des avalanches de neige poudreuse à forts ratio de densité (de l’ordre de 20). Leur approche combine une méthode des caractéristiques avec une discrétisation spatiale par éléments finis exploitant le code `rheolef` [2]. Le raffinement adaptatif du maillage permet de suivre la propagation du front de l’avalanche. Une autre expérimentation numérique, développée

Modélisation et simulation des avalanches de neige

sous le logiciel `openfoam` [3] est due à C. Acary-Robert, D. Bresch et D. Dutykh [17], qui se sont intéressés particulièrement à l’impact du front de l’avalanche sur un mur paravalanches.

Dans [14], nous avons proposé d’adapter un schéma hybride volumes finis/éléments finis, conçu initialement pour des écoulements incompressibles [13, 12]. On considère le système (8)–(10)–(7), en dimension 2, auquel on adjoint des conditions aux limites de Dirichlet homogènes pour la vitesse ( $v = 0$  sur  $\partial\Omega$ ) et des conditions aux limites de Neumann homogènes sur la densité ( $\nabla\rho \cdot n = 0$  sur  $\partial\Omega$  où  $n$  est la normale sortante à  $\Omega$ ). Le maillage du domaine de calcul est constitué de triangles, en considérant  $\Omega$  polygonal. Etant donné  $\Delta t > 0$ , on note  $v_h^n, p_h^n, \rho_h^n$  les approximations numériques de la vitesse, de la pression et de la densité au temps  $t_n = n \Delta t$ . Vitesse et pression approchées sont construites comme des fonctions continues, dont la restriction à chaque triangle  $T_i$  est polynomiale (de degré deux et un, respectivement). On associe au maillage initial un maillage dual dont les éléments sont des volumes de contrôle pour évaluer la densité, voir la Figure 1, où le volume  $C_i$  entoure le noeud  $A_i$ .

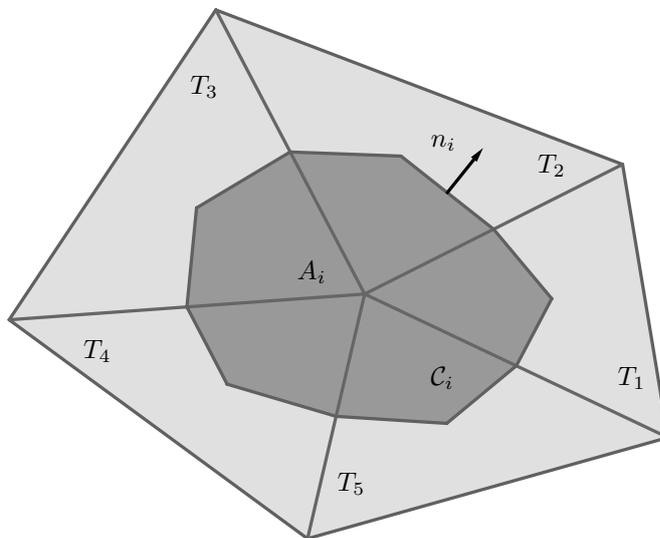


FIG. 1: Maillage primal et maillage dual.

L’idée de base du schéma numérique consiste en un `splitting` en temps dont on

## Modélisation et simulation des avalanches de neige

décrit ici la version la plus simple. En supposant connus  $v_h^n$  et  $\rho_h^n$ , on procède de la façon suivante :

- On calcule les composantes  $\rho_i^{n+1}$  de  $\rho_h^{n+1}$  par la résolution numérique de (8) en utilisant une méthode de volumes finis "vertex-based" :

$$\text{aire}(\mathcal{C}_i) \frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\Delta t} + \sum_{T_j, A_i \in T_j} \underbrace{\int_{T_j \cap \partial \mathcal{C}_i} \rho_h^{n,*} v_h^{n,*} \cdot n_i \, d\sigma}_{F_{i,j}^c} = \kappa \sum_{T_j, A_i \in T_j} \int_{T_j \cap \partial \mathcal{C}_i} \nabla \rho_h^n \cdot n_i \, d\sigma.$$

Une attention toute particulière doit être portée sur la manière d'évaluer les flux convectifs  $F_{i,j}^c$ . D'une part, la valeur de la vitesse  $v_h^{n,*}$ , déduite de celle de  $v_h^n$ , doit permettre à la méthode d'être consistante, en préservant notamment les états constants de densité. D'autre part, la manière d'évaluer la densité à l'interface  $\rho_h^{n,*}$  à partir de  $\rho_h^n$  doit être effectuée judicieusement, de manière à assurer une précision élevée en espace tout en garantissant un principe du maximum discret nécessaire lorsque les plus forts ratio de densité en jeu dans le modèle sont très élevés, pourvu qu'un pas de temps  $\Delta t$  suffisamment petit soit utilisé.

- On calcule ensuite la valeur du couple  $(v_h^{n+1}, p_h^{n+1})$  par résolution de la formulation faible associée aux équations (10) et (7). On notant  $V_h$  et  $Q_h$  les espaces d'approximation pour la vitesse et la pression, on cherche (dans la version élémentaire du schéma)  $(v_h^{n+1}, p_h^{n+1}) \in V_h \times Q_h$  tels que pour tous  $(w_h, q_h) \in V_h \times Q_h$  on ait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \left\{ \rho_h^{n+1} \left( \frac{v_h^{n+1} - v_h^n}{\Delta t} + (v_h^n \cdot \nabla_x) v_h^{n+1} \right) w_h - p_h^{n+1} \nabla_x \cdot w_h \right\} dx = \\ \int_{\Omega} \left\{ \rho_h^{n+1} g w_h - 2\mu(\rho_h^{n+1}) \mathbb{D}(v_h^{n+1}) \cdot \mathbb{D}(w_h) + \kappa(\nabla_x v_h^{n+1} - (\nabla_x v_h^{n+1})^T) \nabla_x \rho_h^{n+1} w_h \right\} dx, \\ \int_{\Omega} \nabla_x \cdot v_h^{n+1} q_h \, dx = 0. \end{array} \right. \quad (11)$$

Le système (11) correspond à la résolution numérique d'un problème de type point selle, dont le caractère bien posé repose sur une relation de compatibilité entre les espaces discrets des champs de vitesse  $V_h$  et de pression  $Q_h$ .

Concernant l'intégration en temps, la version utilisée est en réalité un peu plus sophistiquée, afin d'assurer un ordre de convergence plus élevé.

## 4 Simulation de l'avalanche

Pour réaliser les simulations, on travaille avec une forme adimensionnelle du problème. On note  $U$  une vitesse caractéristique du phénomène,  $L$  une longueur

## Modélisation et simulation des avalanches de neige

caractéristique,  $\nu$  une viscosité cinématique caractéristique (égale à  $\tilde{\mu}/\rho_{ref}$  avec  $\rho_{ref}$  une densité de référence), et on rappelle que  $g$  est la valeur du champ de gravité. On supposera que  $\kappa = 2\nu$ . On observe alors que la dynamique de l'écoulement est pilotée par les nombres de Reynolds  $Re$  et de Froude  $Fr$

$$Re = \frac{UL}{2\nu}, \quad Fr = \frac{U}{\sqrt{\|g\|L}}.$$

Le premier mesure l'importance relative entre les mécanismes de diffusion et de convection, tandis que le second mesure celle entre les forces d'inertie et celles de gravité. Les avalanches réelles mettent en jeu des  $Re$  de l'ordre de  $10^8$  et des  $Fr$  de l'ordre de 1. Ces valeurs demeurent pour le moment encore hors d'atteinte des simulations numériques directes ; plus  $Re$  est grand et/ou  $Fr$  petit, plus la simulation numérique s'avère difficile. Néanmoins, on peut simuler des écoulements de laboratoire où  $Re$  est de l'ordre de  $10^4$  et  $Fr$  de l'ordre de 1 et les résultats donnent des informations qualitatives pertinentes.

La simulation représentée sur les Figures 2 et 3, qui reprend un exemple de [17], correspond à une avalanche de neige poudreuse de densité  $20 \text{ kg/m}^3$ , de viscosité cinématique  $4.8 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$  et de hauteur initiale  $0.3 \text{ m}$  qui dévale une pente de 32 degrés sur une durée de 1 s. Durant sa chute, l'avalanche entre en collision avec un mur. L'adimensionnement du système donne un Reynolds de l'ordre de  $10^3$  et un Froude de l'ordre de 1.8. Une procédure de maillage adaptatif permet de mailler dynamiquement les régions à forts gradients de densité. Au cours de l'évolution, on distingue clairement la formation d'instabilités de type Kelvin-Helmholtz, ainsi qu'un large tourbillon derrière le front de l'avalanche, au dessus d'une zone à faible densité où le fluide est entraîné par l'avalanche. L'interaction avec l'obstacle génère alors un jet en amont, et une forme de champignon correspondant à une instabilité de type Rayleigh-Taylor. On remarque également, comme il a déjà été reporté dans de nombreuses études expérimentales et numériques, que la vitesse maximale de l'avalanche se situe au cœur de celle-ci et dépasse la vitesse du front d'une valeur de l'ordre de 30 à 40%.

Comme on l'a dit les paramètres physiques des avalanches naturelles sont encore hors de portée des moyens de calcul par simulation directe. On peut cependant améliorer les modèles et les schémas par une confrontation avec l'expérience dont les conditions sont moins exigeantes. Les conclusions tirées en exploitant des systèmes du type Kazhikov-Smagulov, avec des méthodes numériques complémentaires, sont tout à fait encourageantes. En pratique une difficulté importante provient du manque d'informations sur les valeurs de certains paramètres (viscosité du mélange, coefficient de frottement...). Aller plus loin reposera sur une coopération pluri-disciplinaire.

Modélisation et simulation des avalanches de neige

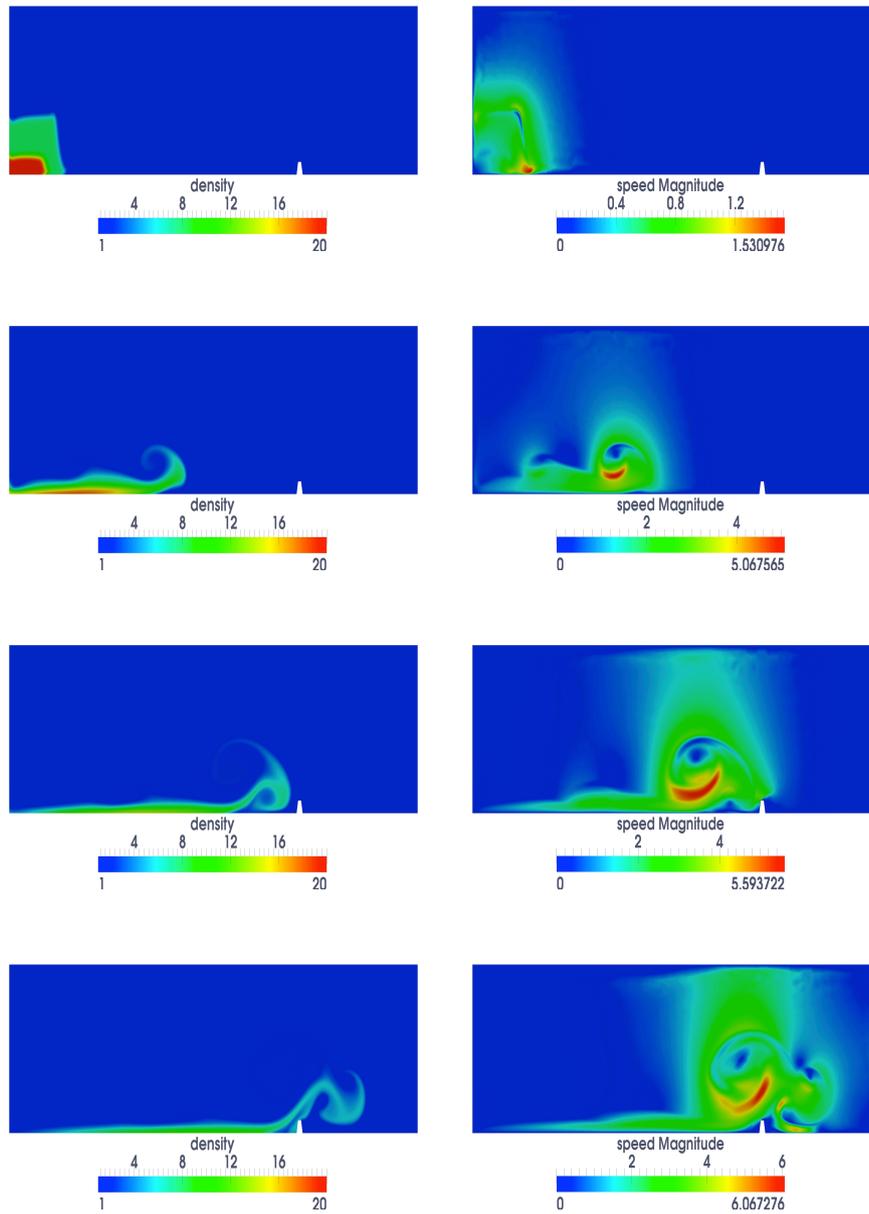


FIG. 2: Densité (colonne de gauche) et module de la vitesse (colonne de droite) aux instants  $t=0.10$  s,  $0.50$  s,  $0.80$  s et  $1.00$  s (de haut en bas).

Modélisation et simulation des avalanches de neige

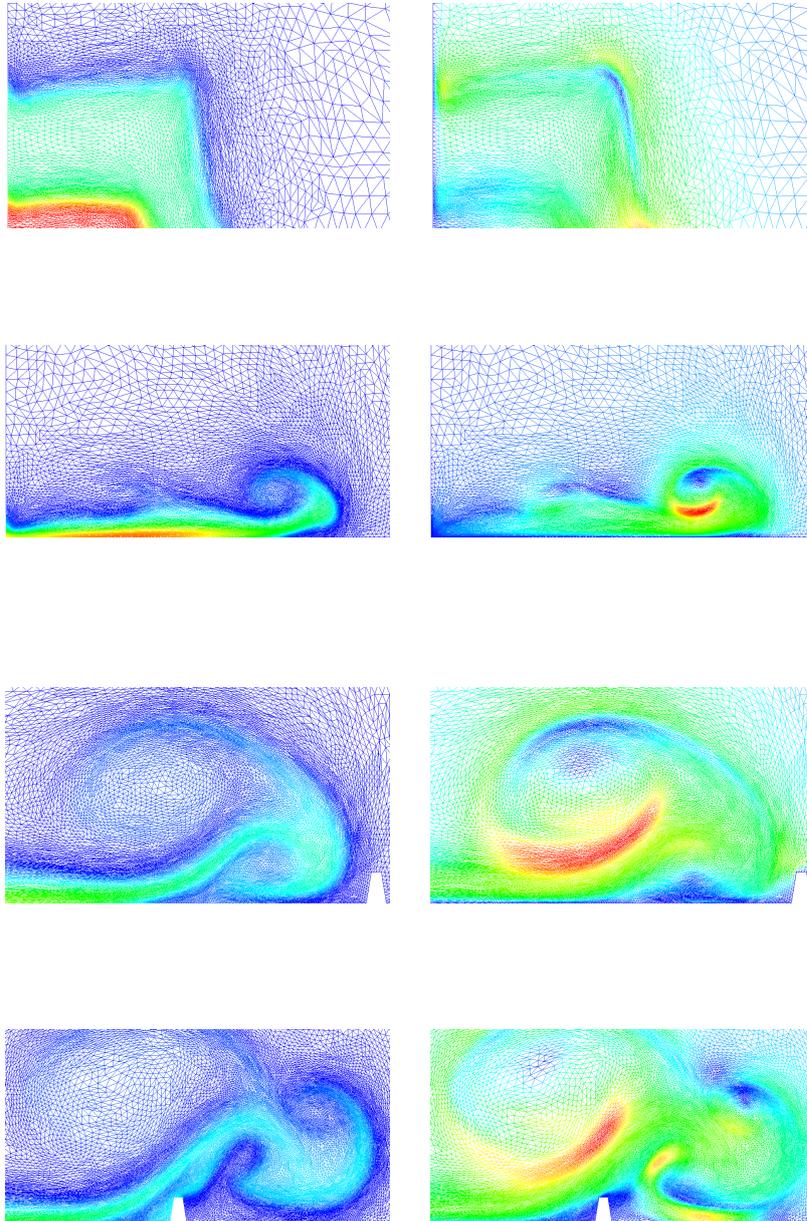


FIG. 3: Zoom locaux pour montrer les maillages utilisés dans les calculs. Mêmes instants et mêmes échelles de couleurs de la Figure 2.

## Bibliographie

- [1] <http://avalanches.irstea.fr/>.
- [2] <http://www-ljk.imag.fr/membres/pierre.saramito/rheolef/>.
- [3] <http://www.openfoam.com/>.
- [4] C. Acary-Robert, D. Dutykh, and M. Gisclon. Une approche pour simuler des avalanches de neige, des mathématiques en montagne. *Images des Math.*, 2011.
- [5] C. Ancey and C. Charlier. Quelques réflexions autour d’une classification des avalanches. *Revue de Géographie Alpine*, 84 :9–21, 1996.
- [6] G. Ansanay-Alex. *Un schéma éléments finis non-conformes/volumes finis pour l’approximation en maillages non structurés des écoulements à faible nombre de Mach*. PhD thesis, Université de Provence, Aix-Marseille, France, 2009.
- [7] S. N. Antontsev, A. V. Kazhikhov, and V. N. Monakhov. *Boundary value problems in mechanics of nonhomogeneous fluids*, volume 22 of *Studies in Math. and its Appl.* North Holland, 1990.
- [8] P. Beghin, E.J. Hopfinger, and R.E. Britter. Gravitational convection from instantaneous sources on inclined boundaries. *Journal of Fluid Mechanics*, 107 :407–422, 1981.
- [9] H. Beirao da Veiga. Diffusion on viscous fluids. Existence and asymptotic properties of solutions. *Annali Scuola Norm. Sup. Pisa, Classe di Scienze*, 10 :341–355, 1983.
- [10] H. Brenner. Unsolved problems in fluid mechanics : On the historical misconception of fluid velocity as mass motion, rather than volume motion, 2003. Communication for the 100th anniversary of the Ohio State Chemical Engineering Department.
- [11] D. Bresch, H. El Essoufi, and M. Sy. Effect of density dependent viscosities on multiphasic incompressible fluid models. *J. Math. Fluid Mech.*, 9(3) :377–397, 2007.
- [12] C. Calgario, E. Chane-Kane, E. Creusé, and T. Goudon.  $L^\infty$  stability of vertex-based MUSCL finite volume schemes on unstructured grids; simulation of incompressible flows with high density ratios. *J. Comput. Phys.*, 229(17) :6027–6046, 2010.
- [13] C. Calgario, E. Creusé, and T. Goudon. An hybrid finite volume-finite element method for variable density incompressible flows. *J. Comput. Phys.*, 227(9) :4671–4696, 2008.
- [14] C. Calgario, E. Creusé, and T. Goudon. Simulation of Mixture Flows : Pollution Spreading and Avalanches. Technical report, CNRS-INRIA-Université Lille et Université Nice Sophia Antipolis, Sep 2012. <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00732112/>.

Modélisation et simulation des avalanches de neige

- [15] J.-Y. Chemin. Le système de Navier-Stokes incompressible soixante dix ans après Jean Leray. In *Actes des Journées Mathématiques à la Mémoire de Jean Leray*, volume 9 of *Sémin. Congr.*, pages 99–123. Soc. Math. France, Paris, 2004.
- [16] R. Danchin. Local and global well-posedness results for flows of inhomogeneous viscous fluids. *Adv. Differential Equations*, 9(3-4) :353–386, 2004.
- [17] D. Dutykh, C. Acary-Robert, and D. Bresch. Mathematical modeling of powder-snow avalanche flows. *Stud. Appl. Math.*, 127(1) :38–66, 2011.
- [18] J. Etienne. *Simulation numérique directe de nuages aérosols denses sur des pentes ; application aux avalanches de neige poudreuse*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2004.
- [19] J. Etienne, P. Saramito, and E. J. Hopfinger. Numerical simulations of dense clouds on steep slopes : Application to powder-snow avalanches. *Ann. Glaciol.*, 38 :379–383(5), 2004. Presented at IGS International Symposium on Snow and Avalanches. Davos, Switzerland 2-6 June 2003.
- [20] E. Feireisl and A. Vasseur. New perspectives in fluid dynamics : Mathematical analysis of a model proposed by Howard Brenner. In A. V. Fursikov, G. P. Galdi, and V. V. Pukhnachev, editors, *New Directions in Mathematical Fluid Mechanics. The Alexander V. Kazhikhov Memorial Volume*, Advances in Mathematical Fluid Mechanics, pages 153–179. Springer, 2010.
- [21] F. Franchi and B. Straughan. A comparison of Graffi and Kazhikhov–Smagulov models for top heavy pollution instability. *Adv. in Water Resources*, 24 :585–594, 2001.
- [22] V. Girault and P.-A. Raviart. *Finite element methods for Navier-Stokes equations*, volume 5 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1986. Theory and algorithms.
- [23] D. Graffi. Il teorema di unicita per i fluidi incompressibili, perfetti, eterogenei. *Rev. Unione Mat. Argentina*, 17 :73–77, 1955.
- [24] A. V. Kazhikhov and S. Smagulov. The correctness of boundary value problems in a diffusion model in an inhomogeneous fluid. *Sov. Phys. Dokl.*, 22 :249–250, 1977.
- [25] X. Liao. *Dynamique des gaz parfaits avec le nombre de Mach s’annulant*. PhD thesis, Université Paris-Est, 2013.
- [26] P.-L. Lions. *Mathematical topics in fluid mechanics. Vol. 1 : Incompressible models*, volume 3 of *Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications*. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1996. Oxford Science Publications.
- [27] M.-C. Rastello. *Etude de la dynamique des avalanches de neige en aérosol*. PhD thesis, Université Joseph Fourier–Grenoble I, 2002.
- [28] P. Secchi. On the initial value problem for the equations of motion of viscous incompressible fluids in the presence of diffusion. *Boll. Un. Mat. Ital. B (6)*, 1(3) :1117–1130, 1982.

Modélisation et simulation des avalanches de neige

---

- [29] P. Secchi. On the motion of viscous fluids in the presence of diffusion. *SIAM J. Math. Anal.*, 19(1) :22–31, 1988.
- [30] R. Temam. *Navier-Stokes equations*. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2001. Theory and numerical analysis, Reprint of the 1984 edition.

## Un exemple d'application des mathématiques à l'environnement littoral

La dynamique à long terme des dunes marines  
dans les zones soumises à la marée.  
Modélisation, Analyse, Homogénéisation et Simulation

par Emmanuel Frénod <sup>1</sup>

### 1 Motivations

Les environnements littoraux sont le lieu de multiples interfaces : interface entre océan et continent, interface entre eau salée et eau douce, interface entre vie marine et vie terrestre et interface entre un milieu hostile à l'homme et son milieu naturel. Cela leur confère une grande importance. Nous pensons à leur importance économique : pêche, aquaculture, zones portuaires et tourisme. De plus, une proportion importante de l'humanité vit à proximité des mers et des océans. Ainsi, les questions d'envasement, d'ensablement, d'érosion et de niveau des océans concernent fortement l'activité des sociétés. Sur un plan plus fondamental, comme cela est expliqué dans Guélorget & Perthuisot [12], ces environnements furent le lieu de l'émergence de la vie et sont toujours celui de certaines de ses évolutions les plus importantes.

Les comprendre, pour les protéger, pour agir sur eux, pour en tirer un profit, pour s'en protéger ou pour comprendre les origines et les évolutions de la vie est donc un des enjeux majeurs des années à venir.

### 2 Difficultés

La modélisation est un outil important pour ouvrir la voie à la compréhension des environnements littoraux.

Une analyse naïve pourrait aboutir à la conclusion que la modélisation des environnements littoraux est une tâche aisée car ne consisterait qu'en une superposition de couches de modèles bien connus : une couche pour la dynamique de l'eau, une autre pour l'évolution des sédiments et une troisième pour la biologie. Une analyse plus attentive révèle que cette analyse naïve est essentiellement non pertinente. En effet, d'une part, certains phénomènes fondamentaux importants ayant lieu dans les environnements littoraux ne sont pas bien décrits ni compris.

<sup>1</sup>LMBA (UMR CNRS 6205), Université de Bretagne-Sud & Inria Nancy-Grand Est, équipe-Projet : Calvi/Tonus.

Un exemple d'application des mathématiques à l'environnement littoral

D'autre part - et surtout, les phénomènes de chacune des couches sont en interaction forte les uns avec les autres, et la plupart de ces interactions ne sont absolument pas comprises. De plus, ils impliquent beaucoup d'échelles de temps et d'espace.

En conséquence, progresser dans la modélisation des environnements littoraux demande de combler les lacunes dans les modèles décrivant les phénomènes fondamentaux mal compris y ayant court. Ensuite, cela demande de construire des hiérarchies de modèles adaptées aux environnements littoraux permettant de filtrer les échelles en jeu et de quantifier les interactions ; en intégrant des démarches de modélisation mathématique, d'analyse asymptotique, d'analyse numérique et de calcul scientifique.

Le travail que nous présentons ici, qui concerne la dynamique des dunes sous-marines dans les océans côtiers soumis à la marée, est représentatif de ce que nous venons d'expliquer : Dans un premier temps, un modèle du transport de sable adapté à la situation visée a été déduit depuis un modèle de transport de sable connu par une démarche de modélisation mathématique. Ensuite, un résultat d'existence a été établi pour ce modèle. Cela a demandé l'établissement d'estimations concernant sa solution, qui sont le reflet de propriétés des phénomènes en jeu à l'échelle de temps qui nous intéresse. Puis, un résultat d'homogénéisation de ce modèle a été trouvé. Ce résultat amène une description qualitative de l'évolution des dunes. Il a également permis de développer une méthode numérique spécifique pour simuler l'évolution des dunes sous-marines à l'échelle de temps pertinente de leur évolution.

### 3 Modélisation

L'équation modélisant l'évolution d'un fond sableux sous l'action d'un courant est déduite de l'équation d'Exner (voir Van Rijn [17] et Idier [13]) et s'écrit :

$$\frac{\partial z'}{\partial t'} + \alpha \nabla \cdot \left[ \chi \left( D_G \rho \frac{|\mathbf{u}'|^2 - u_c^2}{C^2} \right) \left( \frac{\mathbf{u}'}{|\mathbf{u}'|} - \lambda \nabla z' \right) \right] = 0. \tag{1}$$

Ici, les champs dépendent du temps  $t' \in [0, T')$ , pour  $T' > 0$ , de la position dans la direction horizontale  $x' = (x'_1, x'_2) \in \Omega$ , ou  $\Omega$  est un ouvert régulier de  $\mathbb{R}^2$ . Le champ  $z' = z'(t', x')$  désigne l'altitude du fond en la position  $x$  et à l'instant  $t$ . Les opérateurs  $\nabla$  et  $\nabla \cdot$  désignent le gradient et la divergence. Le coefficient  $\alpha > 0$  est lié à la géométrie des grains de sable,  $D_G$  désigne leur diamètre et  $\rho$  est la densité de l'eau. La fonction  $\chi = \chi(\sigma)$  vaut 0 si  $\sigma < 0$  et  $|\sigma|^{3/2}$  si  $\sigma \geq 0$ . Le champ  $\mathbf{u}'$  désigne la vitesse de l'eau au voisinage du fond et  $u_c$  est la vitesse critique partir de laquelle le courant met en mouvement le sable considéré si le fond est plat. Le paramètre  $C$  vaut  $\ln(\frac{12d}{3D_G})$  où  $d$  est la hauteur d'eau au-dessus du fond et  $\lambda$  est l'inverse de la pente maximale (physiquement possible) des dunes de sable

Un exemple d'application des mathématiques à l'environnement littoral

lorsque la vitesse de l'eau est nulle.

Cette équation traduit que, lorsqu'il y a un courant avec une vitesse suffisante, celui-ci transporte le sable et que ce transport est augmenté ou diminué par l'effet conjugué de la direction du courant et celle de la pente des dunes. Nous la prenons comme modèle de référence, et nous commençons par l'adimensionner. Pour cela nous introduisons un temps caractéristique d'observation  $\bar{t}$  et une longueur caractéristique d'observation  $\bar{L}$  puis nous définissons les variables sans dimension  $t$  et  $x$  par

$$t' = \bar{t}t, \quad x' = \bar{L}x, \quad (2)$$

ce qui donne à  $\bar{t}$  et de  $\bar{L}$  le statut d'unité. Nous définissons également  $\bar{z}$  la hauteur caractéristique des dunes et la hauteur adimensionnée du fond

$$z(t, x) = \frac{1}{\bar{z}} z'(\bar{t}t, \bar{L}x). \quad (3)$$

En ce qui concerne les coefficients de l'équation, nous considérons la vitesse caractéristique de l'eau  $\bar{u}$ , la hauteur d'eau moyenne  $H$  et la valeur  $\bar{M}$  caractéristique du marnage (la variation de hauteur due à la marée). Puis, nous définissons les champs adimensionnés de courant  $\mathbf{u}$  et de variation de hauteur d'eau  $\mathbf{m}$  par

$$\mathbf{u}(t, x) = \frac{1}{\bar{u}} \mathbf{u}'(\bar{t}t, \bar{L}x), \quad \mathbf{m}(t, x) = \frac{1}{\bar{M}} (d(\bar{t}t, \bar{L}x) - H). \quad (4)$$

En prenant alors en compte que  $\frac{\bar{M}}{H}$  est petit et que donc  $C \simeq \ln\left(\frac{4H}{D_G}\right) + \frac{\bar{M}}{H} \mathbf{m}$ , nous faisons l'approximation suivante :

$$\frac{1}{C^3} \simeq \left(\ln\left(\frac{4H}{D_G}\right)\right)^{-3} \left(1 - 3\frac{\bar{M}}{H} \ln\left(\frac{4H}{D_G}\right) \mathbf{m}\right)^{-1}. \quad (5)$$

En utilisant des relations du type  $\nabla z(\bar{t}t, \bar{L}x) = \frac{1}{\bar{z}\bar{L}} \nabla z(t, x)$ , nous obtenons la version adimensionnée de (1) que nous recherchions :

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t} - \lambda \alpha \frac{\bar{t}\bar{u}^3(\rho D_G)^{3/2}}{\left(\ln\left(\frac{4H}{D_G}\right)\right)^3 \bar{L}^2} \nabla \cdot \left( \left(1 - 3\frac{\bar{M}}{H \ln\left(\frac{4H}{D_G}\right)} \mathbf{m}\right) \chi\left(|\mathbf{u}|^2 - \frac{u_c^2}{\bar{u}^2}\right) \nabla z \right) \\ = \alpha \frac{\bar{t}\bar{u}^3(\rho D_G)^{3/2}}{\left(\ln\left(\frac{4H}{D_G}\right)\right)^3 \bar{L}\bar{z}} \nabla \cdot \left( \left(1 - 3\frac{\bar{M}}{H \ln\left(\frac{4H}{D_G}\right)} \mathbf{m}\right) \chi\left(|\mathbf{u}|^2 - \frac{u_c^2}{\bar{u}^2}\right) \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Ensuite, nous attribuons aux valeurs caractéristiques les valeurs correspondant à la situation que nous souhaitons étudier, ce qui va faire apparaître un petit paramètre. La situation choisie ici est celle de dunes faites de gros grains de sable,

### Un exemple d'application des mathématiques à l'environnement littoral

c'est à dire avec un diamètre  $D_G \sim 5 \cdot 10^{-3} m$ , auxquels est associée une vitesse de mise en mouvement  $u_c = 0.5 m/s$ . Selon Flemming [8] et Idier [13], avec un tel sable les dunes générées font quelques dizaines de mètres de hauteur et quelques centaines de mètres de longueur. Cela nous amène à poser  $\bar{z} = 50 m$  et  $\bar{L} = 300 m$ . Vu que les dunes marines ne connaissent pas d'évolution significative sur des périodes inférieures à quelques mois, nous fixons pour la longueur de la période d'observation  $\bar{t}$  :  $100 \text{ jours} \sim 2400 \text{ heures} \sim 8.6 \cdot 10^6 s$ . En introduisant la fréquence de marée  $\bar{\omega}$ ,  $\bar{t}$  doit être comparée à la période de marée  $1/\bar{\omega} \sim 13 \text{ heures} \sim 4.7 \cdot 10^4 s$ , ce qui met en évidence un petit paramètre  $\epsilon = 1/(\bar{t}\bar{\omega}) \sim 1/200$ . Sachant que les dunes sous-marines du type que nous étudions existent dans des océans côtiers dont le socle rocheux est relativement plat, avec une hauteur d'eau d'environ 50 mètres, avec une marée ayant des courants plutôt forts mais un marnage modéré, nous posons :  $\bar{u} = 1 m/s$ ,  $H = 50 m$  et  $\bar{M} = 5 m$ . Comme de plus  $\lambda$  est de l'ordre de 1, un calcul direct amène l'évaluation suivante des coefficients de l'équation (6) :

$$\lambda\alpha \frac{\bar{t}\bar{u}^3(\rho D_G)^{3/2}}{\left(\ln\left(\frac{4H}{D_G}\right)\right)^3 \bar{L}^2} \sim \frac{1}{2\epsilon}, \lambda\alpha \frac{\bar{t}\bar{u}^3(\rho D_G)^{3/2}}{\left(\ln\left(\frac{4H}{D_G}\right)\right)^3 \bar{L}\bar{z}} \sim \frac{5}{\epsilon}, \frac{3\bar{M}}{H \ln\left(\frac{4H}{D_G}\right)} \sim 3\epsilon, \quad (7)$$

et l'équation (6) se réécrit :

$$\frac{\partial z^\epsilon}{\partial t} - \frac{1}{2\epsilon} \nabla \cdot \left( (1 - 3\epsilon \mathbf{m}) \chi(|\mathbf{u}|^2 - \frac{1}{2}) \nabla z^\epsilon \right) = \frac{5}{\epsilon} \nabla \cdot \left( (1 - 3\epsilon \mathbf{m}) \chi(|\mathbf{u}|^2 - \frac{1}{2}) \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} \right), \quad (8)$$

où nous notons  $z = z^\epsilon$  pour mettre en évidence sa dépendance au petit paramètre  $\epsilon$ .

En ce qui concerne les champs fluides  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{m}$ , comme ils sont les versions dimensionnées de fonctions périodiques à amplitude modulée et de période la période de marée, nous supposons

$$\mathbf{u}(x, t) = \mathcal{U}\left(t, \frac{t}{\epsilon}, x\right), \quad \mathbf{m}(x, t) = \mathcal{M}\left(t, \frac{t}{\epsilon}, x\right), \quad (9)$$

pour deux fonctions régulières  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{M}$  telles que  $\theta \mapsto (\mathcal{U}(t, \theta, x), \mathcal{M}(t, \theta, x))$  est périodique de période 1, avec une valeur moyenne nulle.

Enfin, comme les dunes de la situation considérée constituent très généralement des champs de dunes, il n'est pas déraisonnable de considérer un domaine périodique pour la variable  $x$ . Ainsi nous considérons que la solution  $z^\epsilon = z^\epsilon(t, x)$  de (8) est définie pour  $x \in \mathbb{T}$  où  $\mathbb{T}$  est le tore  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ . Concernant la variable de temps, nous considérons que  $t \in [0, T)$ , pour  $T > 0$ . Il faut naturellement adjoindre à l'équation (8) une donnée initiale

$$z^\epsilon|_{t=0} = z_0. \quad (10)$$

L'équation (8) est celle qu'il faut étudier pour comprendre la situation que nous avons choisie, pour mettre en évidence des phénomènes qualitatifs qui en sont représentatifs ou pour simuler l'évolution des dunes qu'elle génère.

## 4 Analyse

L'équation (8) est une EDP parabolique, linéaire, à coefficients non constants et avec un second membre. Établir l'unicité de sa solution fait appel à une routine classique consistant à supposer qu'il existe deux solutions à (8) puis à montrer que la différence entre ces deux solutions vérifie une équation similaire à (8), mais sans second membre et dotée d'une condition initiale réduite à 0. Une estimation simple sur cette équation montre que sa solution unique est la fonction nulle. Donc les deux solutions supposées de (8) sont identiques.

Établir l'existence d'une solution à (8) dont la norme (dans un espace fonctionnel à préciser) est indépendante de  $\epsilon$  est une tâche plus longue. Nous ne ferons que la résumer ici. Pour plus de détail sur cette preuve (et pour la preuve de résultats dans d'autres situations) nous renvoyons à Faye, Frénod & Seck [7, 5].

Deux difficultés nous font face pour établir cette existence : la présence du facteur  $1/\epsilon$  devant le terme de diffusion et devant le second membre et le fait que le coefficient de diffusion s'annule, empêchant son caractère régularisant. Cependant, ces difficultés sont compensées par le fait que le facteur  $1/\epsilon$  pousse  $z^\epsilon$  à se rapprocher d'une fonction périodique de fréquence  $1/\epsilon$  et par le fait que lorsque le coefficient de diffusion s'annule, le second membre s'annule aussi, supprimant son action dérégularisante. De plus, si  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{M}$  sont régulières, les actions dérégularisantes du coefficient de diffusion et du second membre ne sont pas trop fortes.

Pour établir notre résultat, nous faisons l'hypothèse suivante qui peut se traduire par : à chaque marée, pendant un certain temps, le courant met le sable en mouvement partout, et, l'onde de marée quitte toujours l'étale marée basse et celui de marée haute de manière uniforme :

**Hypothèse 1.**  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{M}$  sont régulières ; pour tout  $t$  et tout  $x$ , il existe un intervalle  $[\theta_\alpha, \theta_\omega]$  inclus dans  $[0, 1]$  tel que  $\mathcal{U}(t, \theta, x)$  soit strictement supérieur à  $1/2$  pour tout  $\theta$  dans cet intervalle ; et, partout où  $\mathcal{U}$  est inférieur ou égal à  $1/2$ ,  $\mathcal{U}$  ne dépend ni de  $t$  ni de  $x$ .

Nous avons alors le théorème suivant.

**Théorème 2.** Pour tout  $T > 0$  et tout  $\epsilon > 0$ , si l'hypothèse 1 est satisfaite, et si  $z_0 \in L^2(\mathbb{T}^2)$ , alors il existe une unique fonction  $z^\epsilon \in L^\infty([0, T], L^2(\mathbb{T}^2))$ , solution de (8) et (10). Pour tout  $t \in [0, T)$ , cette solution vérifie

$$\frac{d \left( \int_{\mathbb{T}^2} z^\epsilon(t, x) dx \right)}{dt} = 0 \quad \text{et} \quad \|z^\epsilon\|_{L^\infty([0, T], L^2(\mathbb{T}^2))} \leq \tilde{\gamma}, \quad (11)$$

pour une constante  $\tilde{\gamma}$  indépendante de  $\epsilon$ .

**Résumé de la démonstration.** Dans une première étape, nous régularisons l'équation (8) en ajoutant un terme positif dans le coefficient de diffusion. Nous consi-

Un exemple d'application des mathématiques à l'environnement littoral

dérons donc, pour tout  $\nu$  strictement positif,  $z^{\epsilon, \nu}$  solution de

$$\begin{aligned} \frac{\partial z^{\epsilon, \nu}}{\partial t} - \frac{1}{2\epsilon} \nabla \cdot \left( \left( (1 - 3\epsilon \mathbf{m}) \chi(|\mathbf{u}|^2 - \frac{1}{2}) + \nu \right) \nabla z^{\epsilon, \nu} \right) \\ = \frac{5}{\epsilon} \nabla \cdot \left( (1 - 3\epsilon \mathbf{m}) \chi(|\mathbf{u}|^2 - \frac{1}{2}) \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} \right), \end{aligned} \quad (12)$$

associée à la donnée initiale (10). Comme dans cette équation le coefficient de diffusion est strictement positif, en utilisant des méthodes classiques de théorie des EDP paraboliques (voir par exemple Ladyzenskaja, Solonnikov & Ural' Ceva [14] ou Lions [15]), nous pouvons montrer que  $z^{\epsilon, \nu}$  existe et qu'elle vérifie une estimation du type  $\|z^{\epsilon, \nu}\|_{L^\infty([0, T], L^2(\mathbb{T}^2))} \leq \gamma/\epsilon$  pour une constante  $\gamma$  ne dépendant ni de  $\nu$  ni de  $\epsilon$ . En faisant ensuite tendre  $\nu$  vers 0, nous pouvons montrer que  $z^\epsilon$  existe et qu'elle vérifie  $\|z^\epsilon\|_{L^\infty([0, T], L^2(\mathbb{T}^2))} \leq \gamma/\epsilon$ .

La deuxième étape, consiste à considérer  $\mathcal{S}^\nu = \mathcal{S}^\nu(t, \theta, x)$ , périodique de période 1 en  $\theta$ , solution de l'équation paramétrisée par  $t$  :

$$\frac{\partial \mathcal{S}^\nu}{\partial \theta} - \nabla \cdot ((\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon(t, \cdot, \cdot) + \nu) \nabla \mathcal{S}^\nu) = \nabla \cdot \tilde{\mathcal{C}}_\epsilon(t, \cdot, \cdot), \quad (13)$$

où

$$\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon(t, \theta, x) = \frac{1}{2} \left( (1 - 3\epsilon \mathcal{M}(t, \theta, x)) \chi(|\mathcal{U}(t, \theta, x)|^2 - \frac{1}{2}) + \nu \right), \quad (14)$$

$$\tilde{\mathcal{C}}_\epsilon(t, \theta, x) = 5 \left( (1 - 3\epsilon \mathcal{M}(t, \theta, x)) \chi(|\mathcal{U}(t, \theta, x)|^2 - \frac{1}{2}) \frac{\mathcal{U}(t, \theta, x)}{|\mathcal{U}(t, \theta, x)|} \right), \quad (15)$$

Cette équation est posée dans un domaine complètement périodique (en  $x$  et en  $\theta$ ). Donc elle ne nécessite pas de conditions initiale ou aux limites. En adaptant à ce contexte périodique les méthodes usuelles des EDP paraboliques, il est possible de montrer l'existence et l'unicité de  $\mathcal{S}^\nu(t, \cdot, \cdot)$  dans  $L^2_{\#}(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{T}^2))$ , pour tout  $t \in [0, T]$ , sous réserve de satisfaire la condition suivante, pour tout  $t$  et tout  $\theta$  :

$$\int_{\mathbb{T}^2} \mathcal{S}^\nu(t, \theta, x) dx = 0. \quad (16)$$

(Ci-dessus  $L^2_{\#}(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{T}^2))$  désigne l'ensemble des fonctions de variable  $\theta$ , périodique de période 1, à valeur dans  $L^2(\mathbb{T}^2)$  et localement de carré intégrable.)

Cette construction nous donne des estimations de la norme  $L^2_{\#}(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{T}^2))$  de  $\mathcal{S}^\nu$  et de celles de ses dérivées premières par rapport à toutes ses variables (y compris  $t$ ) qui dépendent de  $\nu$ .

L'étape suivante a pour objet d'utiliser l'hypothèse 1 pour établir des estimations de ces normes qui sont indépendantes de  $\nu$ . Grâce à ces estimations, nous pouvons établir, en faisant tendre  $\nu$  vers 0, l'existence et l'unicité de la solution  $\mathcal{S} = \mathcal{S}(t, \cdot, \cdot)$  dans  $L^2_{\#}(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{T}^2))$ , pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \theta} - \nabla \cdot (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon(t, \cdot, \cdot) \nabla \mathcal{S}) = \nabla \cdot \tilde{\mathcal{C}}_\epsilon(t, \cdot, \cdot), \quad (17)$$

Un exemple d'application des mathématiques à l'environnement littoral

dès lors que nous imposons la condition suivante, pour tout  $t$  et tout  $\theta$  :

$$\int_{\mathbb{T}^2} \mathcal{S}(t, \theta, x) dx = 0. \tag{18}$$

La norme  $L^2_{\#}(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{T}^2))$  de  $\mathcal{S}$  et de celles de ses dérivées par rapport à toutes ses variables sont bornées.

La quatrième étape consiste à considérer  $Z^\epsilon = Z^\epsilon(t, x) = \mathcal{S}(t, \frac{t}{\epsilon}, x)$ . Comme

$$\frac{\partial Z^\epsilon}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t}(t, \frac{t}{\epsilon}, x) + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \theta}(t, \frac{t}{\epsilon}, x), \tag{19}$$

nous pouvons déduire de (17) que  $Z^\epsilon$  est solution d'une équation qui est proche de celle dont  $z^\epsilon$  est solution (voir (8)) :

$$\frac{\partial Z^\epsilon}{\partial t} - \frac{1}{\epsilon} \nabla \cdot (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon \nabla Z^\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} \nabla \cdot \mathcal{C}^\epsilon + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t}(t, \frac{t}{\epsilon}, x). \tag{20}$$

Ainsi nous pouvons déduire que  $z^\epsilon - Z^\epsilon$  est solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial(z^\epsilon - Z^\epsilon)}{\partial t} - \frac{1}{\epsilon} \nabla \cdot (\tilde{\mathcal{A}}_\epsilon \nabla(z^\epsilon - Z^\epsilon)) = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t}(t, \frac{t}{\epsilon}, x), \\ (z^\epsilon - Z^\epsilon)|_{t=0} = z_0 - \mathcal{S}(0, 0, \cdot). \end{cases} \tag{21}$$

L'étape de conclusion consiste alors à dire, grâce à (21), que  $z^\epsilon$ , dont on sait qu'elle existe (depuis la première étape), ne s'éloigne pas trop de  $Z^\epsilon$ . Et comme  $Z^\epsilon$  est une fonction périodique prise en  $t/\epsilon$  elle reste bornée. Cela apporte l'inégalité concernant  $\|z^\epsilon\|_{L^\infty([0, T], L^2(\mathbb{T}^2))}$ .

L'autre partie de (11) s'obtient assez directement. ■

### 5 Homogénéisation

Grâce au fait que la norme  $L^\infty([0, T], L^2(\mathbb{T}^2))$  de  $z^\epsilon$  est bornée indépendamment de  $\epsilon$ , nous pouvons déduire un résultat d'homogénéisation qui permet de décrire qualitativement le comportement de  $z^\epsilon$  mais aussi de construire des méthodes de simulation numérique dites "Méthodes Numériques à Deux échelles". Ce résultat d'homogénéisation s'énonce comme suit.

**Théorème 3.** *Pour tout  $T > 0$ , sous des hypothèses identiques à celles du Théorème 2, lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ , la solution  $z^\epsilon$  de (8) Converge à Deux Échelles vers  $U \in L^\infty([0, T], L^\infty_{\#}(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{T}^2)))$  qui est la solution unique de*

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} - \nabla \cdot (\tilde{\mathcal{A}} \nabla U) = \nabla \cdot \tilde{\mathcal{C}}, \tag{22}$$

où

$$\tilde{\mathcal{A}}(t, \theta, x) = \frac{1}{2} \chi \left( |\mathcal{U}(t, \theta, x)|^2 - \frac{1}{2} \right) \quad \text{et} \quad \tilde{\mathcal{C}}(t, \theta, x) = 5 \chi \left( |\mathcal{U}(t, \theta, x)|^2 - \frac{1}{2} \right) \frac{\mathcal{U}(t, \theta, x)}{|\mathcal{U}(t, \theta, x)|}. \tag{23}$$

## Un exemple d'application des mathématiques à l'environnement littoral

Pour la définition précise de ce que signifie "Converger à Deux échelles" nous renvoyons à Nguetseng [16], Allaire [3] et Frénod [9]. Ici nous retiendrons qu'affirmer que  $z^\epsilon$  Converge à Deux échelles vers  $U$  signifie que pour toute fonction  $\psi(t, \theta, x)$  régulière, à support compact en  $t$  et  $x$  et périodique de période 1 en  $\theta$ ,

$$\int_{\mathbb{T}^2} \int_0^T z^\epsilon(t, x) \psi(t, \frac{t}{\epsilon}, x) dt dx \rightarrow \int_0^1 \int_{\mathbb{T}^2} \int_0^T U(t, \theta, x) \psi(t, \theta, x) dt dx d\theta \quad (24)$$

et que, d'un point de vue intuitif, cela traduit que  $z^\epsilon(t, x)$  est proche de  $U(t, \frac{t}{\epsilon}, x)$ .

**Résumé de la démonstration.** La preuve de ce théorème est basée sur une formulation faible avec des fonctions test oscillantes de l'équation (8). Celle-ci s'obtient en multipliant (8) par  $\phi(t, \frac{t}{\epsilon}, x)$  pour toute fonction  $\phi(t, \theta, x)$  régulière, à support compact en  $t$  et  $x$  et périodique de période 1 en  $\theta$  et à intégrer le résultat par parties en utilisant

$$\frac{\partial \left[ \phi(t, \frac{t}{\epsilon}, x) \right]}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial t} \left( t, \frac{t}{\epsilon}, x \right) + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \left( t, \frac{t}{\epsilon}, x \right). \quad (25)$$

Elle s'écrit :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^2} \int_0^T z^\epsilon \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \left( t, \frac{t}{\epsilon}, x \right) + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \left( t, \frac{t}{\epsilon}, x \right) + \frac{1}{\epsilon} \nabla \cdot \left( (1 - 3\epsilon \mathbf{m}) \chi(|\mathbf{u}|^2 - \frac{1}{2}) \nabla \phi \left( t, \frac{t}{\epsilon}, x \right) \right) \right) dx dt \\ = -\frac{1}{\epsilon} \int_{\mathbb{T}^2} \int_0^T \nabla \cdot \left( (1 - 3\epsilon \mathbf{m}) \chi(|\mathbf{u}|^2 - \frac{1}{2}) \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} \right) \phi \left( t, \frac{t}{\epsilon}, x \right) dt dx \\ = \int_{\mathbb{T}^2} z_0(x) \phi(0, 0, x) dx. \end{aligned} \quad (26)$$

En multipliant cette équation par  $\epsilon$ , en utilisant les expressions de  $\mathbf{m}$  et  $\mathbf{u}$  (voir (9)), en remarquant que  $\frac{\partial \phi}{\partial t}, \frac{\partial \phi}{\partial \theta}, \nabla \cdot \left( (1 - 3\epsilon \mathcal{M}) \chi(|\mathcal{U}|^2 - \frac{1}{2}) \nabla \phi \right)$  et  $\nabla \cdot \left( (1 - 3\epsilon \mathcal{M}) \chi(|\mathcal{U}|^2 - \frac{1}{2}) \frac{\mathcal{U}}{|\mathcal{U}|} \right) \phi$  peuvent jouer le rôle de  $\psi$  dans (24) et en faisant tendre  $\epsilon$  vers 0 nous obtenons

$$\int_0^1 \int_{\mathbb{T}^2} \int_0^T U \left( \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \nabla \cdot \left( \tilde{\mathcal{A}} \nabla \phi \right) \right) dx dt d\theta = \int_0^1 \int_{\mathbb{T}^2} \int_0^T \nabla \cdot \tilde{\mathcal{C}} \phi dx dt d\theta, \quad (27)$$

pour toute fonction  $\phi(t, \theta, x)$  régulière, à support compact en  $t$  et  $x$  et périodique de période 1 en  $\theta$ , qui est une formulation faible de (22). ■

## 6 Simulations

Vu que l'équation (8) génère dans sa solution  $z^\epsilon$  des oscillations de taille  $\epsilon$ , la simuler numériquement directement demande de prendre des pas de temps no-

Un exemple d'application des mathématiques à l'environnement littoral

tablement plus petits que  $\epsilon$ , ce qui rend le coût de la simulation élevé. Pour remédier à cela, nous cherchons à développer une Méthode Numérique à Deux-échelles. Pour résumer la mise en place de cette méthode, dont une ébauche est exposée dans Faye, Frénod & Seck [6], nous dirons qu'elle consiste, dans un premier temps, à construire une approximation numérique de l'équation (22). Cette équation ne génère pas d'oscillations de taille  $\epsilon$  dans sa solution  $U$ . Une approximation de  $U$  peut donc être calculée en utilisant un pas de temps (qui ici est  $\theta$ ) beaucoup plus grand que celui que nous aurions à utiliser pour calculer une approximation de  $z^\epsilon$  directement. Dans un deuxième temps, nous construisons une approximation numérique du fait que  $z^\epsilon(t, x)$  est proche de  $U(t, \frac{t}{\epsilon}, x)$ . Cela nous donne alors une bonne approximation de  $z^\epsilon(t, x)$ .

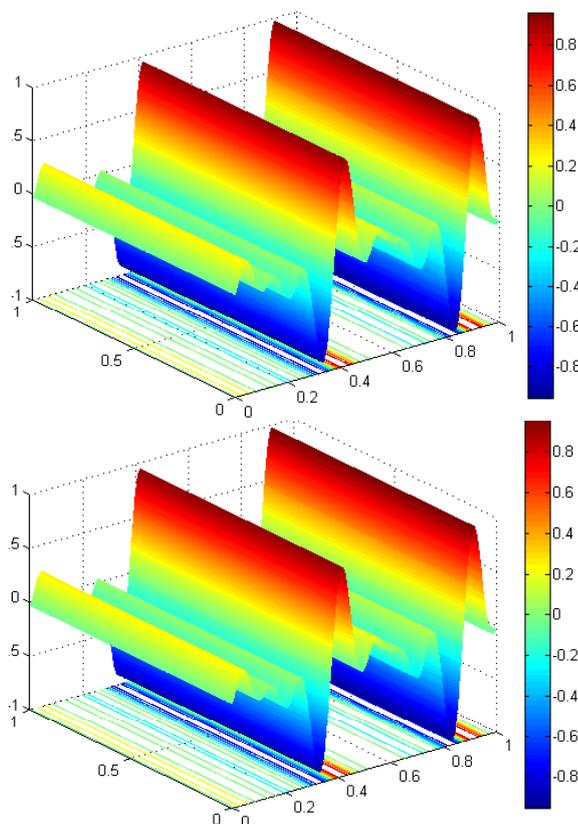


FIG. 1: Haut : Un champ de dunes calculé par une simulation direct de (8) (avec  $\epsilon = 0.005$ , à  $t = 0.375$ ). Bas : Le même champ de dunes calculé par la Méthode Numérique à Deux-échelles décrite en section 6.

La pertinence de cette approche est illustrée par la Figure 1. Sur la gauche de cette figure, est représentée une approximation numérique de l'équation (8) pour

## Un exemple d'application des mathématiques à l'environnement littoral

---

une valeur de  $\epsilon = 0.005$ , à  $t = 0.375$ . Elle est calculée par une discrétisation directe de (8), basée sur des séries de Fourier en  $x$  et sur un schéma d'Euler en temps. L'image de droite, présente cette solution, au même instant, mais calculée en utilisant la Méthode Numérique à Deux-échelles dont le principe a été expliqué ci-dessus. Les deux solutions sont très proches l'une de l'autre, et, la solution numérique calculée par la Méthode Numérique à Deux-échelles demande environ 10 fois moins de temps de calcul pour une même précision.

Ces deux solutions ont été calculées en utilisant un code développé sous Matlab, faisant appel à la Transformation de Fourier Rapide.

## 7 Conclusion

Au delà de la contribution des mathématiques à la compréhension de la formation et de l'évolution des dunes sous-marines, le travail décrit dans cette note est représentatif de ce que les mathématiques peuvent apporter aux science de la terre. Elles offrent en effet une panoplie d'outils performants, couvrant un large spectre allant de la modélisation à la simulation, en passant par l'analyse fine et l'exhibition de comportement qualitatifs ; permettant une vision globale des questions que ces sciences posent.

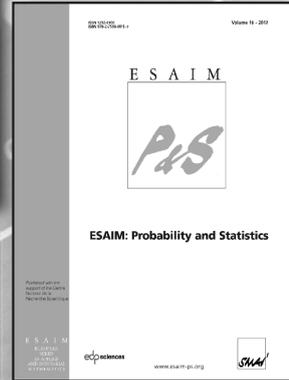
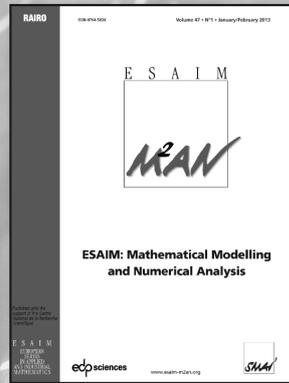
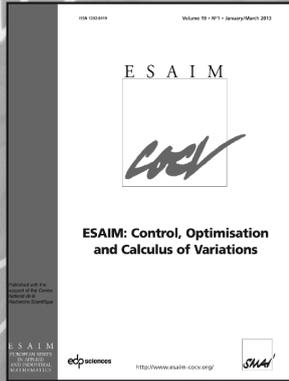
Des démarches similaires sont en cours sur d'autres thèmes issus des science de la terre. Par exemple dans Frénod & Goubert [10], Frénod & Rousseau [11] et Bernard, Frénod & Rousseau [4] une contribution mathématique au concept de confinement paraliq est en développement. Dans Ailliot, Frénod & Monbet [1, 2] un travail sur la dérive d'objets dans l'océan côtier soumis à la marée est mené.

## Bibliographie

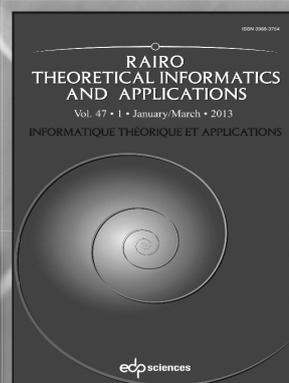
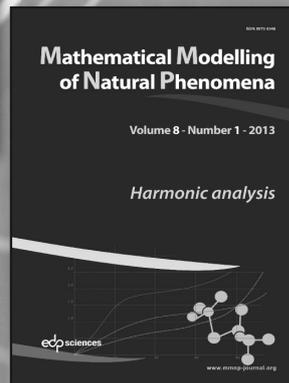
- [1] P. Ailliot, E. Frénod, and V. Monbet. Long term object drift forecast in the ocean with tide and wind. *Multiscale Modeling and Simulations*, 5(2) :514–531, 2006.
- [2] P. Ailliot, E. Frénod, and V. Monbet. Modeling the coastal ocean over a time period of several weeks. *Journal of Differential Equations*, 248 :639–659, 2010.
- [3] G. Allaire. Homogenization and Two-scale Convergence. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 23(6) :1482–1518, 1992.
- [4] J.-P. Bernard, E. Frenod, and A. Rousseau. Modeling confinement in Etang de Thau : numerical simulations and multi-scale aspects. *Submitted*.
- [5] I. Faye, E. Frénod, and D. Seck. Long term behaviour of singularly perturbed parabolic degenerated equation. *Submitted*.
- [6] I. Faye, E. Frénod, and D. Seck. Two-scale numerical simulation of sand transport problems. *Sumitted*.

Un exemple d'application des mathématiques à l'environnement littoral

- [7] I. Faye, E. Frénod, and D. Seck. Singularly perturbed degenerated parabolic equations and application to seabed morphodynamics in tided environment. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series S A*, 29(3) :1001–1030, 2011.
- [8] B.W. Flemming. The role of grain size, water depth and flow velocity as scaling factors controlling the size of subaqueous dunes. In A. Trentesaux and T. Garlan, editors, *Marine Sandwave Dynamics, International Workshop, March 23-24 2000*. University of Lille 1, France, 2000.
- [9] E. Frenod. Two-Scale Convergence. *ESAIM : Proceedings*, 38 :1–35, 2012.
- [10] E. Frénod and E. Goubert. A first step towards modelling confinement of paralic ecosystems. *Ecological Modelling*, 200(1-2) :139–148, jan 2007.
- [11] E. Frénod and A. Rousseau. Paralic Confinement - models and simulations. *Acta Applicanda Mathematicae*, 123(1) :1–19, 2013.
- [12] O. Guélorget and J.-P. Perthuisot. Structure et évolution des peuplements benthiques en milieux paralique. Comparaison entre un modèle déssalé (l'Étang du Prévost, France) et un modèle sursalé (La Bahiere el Biban, Tunisie). Conséquences biologiques et géologiques. *Journal de Recherche OcÈanographique, Paris*, 7 :2–11, 1982.
- [13] D. Idier. *Dunes et bancs de sables du plateau continental : observations in-situ et modélisation numérique*. PhD thesis, 2002.
- [14] O. A. Ladyzenskaja, Solonnikov V. A., and Ural'ceva N. N. *Linear and Quasi-linear Equation of Parabolic Type*, volume 23. AMS, Translation of Mathematical Monographs, vol. 23.
- [15] J.-L. Lions. Remarques sur les équations différentielles ordinaires. *Osaka Math. J.*, 15 :131–142, 1963.
- [16] G. Nguetseng. A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 20(3) :608–623, 1989.
- [17] L. C. Van Rijn. Handbook on sediment transport by current and waves. Technical Report H461 :12.1–12.27, Delft Hydraulics, 1989.



edp sciences



## De la glace à la mer

par Maëlle Nodet <sup>1</sup>

DE LA GLACE À LA MER

### Introduction

En gagnant et perdant de la masse, les glaciers et les calottes polaires<sup>2</sup> jouent un rôle majeur dans l'évolution du niveau des mers. Par exemple, dans les 20 000 dernières années, la fonte des grandes calottes de glace de l'hémisphère nord après le dernier maximum glaciaire a causé une élévation du niveau des mers de 120 mètres. Des observations récentes indiquent que des modifications importantes dans les vitesses d'écoulement de l'Antarctique et du Groenland sont en train d'avoir lieu, suggérant que d'irréversibles changements ont pu commencer, ce qui est particulièrement inquiétant pour l'avenir. Ceci a été mis en évidence dans le dernier rapport publié par le Groupe d'Experts Intergouvernemental sur le Climat (GIEC) en 2007. En outre, le GIEC a insisté sur notre faible connaissance des mécanismes clefs produisant les accélérations de la perte de masse des calottes et glaciers observées actuellement, et a conclu que des prévisions fiables pour la hausse du niveau des mers n'étaient pas disponibles à cette date. Depuis 5 ans, de nombreux projets internationaux ont ainsi vu le jour pour s'intéresser plus précisément à ce problème.

Dans cet article je présenterai les mécanismes physiques et les équations mathématiques qui régissent l'écoulement de la glace, puis j'expliquerai un peu plus en détail ce problème de l'estimation de la contribution des glaciers et calottes polaires au changement de niveau des mers.

## 1 L'écoulement de la glace

### 1.1 Généralités : les processus physiques mis en jeu

La figure 1 présente les différents processus physiques qui interviennent dans la dynamique de l'écoulement de la glace, passons les en revue.

<sup>1</sup>INRIA EPI MOISE et Univ. Joseph Fourier, Lab. J. Kuntzmann, Grenoble.

<sup>2</sup>calotte polaire, ou inlandsis : glacier de très grande étendue se présentant sous la forme d'une nappe de glace recouvrant la terre ferme et qui peut atteindre plusieurs milliers de mètres d'épaisseur (source : wikipédia)

## De la glace à la mer

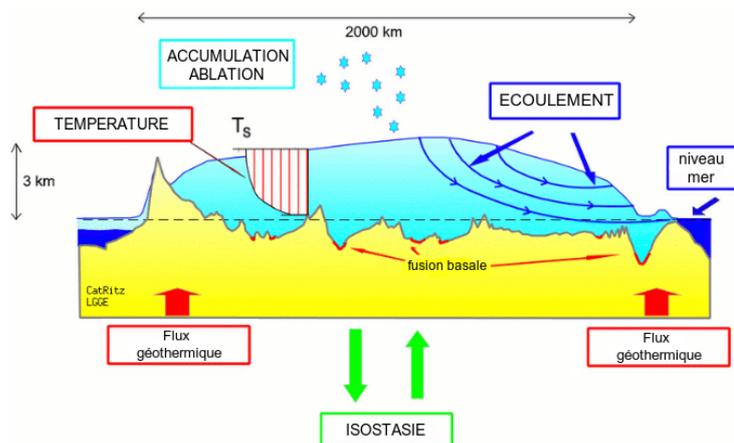


FIG. 1: Les différents processus physiques intervenant dans la dynamique des écoulements de glace, vus sur un profil en coupe de calotte polaire.

**Écoulement.** La première caractéristique de la glace est qu’il s’agit d’un fluide incompressible non-newtonien, qui flue (s’écoule) sous son propre poids. Si on regarde en accéléré des photos prises chaque jour d’un glacier de montagne, on verra comme une rivière de glace qui coule<sup>3</sup>. Mais contrairement à ce qui se passe pour l’eau liquide, les échelles de temps de l’écoulement sont telles que les effets d’accélération sont négligeables. Le terme “non-newtonien” signifie que la viscosité de la glace dépend non linéairement de la dynamique, elle est donnée par une loi de comportement viscoplastique appelée la loi de Glen, qui modélise la complexité du matériau et de sa capacité à se déformer. La glace est un matériau d’autant plus complexe que ses propriétés physiques sont variables à l’intérieur d’une calotte. En effet, les conditions de température et de pression ne sont pas homogènes dans la glace, ce qui modifie ses propriétés. De plus, la pression et les fusions/regels successifs induisent aussi des modifications de la structure cristalline, et donc des propriétés physiques et mécaniques.

**Bilan de masse.** Le bilan de masse est la différence entre la glace qui s’accumule (par les précipitations, ou le regel de l’eau en surface, dans les crevasses, ou sous la glace) et la glace qui disparaît (par fusion en surface ou au sol, par vêlage d’icebergs, ou encore transport par le vent). Estimer ce bilan est un problème très complexe, qui dépend de nombreux phénomènes extérieurs : les conditions météorologiques et la température de surface influent sur la quantité de précipitations neigeuses, sur la fonte, et sur le transport par le vent ; le flux géothermique influe sur la fusion à la base de la glace.

<sup>3</sup><https://www.youtube.com/watch?v=HZaknW8m6tI>

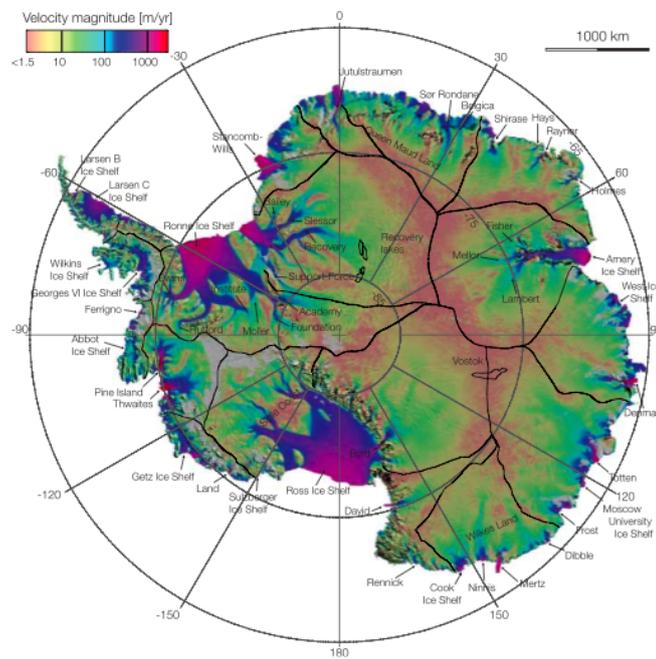


FIG. 2: Vitesses d'écoulement de la glace en surface (d'après [6]).

## De la glace à la mer

**Conditions aux limites au fond.** A la base de la glace il peut se passer essentiellement deux choses : soit la glace est très froide et elle adhère au socle rocheux, soit elle glisse sur le sol. Le glissement a lieu pour diverses raisons : lorsque la glace est tempérée il y a à sa base un film d'eau qui permet le glissement sur la roche, elle peut aussi être posée sur un sédiment gorgé d'eau, ou sur des débris rocheux, il peut aussi exister un réseau hydrologique sous-glaciaire (cavités reliées par des ruisseaux, lacs, rivières) sur lequel la glace glisse, etc. En Antarctique et au Groenland, les zones de plus fort glissement sont situées sur les côtes, dans des vallées ressemblant à des canyons ou à des fjords. La figure 2 présente la carte des vitesses d'écoulement en surface, et met clairement en évidence de nombreux et gigantesques fleuves de glace, qui s'écoulent à une vitesse supérieure à 10 km/an (14 km/an pour le glacier Jakobshavn au Groenland, qui a produit récemment des épisodes de vêlage<sup>4</sup> d'icebergs spectaculaires<sup>5</sup>). Les calottes se prolongent parfois sur la mer en de gigantesques plates-formes de glace flottantes.

**Bestaire des rétroactions.** Une rétroaction, ou *feedback*, a lieu lorsqu'une cause produit un effet qui agit en retour sur la cause du phénomène. *L'instabilité des petites calottes* en est un exemple : lorsque l'altitude de la calotte devient trop basse, sa température de surface augmente, ce qui induit davantage de fonte, et donc une décroissance supplémentaire d'altitude. Le phénomène peut ainsi s'amplifier et la calotte disparaître rapidement.

Mentionnons aussi le phénomène d'isostasie, ou encore rebond post-glaciaire, c'est-à-dire l'enfoncement du socle rocheux sous le poids de la glace. L'enfoncement est de l'ordre du tiers, c'est-à-dire qu'une épaisseur de glace de 3000 m causera l'enfoncement du socle à 1000 m de profondeur, avec un temps de relaxation de l'ordre de 10 000 ans. Ceci induit une rétroaction sur la calotte, puisque l'enfoncement induit une modification de l'altitude de surface, donc de la température de surface et du bilan de masse.

D'autres rétroactions impliquent l'océan : le niveau des mers joue un rôle sur les calottes, par les conditions aux limites au bord latéral (poussée d'Archimède), et les calottes influent sur le niveau des mers. La température de l'océan aux abords et sous les plates-formes flottantes joue également un rôle complexe, et la calotte elle-même influe sur la circulation océanique autour d'elle.

## 1.2 Modèles d'écoulement grande échelle

Les équations qui régissent l'écoulement de la glace sont les équations de Stokes. Les modèles numériques basés sur ces équations sont très coûteux à résoudre à l'échelle d'une calotte polaire. Si c'est envisageable avec les plus performants d'entre eux pour le Groenland [2], en revanche pour l'Antarctique c'est encore hors de portée. Pour pouvoir néanmoins faire des simulations, les modélisateurs

<sup>4</sup>vêlage : perte par un glacier de fragments, sous forme d'icebergs

<sup>5</sup><http://www.youtube.com/watch?v=hC3VTgIPoGU>

ont développé des modèles grande échelle, basés sur l’approximation couche-mince, Shallow-Ice, sur le même principe que celui qui donne les équations de Saint-Venant (Shallow-Water) à partir des équations de Navier-Stokes. L’idée est que les échelles verticales sont faibles (quelques kilomètres d’épaisseur) devant les échelles horizontales (quelques milliers de kilomètres). Les modèles grande échelle ont été initialement développés pour étudier des problèmes de paléoclimatologie, et pouvoir simuler des milliers d’années. Afin d’appréhender un peu la complexité de l’écoulement, on va décrire ci-dessous un modèle grande échelle [7] de calotte polaire avec et sans glissement basal. Pour simplifier l’écriture on se placera en une dimension d’espace, en coupe le long d’une ligne d’écoulement, mais bien sûr les équations s’écrivent de manière similaire en deux dimensions.

**Conservation de la masse.** L’équation de conservation de la masse régit l’évolution de l’épaisseur de glace  $H(t, x)$  au temps  $t$  en un point d’espace  $x$  :

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \dot{b}_m - \frac{\partial(\bar{U}H)}{\partial x}, \quad H|_{t=0} = H_0, \quad H \geq 0 \quad (1)$$

avec

- $H(t, x)$  l’épaisseur de glace,  $H_0(x)$  l’épaisseur initiale
- $\bar{U}(t, x)$  la vitesse eulérienne moyennée verticalement :

$$\bar{U}(t, x) = \frac{1}{H(t, x)} \int_{B(t, x)}^{H(t, x)} u(t, x, z) dz$$

- où  $B(t, x)$  est l’altitude de la base de la glace.
- $\dot{b}_m(t, x)$  le bilan de masse net en surface

**Bilan de masse en surface.**  $\dot{b}_m(t, x)$  dépend de la température en surface :

$$\begin{cases} \dot{b}_m &= \text{Acc} + \text{Abl} \\ \text{Acc} &= f(T_S) \\ \text{Abl} &= g(T_S) \end{cases}$$

avec

- $\text{Acc}(t, x)$  le taux d’accumulation (précipitations neigeuses)
- $\text{Abl}(t, x)$  le taux d’ablation (fonte)
- $T_S(t, x)$  la température en surface
- $f, g$  des fonctions données

La figure 3 montre ce bilan en fonction de la température de surface. En pratique, le bilan est quasiment soit de l’accumulation, soit de l’ablation. La zone où ablation et accumulation coexistent est très réduite. L’endroit où le bilan s’annule s’appelle la ligne d’équilibre, elle intervient dans l’instabilité des petites calottes : lorsqu’une calotte passe sous cette ligne, elle devient instable et disparaît. Réciproquement, si une calotte est assez grande, elle reste au-dessus de cette ligne,

De la glace à la mer

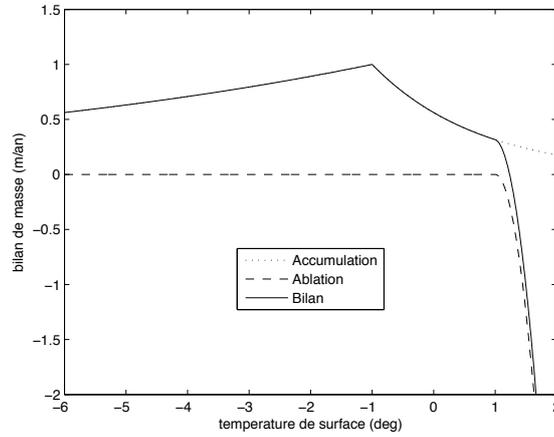


FIG. 3: Accumulation, ablation et bilan de masse en surface en fonction de la température de surface.

son bilan est donc toujours positif et elle est stable.

Finalement, la température de surface elle-même dépend du point  $x$  (si la ligne d'écoulement n'est pas à latitude constante), de l'altitude de la surface  $S(t, x)$  et de la température en  $x = 0$  au niveau de la mer  $T_{\text{clim}}(t)$  (qui est généralement assez mal connue) :

$$T_S(t, x) = T_{\text{clim}}(t) + bx + cS(t, x)$$

où  $b, c$  sont des coefficients donnés.

**Dynamique.** La vitesse  $\bar{U}(t, x)$  ne dépend que de la géométrie de la calotte, c'est la somme de deux contributions :

$$\bar{U} = U_d + U_g$$

avec  $U_d$  la composante de la vitesse liée à la déformation et  $U_g$  la composante de la vitesse liée au glissement. La vitesse liée à la déformation est donnée par la relation fortement non-linéaire suivante :

$$U_d = -a_1 \frac{\partial S}{\partial x} \frac{H^2}{3} - a_2 \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^3 \frac{H^4}{3}, \quad S = B + H \quad (2)$$

où

–  $S(t, x)$  est l'altitude de la surface et  $B(t, x)$  l'altitude de la base de la glace ;

–  $a_1, a_2$  sont des coefficients (qui peuvent varier...).

La vitesse liée au glissement vérifie l'équation elliptique suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( 4H\eta \frac{\partial U_g}{\partial x} \right) = \rho g H \frac{\partial S}{\partial x} - \tau_b \quad (3)$$

où  $\eta$  est la viscosité effective de la glace,  $\tau_b(t, x) = -\beta(t, x)U_g(t, x)$  est la contrainte de cisaillement basal et  $\beta(t, x) > 0$  le coefficient de friction basale. Ce coefficient modélise de manière simplifiée la nature du socle (sédiment, roche, glace tempérée ou pas, avec ou sans eau, etc.). On pourrait également envisager une loi plus complexe, non-linéaire, où  $\beta(t, x)$  dépend de  $U_g$ .

On voit ainsi avec ces quelques équations la complexité et les non-linéarités du couplage entre la géométrie, la dynamique, le bilan de surface et la température.

## 2 Le problème du niveau des mers

### 2.1 Les paramètres sensibles

La contribution des glaciers et calottes polaires au changement de niveau des mers est essentiellement la combinaison de deux phénomènes : la modification du bilan de masse en surface (en raison des modifications climatiques et/ou d'altitude de la calotte) d'une part, et l'évacuation de la glace par vélage d'icebergs dans les fleuves de glace et les plates-formes flottantes d'autre part. Ici on ne considère pas la contribution liée aux modifications de bilan de masse en surface. En effet, ces modifications sont intrinsèquement liées au changement climatique, sont également très complexes, et font l'objet d'actives recherches par ailleurs.

La perte de masse des calottes polaires par vélage d'icebergs est contrôlée par un petit nombre de fleuves de glace. On estime par exemple qu'environ 10% de la périphérie de l'Antarctique contrôle 90% de l'évacuation de la glace. La présence ou non de fleuves de glace est intimement liée à la nature des conditions basales, qui permettent ou pas un fort glissement et donc de grandes vitesses d'écoulement. Un autre paramètre essentiel est la géométrie du socle rocheux (altitude et pente), notamment dans les zones côtières. La vitesse de déformation dépend en effet à la fois de l'altitude de surface  $S(t, x)$  mais aussi de l'épaisseur de glace  $H(t, x)$ , et donc de l'altitude du socle  $B(t, x) = S - H$ . De plus, la profondeur du socle joue également sur l'épaisseur de glace (à altitude de surface fixée), donc sur les conditions de pression à la base de la glace, qui elles-mêmes influent sur la présence ou non d'eau liquide.

### 2.2 Les observations disponibles

Comme on l'a vu précédemment, les conditions à la base de la glace sont liées à la profondeur et la nature du socle et aux conditions hydrologiques et thermiques. Les observations pour les conditions de frottement à la base sont très limitées. En

De la glace à la mer

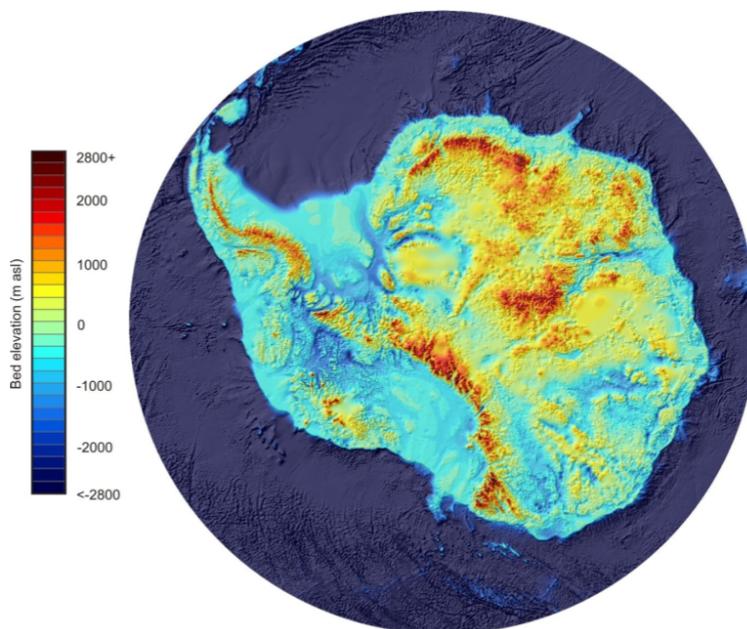


FIG. 4: Carte d’observations de topographie du socle rocheux en Antarctique Bedmap2, obtenue à partir de mesures effectuées par avion en survol au-dessus du continent, d’après [1]. Le plus haut sommet culmine à plus de 4500 mètres. A cause du poids de la glace, de nombreuses zones sont situées environ 1000 mètres sous le niveau des mers.

effet il est quasiment impossible d’aller faire des mesures sous la glace, sauf dans de rares points de forages profonds où le socle a été atteint. Dans ces cas-là, l’analyse de la glace des carottes renseigne sur ces conditions basales. Les expériences en laboratoire sont assez peu représentatives, il est en effet impossible de restituer la pression équivalente à des milliers de mètres d’épaisseur de glace. L’autre incertitude cruciale est sur la nature du socle : s’agit-il de sédiments, de roche, de débris de roche ? La présence d’eau liquide, déterminante pour le glissement, est aussi liée à des paramètres mal connus comme le flux géothermique. On n’a donc aucune mesure pour la loi de frottement et les coefficients associés.

Pour la profondeur du socle, on dispose d’un nombre limité de mesures, faites par avion. Les observations sont ainsi restreintes à des traces de survol. En ces points de mesure, la précision est d’une vingtaine de mètres. En dehors des points de mesure, des stratégies d’interpolation (en général par krigeage) sont utilisées, mais l’incertitude dans les zones non observées peut aller jusqu’à plusieurs centaines de mètres. Les figures 4 et 5 montrent l’état de l’art des cartes actuelles pour l’Antarctique : la première est une carte de socle, la deuxième est celle des

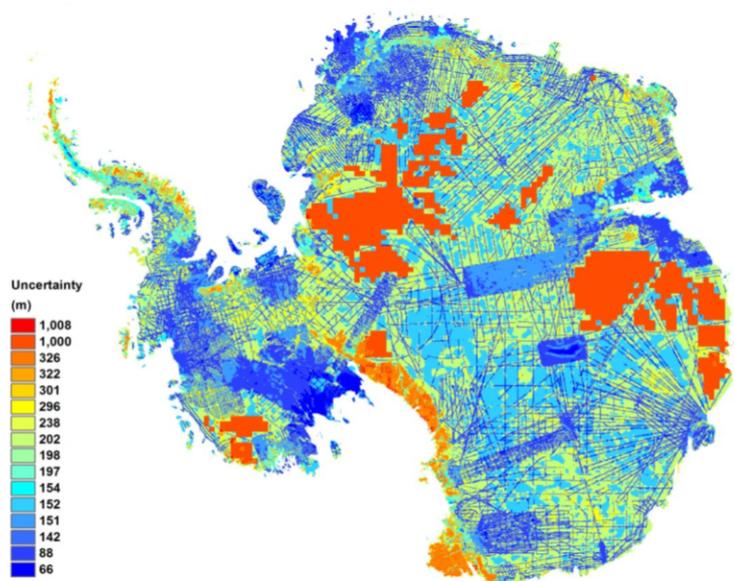


FIG. 5: Carte des erreurs estimées pour les observations de topographie du socle rocheux en Antarctique, d’après [1]. L’incertitude maximale atteint 1000 mètres dans les zones non observées, elle descend autour de 20 mètres au niveau des points de mesure (traces de survol par avion).

erreurs estimées. On voit clairement sur cette deuxième carte les trace de survol d’avion, où la précision est bonne, et les zones non observées, avec de grandes erreurs possibles. Précisons ici que le relief de l’Antarctique est très chahuté, et tout à fait similaire à nos Alpes, avec des changements brutaux d’altitude et des chaînes de montagnes.

Les autres observations dont on dispose, et qui permettront d’extraire de l’information pour retrouver les paramètres non observés, sont des données de surface, obtenues par satellite : altitude de la surface, vitesse de la glace en surface.

### 2.3 Quelques réponses via les méthodes inverses

Le problème qui consiste à retrouver les conditions basales (altitude du socle et loi de friction) à partir des observations est un problème inverse. En effet, le socle  $B(t, x)$  et le coefficient  $\beta(t, x)$  sont des paramètres d’entrée pour les équations du modèle (1,2,3), et les mesures  $S(t, x)$  et  $U_{\text{surface}}(t, x)$  en sont des sorties. Le problème direct consiste à estimer les sorties à partir des entrées, le problème inverse fait donc... l’inverse.

L’assimilation de données est le nom d’un ensemble de méthodes mathématiques

De la glace à la mer

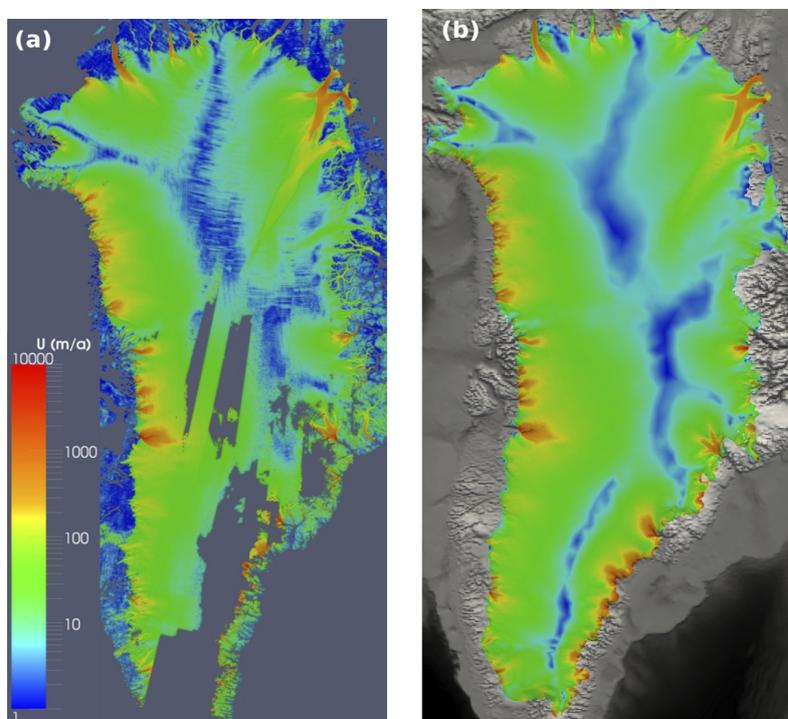


FIG. 6: Vitesses de surface pour le Groenland. A gauche, les vitesses observées par satellite. A droite, les vitesses reconstituées après assimilation du champ  $\beta(x)$ . Les principaux glaciers émissaires (vitesses supérieures à 10 km/an) sont bien reproduits par l’assimilation de données. Source : [3].

permettant de trouver les paramètres d’entrée optimaux afin que le modèle coïncide au mieux avec les observations. Il existe deux grandes classes de méthodes d’assimilation. La première s’appelle l’assimilation variationnelle [5], elle est basée sur la théorie du contrôle optimal. Le prototype d’algorithme variationnel s’appelle le 4D-Var; c’est celui qui est utilisé quotidiennement à Météo-France pour recalibrer le modèle atmosphérique sur les observations afin de fournir les prévisions météorologiques. L’idée de la méthode est de former une fonction (dépendant des paramètres que l’on cherche) qui mesure l’écart entre les observations et le modèle, et de chercher les paramètres qui minimisent cet écart. Cette méthode fait appel à des techniques d’optimisation par méthode de descente dans la direction de plus grande pente, celle du gradient, calculé par la méthode adjointe. La deuxième classe de méthodes regroupe les méthodes stochastiques de filtrage, basées sur l’estimation statistique optimale. Le prototype de ces méthodes est le filtre de Kalman [4]; ce sont ces méthodes qui sont utilisées par les centres de mé-

téorologie américains. L'idée est de calculer directement les paramètres optimaux en calculant la matrice de gain de Kalman du système.

Dans l'équipe MOISE [9] (INRIA Grenoble – Rhône-Alpes, Laboratoire Jean Kuntzmann), en collaboration avec des glaciologues du LGGE (Laboratoire de Glaciologie et de Géophysique de l'Environnement), et dans le cadre du projet ANR ADAGe [8], nous mettons en œuvre ces deux types de méthodes pour résoudre le problème inverse évoqué ci-dessus. La figure 6 montre un exemple de résultat pour le Groenland : à gauche figurent les vitesses de surface observées, à droite les vitesses reconstituées par assimilation du paramètre de glissement  $\beta$ , qui sont en bon accord avec les observations. Le champ de  $\beta$  ainsi obtenu permet ensuite de faire des simulations à l'échelle du siècle et d'estimer la contribution du Groenland à la montée du niveau des mers [3].

## Conclusion

Les difficultés pour ce problème restent nombreuses : les fortes non-linéarités empêchent toute justification théorique et posent des problèmes de convergence des algorithmes ; le manque d'observations directes et la méconnaissance de certains processus font que les incertitudes sont fortes ; les sources d'incertitude elles-mêmes sont nombreuses, et leurs statistiques (indispensables pour les algorithmes d'inversion) sont mal connues et difficiles à modéliser, etc. Néanmoins, les méthodes inverses sont des outils puissants pour estimer l'état d'un système géophysique, en combinant l'information mathématique contenue dans les équations et l'information physique contenue dans les observations, et leur application en glaciologie ouvre de nombreuses perspectives.

## Bibliographie

- [1] P. Fretwell et al., 2012. *Bedmap2 : improved ice bed, surface and thickness datasets for Antarctica*. The Cryosphere Discussion, 6.
- [2] O. Gagliardini, T. Zwinger, 2008. *The ISMIP-HOM benchmark experiments performed using the Finite-Element code Elmer*. The Cryosphere Discussions, 2 (1).
- [3] F. Gillet-Chaulet, O. Gagliardini, H. Seddik, M. Nodet, G. Durand, C. Ritz, T. Zwinger, R. Greve, D. G. Vaughan, 2012. *Greenland Ice Sheet contribution to sea-level rise from a new-generation ice-sheet model*. The Cryosphere Discussion, 6.
- [4] R.E. Kalman, 1960. *A new approach to linear filtering and prediction problems*. Journal of Basic Engineering 82, 1.
- [5] F.-X. Le Dimet, 1982. *A general formalism of variational analysis*. CIMMS Report, Norman, OK 73091 22 :1–34

## De la glace à la mer

---

- [6] E. Rignot, I. Velicogna, M. R. van den Broeke, A. Monaghan, J. T. M. Lenaerts, 2011. *Acceleration of the contribution of the Greenland and Antarctic ice sheets to sea level rise*. *Geophysical Research Letters*, Volume 38, Issue 5.
- [7] C. Ritz, V. Rommelaere, C. Dumas, 2001. *Modeling the evolution of Antarctic ice sheet over the last 420,000 years : implications for altitude changes in the Vostok region*. *J. Geophys. Res.* 106 (D23)
- [8] <http://www-lgge.obs.ujf-grenoble.fr/pdr/ADAGe>
- [9] <http://team.inria.fr/moise>

## Des modèles mathématiques et des écoulements géophysiques

par Jacques Sainte-Marie<sup>1,2,3</sup>

### Résumé

Alors que 2013 a été déclarée par l'UNESCO "Année des Mathématiques de la planète Terre"<sup>4</sup>, on cherche dans cet article à faire le point sur les besoins, les verrous et les avancées scientifiques liés à la modélisation, à l'analyse et à la simulation des écoulements géophysiques gravitaires. Le terme "gravitaire" fait référence aux écoulements où la gravité joue un rôle important, ce qui exclut les écoulements atmosphériques.

### 1 Introduction

Les écoulements géophysiques sont généralement représentés par les équations de la mécanique des fluides incompressibles d'Euler ou de Navier-Stokes à surface libre. Mais les dimensions caractéristiques des problèmes étudiés justifient l'utilisation de modèles plus simples, dont l'analyse est mieux maîtrisée, et qui permettent notamment de réduire les coûts de calcul. Parmi ces modèles simplifiés, les plus importants sont sans doute ceux décrivant les écoulements dits "peu profonds", c'est-à-dire lorsque les dimensions caractéristiques horizontales sont largement supérieures à la dimension verticale (la hauteur d'eau). Beaucoup d'écoulements dans les rivières, les lacs ou les océans rentrent dans cette catégorie.

Le système de Saint-Venant [10] – qui sera détaillé ci-après – est la pierre angulaire des modèles dits "peu profonds" et il rend bien compte de phénomènes complexes tels les ruptures de barrage, les inondations, les avalanches.

Alors que l'analyse et les méthodes numériques pour les modèles de type Saint-Venant ont atteint une certaine maturité, les mathématiciens sont naturellement amenés à s'intéresser à des modèles plus sophistiqués et donc plus précis. En effet, les aléas naturels (vagues scélérates, érosion, ...) mettent en jeu des phénomènes physiques complexes et les modèles d'écoulements de type Saint-Venant ne permettent de représenter que très imparfaitement les situations observées. La difficulté principale est donc l'obtention de bons modèles qui doivent être adaptés au phénomène physique, simulés efficacement et validés.

<sup>1</sup>Inria, team ANGE, B.P. 105, F-78153 Le Chesnay Cedex

<sup>2</sup>CETMEF, 134 rue de Beauvais, 60280 Margny Les Compiègne

<sup>3</sup>UPMC Univ Paris 06, CNRS UMR 7598, Laboratoire Jacques-Louis Lions, F-75005, Paris,

Jacques.Sainte-Marie@inria.fr

<sup>4</sup>voir <http://mpt2013.fr/http://mpt2013.fr/>

## Des modèles mathématiques et des écoulements géophysiques

Les modèles et les outils numériques ainsi obtenus sont très utiles pour l’analyse des événements passés, pour la compréhension des phénomènes complexes, pour la prévention des risques,...

A noter que récemment les préoccupations liées au développement durable et à l’écologie ont fait émerger de nouvelles problématiques telles que la production d’énergies renouvelables ou le couplage hydrodynamique-biologie, ces points seront abordés en dernière partie.

Cet article n’a pas la prétention de donner un panorama exhaustif de tous les problèmes et de toutes les contributions récentes sur le sujet, il cherche juste à présenter les besoins, quelques avancées et des perspectives.

## 2 Quelques dates et modèles importants

En 1757, L. Euler a proposé dans son ouvrage "Principe généraux du mouvement des fluides" un modèle qui porte son nom et qui décrit la dynamique des fluides. Ce modèle s’écrit

$$\nabla \cdot \underline{u} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} + \nabla p = G, \quad (2)$$

où  $\underline{u} = (u, v, w)^T$  est le vecteur vitesse du fluide,  $p$  la pression,  $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})^T$  et  $G = (0, 0, -g)^T$  avec  $g$  désignant l’accélération de pesanteur. L’équation (1) traduit la conservation de la masse fluide alors que (2) décrit le principe fondamental de la dynamique appliqué au fluide. Le système (1)-(2) doit être complété par des conditions initiales et des conditions aux limites (notamment celle traduisant la présence de la surface libre).

L. Euler conclut son ouvrage par la phrase suivante : *"tout ce que la Théorie des fluides renferme, est contenu dans les deux équations rapportées ci-dessus, de sorte que ce ne sont pas les principes de Mécanique qui nous manquent dans la poursuite de ces recherches mais uniquement l’Analyse, qui n’est pas encore assez cultivée pour ce dessein"*. Deux siècles et demi après sa rédaction, cette phrase conserve une étonnante actualité. En effet, l’analyse tant mathématique que numérique des équations d’Euler incompressible reste à ce jour particulièrement délicate notamment pour les écoulements à surface libre.

Dans les années 1840, les équations de Navier-Stokes prenant en compte les effets visqueux du fluide ont complété les équations d’Euler. Dans le cas des écoulements géophysiques lorsque le fluide considéré est l’eau (typiquement les écoulements en rivière, dans les lacs ou bien les océans), les effets visqueux sont certes présents mais ils ont souvent une influence limitée par rapport aux termes de convection et à la pression. Aussi les équations d’Euler représentent bien la dynamique des fluides.

La présence de la surface libre est une caractéristique importante des écoulements géophysiques. En 1871, Barré de Saint-Venant et Boussinesq [10, 14, 15] ont pro-

Des modèles mathématiques et des écoulements géophysiques

posé des modèles décrivant la propagation des ondes dans un canal à surface libre et on a pu démontrer que ces modèles sont des approximations rigoureuses des équations d’Euler, voir par exemple [20]. Ainsi en une dimension d’espace, correspondant par exemple à la direction privilégiée d’une rivière, les équations de Saint-Venant s’écrivent

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (H\bar{u}) = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial (H\bar{u})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( H\bar{u}^2 + \frac{g}{2} H^2 \right) = -gH \frac{\partial z_b}{\partial x}, \tag{4}$$

où  $H = \eta - z_b$  est la hauteur d’eau du fluide,  $\eta$  la surface libre,  $z_b$  la topographie du fond,  $g$  l’accélération de pesanteur et  $\bar{u}$  la vitesse du fluide moyennée selon la direction verticale (voir Fig. 1) et définie par

$$\bar{u} = \frac{1}{H} \int_{z_b}^{\eta} u \, dz.$$

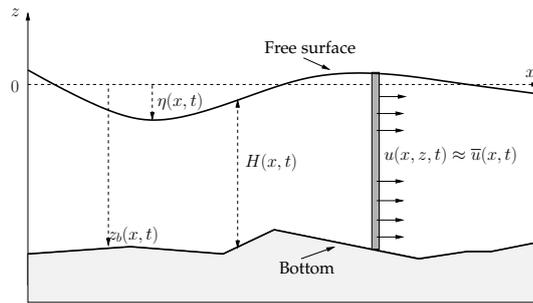


FIG. 1: Notations pour le système de Saint-Venant.

L’analyse mathématique et numérique des équations de Saint-Venant est loin d’être triviale. Le système (3)-(4) a la forme d’un système de lois de conservation hyperbolique avec des termes sources. A noter que l’on peut ajouter au système (3)-(4) de nombreux termes sources : pluie, frottement, viscosité, infiltration, force de Coriolis. Dans le cas homogène, le système (3)-(4) peut être vu comme un cas particulier du modèle de la dynamique des gaz et via la théorie cinétique on obtient des résultats puissants tant au niveau de l’analyse mathématique que numérique [6, 25, 26].

La discrétisation des lois de conservation se fait sur la base de schémas volumes finis et il existe une littérature très importante, voir notamment [11, 21, 24]. Concernant la résolution numérique des équations de Saint-Venant, on peut dire que :

- il existe de nombreux solveurs (relaxation, cinétique,...) permettant de traiter la partie conservative,

## Des modèles mathématiques et des écoulements géophysiques

---

- la discrétisation des termes sources et la préservation des équilibres est plus délicate mais des techniques robustes existent [5],
- la préservation au niveau numérique de propriétés physiques telle la positivité de la hauteur d’eau est primordiale et de nombreux flux numériques permettent de l’assurer [11],
- il existe des schémas numériques pour lesquels on a l’existence d’une entropie discrète. Mais ces schémas sont souvent coûteux en temps de calcul.

Le système de Saint-Venant permet de représenter une large variété d’écoulements peu profonds dans les lacs, les rivières ou encore dans les océans en zone côtière et il reste la pierre angulaire de la modélisation et de la simulation de très nombreux phénomènes.

Dans le cas d’écoulements avec un fort frottement au fond, avec une hauteur d’eau significative ou bien lorsque le fluide est stratifié selon la verticale, les hypothèses permettant d’établir les équations de Saint-Venant ne sont plus valables et donc ce système n’est plus valide.

### 3 Au delà du système de Saint-Venant

Même si des questions restent ouvertes quant à l’analyse et à la simulation des équations de Saint-Venant (préservation des équilibres non triviaux, schémas avec une entropie discrète, ...), les enjeux et les besoins sont ailleurs. C’est ce que l’on cherche à décrire maintenant au travers de résultats proposés récemment par l’auteur [34].

#### 3.1 Vers les équations d’Euler

Deux hypothèses principales – licites dans le cas des écoulements peu profonds – permettent d’obtenir les équations du modèle de Saint-Venant à partir des équations d’Euler incompressible

(i) la vitesse horizontale du fluide est bien représentée par sa moyenne selon la direction verticale,

(ii) la pression du fluide est hydrostatique ou bien de façon équivalente, l’accélération verticale du fluide peut être négligée par rapport aux effets de la gravité.

Il s’agit donc de chercher à s’affranchir successivement de ces deux hypothèses pour obtenir des modèles approchant plus précisément les équations d’Euler incompressible et de Navier-Stokes. A noter que les écoulements considérés sont caractérisés par l’importance de l’advection et des termes de pression, la présence de la surface libre donnant un caractère compressible à l’écoulement. En conséquence, même si les modèles recherchés n’appartiennent pas à la famille des lois de conservation hyperboliques, ils conservent une dominante hyperbolique et leur formulation ainsi que les techniques d’analyse associées conservent une parenté avec celles utilisées pour les modèles d’écoulements dits peu profonds.

### Modèles distribués selon la verticale

Des deux hypothèses (i) et (ii), la première est sans doute la plus restrictive pour les écoulements géophysiques. Et on est amené à chercher des modèles approchant les équations d'Euler hydrostatiques à surface libre données en deux dimensions d'espace, avec des notations évidentes, par

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uw}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -g, \quad (7)$$

avec la condition aux limites de surface libre

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u_s \frac{\partial \eta}{\partial x} - w_s = 0, \quad (8)$$

et la condition de non-pénétration au fond

$$u_b \frac{\partial z_b}{\partial x} - w_b = 0, \quad (9)$$

ainsi que

$$p_s = 0. \quad (10)$$

L'indice  $s$  (resp.  $b$ ) désigne la valeur prise à la surface libre i.e. en  $z = \eta$  (resp. au fond i.e. en  $z = z_b$ ).

On voit ici l'intérêt de l'hypothèse hydrostatique puisqu'en utilisant (7) et (10), on obtient

$$p = g(\eta - z),$$

et alors la pression n'apparaît plus comme une inconnue, ce qui simplifie énormément la forme et l'analyse des modèles.

En face du système (5)-(10) éventuellement complété par des termes visqueux dans le membre de droite des équations (6)-(7), il est assez naturel de chercher à approcher directement ces équations par une formulation variationnelle et de les discrétiser via des éléments finis adaptés. Cette démarche est possible mais elle se heurte à deux difficultés importantes

- la présence de la surface libre souvent irrégulière qui nécessite de remailler régulièrement le domaine fluide (coûteux en 3d),
- la préservation des domaines invariants de (5)-(10), typiquement la positivité de la hauteur d'eau.

Et en présence d'écoulements irréguliers (chocs, zones d'assèchement, ...), ces difficultés sont dures à surmonter.

La démarche généralement employée afin d'approcher le système (5)-(10) est de s'inspirer de ce que l'on fait pour un modèle d'écoulement peu profond mais en

Des modèles mathématiques et des écoulements géophysiques

s'affranchissant de l'hypothèse  $u \approx \bar{u}$  pour conserver les variations du champ de vitesse selon la verticale. Allant dans cette direction, de nombreux modèles plus sophistiqués que le système de Saint-Venant ont été proposés, il s'agit principalement de modèles dits *multi-couches* [4, 7, 12, 17, 28] qui décrivent le fluide par une superposition de systèmes de type Saint-Venant. Cette approche est intéressante mais implique de considérer chaque couche comme constituée d'un fluide non-miscible avec les couches voisines et c'est là une limitation forte.

On décrit ci-dessous une approche voisine [8, 9] et donnant, tant sur la structure du modèle obtenu, sur ces propriétés que sur son approximation numérique, des résultats plus intéressants. Elle consiste en une décomposition de type Galerkin selon la direction verticale des variables  $u$  et  $w$  obtenue de la façon suivante : on découpe la hauteur d'eau en  $N$  couches d'épaisseur  $l_\alpha H(x, t)$  avec  $\sum l_\alpha = 1$

$$\begin{cases} h_\alpha(x, t) = z_{\alpha+1/2}(x, t) - z_{\alpha-1/2}(x, t) = l_\alpha H(x, t), \\ z_{\alpha+1/2}(x, t) = z_b(x, t) + \sum_{j=1}^{\alpha} l_j H(x, t), \quad \alpha \in [0, \dots, N], \end{cases} \quad (11)$$

les  $z_{\alpha+1/2}$  représentant les interfaces entre les couches. On effectue ensuite une approximation ( $\mathbb{P}_0$  en  $z$ ) des variables  $(u, w)$  sous la forme

$$X^N(x, z, \{z_\alpha\}, t) = \sum_{\alpha=1}^N 1_{[z_{\alpha-1/2}, z_{\alpha+1/2}]}(z) X_\alpha(x, t), \quad (12)$$

pour  $X \in (u, w)$ . L'approximation du système (5)-(10) en utilisant (11)-(12) donne alors le système

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial h_\alpha u_\alpha}{\partial x} = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial h_\alpha u_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( h_\alpha u_\alpha^2 + \frac{g}{2l_\alpha} h_\alpha^2 \right) = -gh_\alpha \frac{\partial z_b}{\partial x} + u_{\alpha+1/2} G_{\alpha+1/2} - u_{\alpha-1/2} G_{\alpha-1/2} \quad (14)$$

avec  $\alpha \in \{1, \dots, N\}$ . Les  $G_{\alpha+1/2}$  sont définis par

$$G_{\alpha+1/2} = \frac{\partial}{\partial t} \sum_{j=1}^{\alpha} h_j + \frac{\partial}{\partial x} \sum_{j=1}^{\alpha} h_j u_j, \quad \alpha = 0, \dots, N,$$

et représentent l'échange de masse entre les couches adjacentes. Les vitesses  $u_{\alpha+1/2}$  sont définies par décentrement en tenant compte du signe de  $G_{\alpha+1/2}$ . Pour les solutions régulières, le système (13)-(14) est complété par la conservation de l'énergie

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_{\alpha=1}^N E_\alpha \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \sum_{\alpha=1}^N u_\alpha \left( E_\alpha + \frac{g}{2l_\alpha} h_\alpha^2 \right) \right) = 0, \quad (15)$$

avec  $E_\alpha = \frac{h_\alpha u_\alpha^2}{2} + \frac{gh_\alpha(\eta+z_b)}{2}$ . A noter que (15) est exactement une semi-discrétisation verticale de type Galerkin du bilan d'énergie du système (5)-(7).

## Des modèles mathématiques et des écoulements géophysiques

L’analyse du système (13)-(15) n’est pas aisée, un résultat d’existence (locale en temps, solution forte, données régulières) est donné dans [33]. L’existence d’une interprétation cinétique pour le système (13)-(15) permet de construire un schéma numérique robuste avec de bonnes propriétés : consistance, conservativité, positivité, préservation des équilibres, . . . L’analyse du système (13)-(14) étant délicate, il est important d’ajouter que des solutions analytiques sont disponibles pour le système (5)-(10), voir [13]. Elles permettent à la fois de valider les schémas numériques pour (13)-(14) et de vérifier que (13)-(14) est une bonne approximation de (5)-(10).

### Modèles non-hydrostatiques

L’hypothèse (ii) consiste à négliger l’accélération verticale du fluide – et non sa vitesse verticale – en remplaçant

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial uw}{\partial x} + \frac{\partial w^2}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} = -g,$$

par (7).

L’hypothèse hydrostatique reste largement valide pour beaucoup d’écoulements géophysiques mais est mise en défaut dans des situations critiques. Ainsi lorsqu’une vague approche de la côte ou d’un relief sous-marin, les variations de la bathymétrie communiquent au fluide une accélération verticale non négligeable. La vague générée par un séisme dans l’océan rend bien compte de ce phénomène. Alors que loin de la côte la vague est souvent d’une hauteur modeste (1 ou 2 mètres), en se rapprochant elle peut atteindre plusieurs dizaines de mètres de hauteur et les modèles hydrostatiques ne représentent que très partiellement ce phénomène.

Même si elle accentue le caractère dispersif des modèles, la prise en compte des effets non-hydrostatiques ne pose pas de difficultés insurmontables au niveau de la modélisation [22, 30, 31], c’est surtout l’analyse [3] et la discrétisation qui sont impactées. Divers modèles et techniques numériques ont été proposés ces dernières années mais leurs propriétés (robustesse/coût numérique) ne sont pas complètement satisfaisantes [18, 16] pour une utilisation opérationnelle.

### 3.2 Fluides à rhéologie complexe

Alors que les effets visqueux ne sont pas dominants dans les écoulements géophysiques faisant intervenir l’eau, il n’en est pas de même pour les fluides plus denses impliqués par exemple lors des avalanches de débris, des éruptions volcaniques, des phénomènes d’érosion [19, 29, 32]. Les modèles utilisés pour ces fluides sont généralement difficiles à classer. Ils font apparaître des comportements visco-élasto-plastiques et les EDP associées sont de type advection-diffusion-réaction.

## Des modèles mathématiques et des écoulements géophysiques

---

Par ailleurs, les écoulements géophysiques sont caractérisés par la présence dans le fluide de composants chimiques, biologiques ou minéraux qui sont advectés par le fluide mais également réagissent au sein du fluide en fonction de la présence de nutriments, de lumière (photosynthèse),... La présence de ces composants peut avoir une très grande influence sur la dynamique du fluide. Ainsi les variations de température de l'eau influencent sa densité et la prise en compte des variations de densité est un élément déterminant dans la dynamique des lacs et des océans [8, 35].

### 3.3 Couplages

Les problèmes rencontrés dans les géosciences font naturellement apparaître des couplages. Il peut s'agir de couplages entre fluides miscibles mais stratifiés par leur densité (eau chaude-eau froide), de fluides ayant des rhéologies différentes (avalanches, glissements de terrain) ou de couplages entre un fluide et une structure (des vagues contre une digue, une hydrolienne,...).

Ces couplages peuvent donc intervenir soit au travers des conditions aux limites, soit par la présence de plusieurs phases au sein du fluide ou encore par le couplage de modèles numériques, par exemple l'un fin l'autre plus grossier.

## 4 Développement durable

Alors que les préoccupations associées à la modélisation des écosystèmes, à la préservation de l'environnement et au développement durable ont une urgence particulière, d'importantes questions, qui relèvent des mathématiques appliquées, se posent dans des domaines tels que l'impact et la prévention des catastrophes naturelles, la gestion des ressources en eau, la biogéochimie des eaux et leur évolution, l'impact des écoulements sur les sols et les structures. Et les connaissances actuelles tant au niveau de la modélisation que de la simulation numérique ne permettent de répondre que très imparfaitement à ces problématiques.

Comme le montre l'énumération ci-dessus, ce champ est très vaste. Pour ces problèmes souvent multi-physiques et multi-échelles, la difficulté est d'isoler un problème précis pour lequel le formalisme mathématique peut apporter une plus-value. Le problème de la captation du  $\text{CO}_2$  dans les océans illustre cette complexité. Il s'agit d'un phénomène couplant hydrodynamique, biologie, chimie et faisant intervenir l'atmosphère et les variations climatiques. Il est caractérisé par des couplages souvent mal connus, un nombre énorme d'espèces et de réactions à considérer avec des constantes de temps très différentes, une grande variabilité spatiale/temporelle et des mesures expérimentales partielles et peu nombreuses. La taille et la complexité des problèmes rencontrés ne doivent pas être un frein à l'implication des mathématiciens dans ces disciplines. Mais étant donnée la difficulté d'y isoler des problèmes de taille et de complexité réduites, il doit s'agir d'un investissement de long terme.

## 4.1 Energies marines

Parmi les secteurs d'activité en plein essor, citons celui des énergies renouvelables ou décarbonnées. Dans le domaine marin, de nombreux systèmes sont proposés pour récupérer l'énergie des vagues, des marées et des courants marins afin de produire de l'électricité. Citons par exemple les hydroliennes, divers systèmes de bouées transformant les variations de la surface libre en électricité ou encore des turbines actionnées par l'énergie des vagues. Il s'agit de systèmes assurant une production souvent modeste par rapport à des centrales thermiques ou nucléaires mais de taille réduite et pouvant être installés facilement.

L'optimisation de ces systèmes (dispositif, forme, positionnement, faible coût d'installation, durabilité, ...) est une thématique originale et complexe qui nécessite des outils numériques performants.

Divers systèmes sont actuellement proposés et implantés mais leur optimisation est pour l'instant le talon d'Achille de ces dispositifs. Alors que dans l'aménagement d'un port, on cherche à minimiser l'agitation générée par la houle, on cherche ici à maximiser l'énergie des vagues. Un point important de cette thématique est l'optimisation de la bathymétrie d'un domaine géométrique afin, par exemple, de focaliser la houle et maximiser le rendement d'un dispositif houlo-moteur.

## 4.2 Ecologie-biodiversité

Le couplage de modèles biologiques avec l'hydrodynamique ajoute l'advection et la diffusion des quantités considérées aux termes de réaction décrivant la croissance ou la décroissance des concentrations de ces quantités. L'analyse et la simulation des modèles ainsi obtenus est complexe, les nonlinéarités sont importantes et les constantes de temps de la biologie et de l'hydrodynamique très différentes. Au sein de cette thématique très vaste, voici deux sujets que l'on décrit plus précisément.

**Les écosystèmes lacustres** Contrairement aux océans, les lacs sont des systèmes de taille plus réduite, relativement fermés (variations relatives du volume assez faibles). Ils se prêtent donc mieux à une modélisation mathématique et ce d'autant plus que l'on peut isoler la dynamique de certains groupes d'espèces.

Il s'agit de modéliser la réponse d'un lac aux forçages atmosphériques, aux évolutions climatiques ou aux éventuelles pollutions. Si on connaît bon nombre de mécanismes élémentaires responsables de cette dynamique, leur interaction dans un milieu hétérogène dans l'espace et variable dans le temps est mal maîtrisée. Citons par exemple la prédiction des phénomènes d'eutrophysation, le développement de bactéries nocives telles les cyanobactéries ou encore les phénomènes d'upwellings [27, 37].

## Des modèles mathématiques et des écoulements géophysiques

---

**Culture de micro-algues** Depuis plusieurs années et dans divers pays, on expérimente des bassins à haut rendement où l’on optimise la croissance d’algues pour en extraire un biocarburant [23, 36]. En effet, certaines espèces de microalgues à forte teneur en lipides, pourraient conduire à la production de biocarburants dits de 3ème génération. Elles offrent, par rapport à la culture de plantes supérieures (par exemple les oléagineux), des rendements potentiellement beaucoup plus grands, typiquement un ordre de grandeur.

La modélisation de l’hydrodynamique des bassins et de son couplage avec la biologie est une des clés de la réussite de tels projets. En effet, soumis à une alternance jour/nuit et à un gradient d’intensité lumineuse qui dépend des variations de leur position par rapport à la surface libre, les microalgues mettent en place des phénomènes de photoadaptation complexes. L’optimisation du régime hydrodynamique du bassin permet donc de maximiser la croissance des microalgues cultivées et donc le rendement du bassin tout en réduisant la dépense énergétique associée, par exemple, l’énergie de la roue à aubes générant l’agitation du bassin, voir Fig. 2.



FIG. 2: Un bassin pour la culture des microalgues avec la roue à aubes qui force l’agitation - Image INRA.

## 5 Conclusion

En géoscience, avec la multitude des phénomènes physiques dont on souhaite rendre compte, de nouveaux modèles sont régulièrement présentés. Il est nécessaire d’envisager la pertinence d’un modèle à la fois sous l’angle de sa capacité à reproduire des données expérimentales mais aussi sous celui de la façon dont il est dérivé et de ses propriétés (compatibilité thermo-mécanique, ...). Il est vain de chercher à développer des techniques d’analyse numérique robustes pour un modèle ne satisfaisant pas, au niveau continu, des propriétés minimales de stabilité.

Les modèles proposés ou bien ceux auxquels on s’intéresse doivent rester de complexité raisonnable par rapport aux mesures *in situ* ou expérimentales permettant de les valider. Cette complexité raisonnable est également primordiale dès lors que l’on s’intéresse à la simulation d’écoulements réels donc avec de grandes échelles spatiales et temporelles. Beaucoup de techniques numériques, validées sur des modèles 1d s’avèrent inutilisables en pratique sur des problèmes 3d car trop coûteuses en temps de calcul.

A noter qu’une fois ces modèles validés, on cherche souvent à exploiter leur caractère prédictif et pas seulement explicatif. Dans ce contexte, on est amené à s’intéresser à la résolution de problèmes inverses par exemple l’assimilation de données. Et pour des systèmes ayant une dominante hyperbolique nonlinéaire, peu diffusifs et admettant des solutions irrégulières, de nombreuses questions scientifiques sont ouvertes.

Les problématiques scientifiques décrites dans cet article sont clairement pluridisciplinaires et nécessitent des interactions fortes entre mathématiciens, géophysiciens, hydrauliciens et acteurs de terrain. La rencontre entre ces différents acteurs n’est pas toujours naturelle et l’existence de programmes ou de structures transdisciplinaires (appels à projets, GdR [1, 2], ...) doit donc être encouragée.

**Remerciements** Un grand merci à Marie-Odile Bristeau et Edwige Godlewski pour les corrections et améliorations qu’elles ont apportées.

## Bibliographie

- [1] GdR “*TransNat*” home page, <http://transnat.univ-rennes1.fr/>, 2009.
- [2] GdR “*EGRIN*” home page, <http://gdr-egrin.math.cnrs.fr/>, 2013.
- [3] B. Alvarez-Samaniego and D. Lannes, *Large time existence for 3D water-waves and asymptotics*, *Invent. Math.* **171** (2008), no. 3, 485–541. MR 2372806 (2009b :35324)
- [4] E. Audusse, *A multilayer Saint-Venant System : Derivation and Numerical Validation*, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B* **5** (2005), no. 2, 189–214.

Des modèles mathématiques et des écoulements géophysiques

- [5] E. Audusse, F. Bouchut, M.-O. Bristeau, R. Klein, and B. Perthame, *A fast and stable well-balanced scheme with hydrostatic reconstruction for Shallow Water flows*, SIAM J. Sci. Comput. **25** (2004), no. 6, 2050–2065.
- [6] E. Audusse and M.-O. Bristeau, *A well-balanced positivity preserving second-order scheme for Shallow Water flows on unstructured meshes.*, J. Comput. Phys. **206** (2005), no. 1, 311–333.
- [7] E. Audusse, M.-O. Bristeau, and A. Decoene, *Numerical simulations of 3d free surface flows by a multilayer Saint-Venant model*, Internat. J. Numer. Methods Fluids **56** (2008), no. 3, 331–350.
- [8] E. Audusse, M.-O. Bristeau, M. Pelanti, and J. Sainte-Marie, *Approximation of the hydrostatic Navier-Stokes system for density stratified flows by a multilayer model. Kinetic interpretation and numerical validation.*, J. Comp. Phys. **230** (2011), 3453–3478.
- [9] E. Audusse, M.-O. Bristeau, B. Perthame, and J. Sainte-Marie, *A multilayer Saint-Venant system with mass exchanges for Shallow Water flows. Derivation and numerical validation.*, ESAIM : M2AN **45** (2011), 169–200.
- [10] A.-J.-C. Barré de Saint-Venant, *Théorie du mouvement non permanent des eaux avec applications aux crues des rivières et à l’introduction des marées dans leur lit*, C. R. Acad. Sci. Paris **73** (1871), 147–154.
- [11] F. Bouchut, *Nonlinear stability of finite volume methods for hyperbolic conservation laws and well-balanced schemes for sources*, Birkhäuser, 2004.
- [12] F. Bouchut and V. Zeitlin, *A robust well-balanced scheme for multi-layer shallow water equations*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B **13** (2010), 739–758.
- [13] A.-C. Boulanger and J. Sainte-Marie, *Analytical solutions for the free surface hydrostatic Euler equations*, Accepted for publication in CMS (2012).
- [14] J.-V. Boussinesq, *Théorie de l’intumescence liquide appelée onde solitaire ou de translation se propageant dans un canal rectangulaire*, C. R. Acad. Sci. Paris **72** (1871), 755–759.
- [15] ———, *Théorie générale des mouvements qui sont propagés dans un canal rectangulaire horizontal*, C. R. Acad. Sci. Paris **73** (1871), 256–260.
- [16] M.-O. Bristeau, N. Goutal, and J. Sainte-Marie, *Numerical simulations of a non-hydrostatic Shallow Water model*, Computers & Fluids **47** (2011), no. 1, 51–64.
- [17] M.J. Castro, J.A. García-Rodríguez, J.M. González-Vida, J. Macías, C. Parés, and M.E. Vázquez-Cendón, *Numerical simulation of two-layer shallow water flows through channels with irregular geometry*, J. Comput. Phys. **195** (2004), no. 1, 202–235.
- [18] F. Chazel, D. Lannes, and F. Marche, *Numerical simulation of strongly nonlinear and dispersive waves using a Green–Naghdi model*, J. Sci. Comput. **48** (2011), no. 1-3, 105–116.
- [19] E.D. Fernandez-Nieto, F. Bouchut, D. Bresch, M.J. Castro Diaz, and A. Mangeney, *A new Savage-Hutter type model for submarine avalanches and generated tsunami*, Journal of Computational Physics **227** (2008), no. 16, 7720 – 7754.

Des modèles mathématiques et des écoulements géophysiques

- [20] J.-F. Gerbeau and B. Perthame, *Derivation of Viscous Saint-Venant System for Laminar Shallow Water ; Numerical Validation*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B **1** (2001), no. 1, 89–102.
- [21] E. Godlewski and P.-A. Raviart, *Numerical approximations of hyperbolic systems of conservation laws*, Applied Mathematical Sciences, vol. 118, Springer, New York, 1996.
- [22] A.E. Green and P.M. Naghdi, *A derivation of equations for wave propagation in water of variable depth.*, J. Fluid Mech. **78** (1976), 237–246.
- [23] H. Hadiyanto, Steven Elmore, Tom Van Gerven, and Andrzej Stankiewicz, *Hydrodynamic evaluations in high rate algae pond (hrap) design*, Chemical Engineering Journal **217** (2013), no. 0, 231 – 239.
- [24] R.-J. LeVeque, *Finite volume methods for hyperbolic problems*, Cambridge University Press, 2002.
- [25] P.-L. Lions, B. Perthame, and E. Tadmor, *Kinetic formulation of the isentropic gas dynamics and p-systems*, Commun. Math. Physics **163** (1994), 415–431.
- [26] P.L. Lions, B. Perthame, and P.E. Souganidis, *Existence of entropy solutions to isentropic gas dynamics system.*, Comm. Pure Appl. Math. **49** (1996), 599–638. MR 97e :35107
- [27] Salençon M.-J. and J.-M. Thébault, *Modélisation d'écosystème lacustre.*, Masson, 1997.
- [28] K. T. Mandli, *Finite Volume Methods for the Multilayer Shallow Water Equations with Applications to Storm Surges*, Ph.D. thesis, University of Washington, 2011.
- [29] A. Mangeney, *Geomorphology : Landslide boost from entrainment*, Nature Geoscience **4** (2011), no. 77, 77–88.
- [30] O. Nwogu, *Alternative form of Boussinesq equations for nearshore wave propagation*, Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering, ASCE **119** (1993), no. 6, 618–638.
- [31] D.H. Peregrine, *Long waves on a beach*, J. Fluid Mech. **27** (1967), 815–827.
- [32] O. Pouliquen and Y. Forterre, *A non-local rheology for dense granular flows*, Phil. Trans. R. Soc. A **367** (2009), no. 1909, 5091–5107.
- [33] A. Rambaud, *Modélisation, analyse mathématique et simulations numériques de quelques problèmes aux dérivées partielles multi-échelles.*, PhD, University Claude Bernard Lyon 1 - [http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/65/60/13/PDF/these\\_finale.pdf](http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/65/60/13/PDF/these_finale.pdf), 2011.
- [34] J. Sainte-Marie, *Models and numerical schemes for free surface flows. Beyond the Saint-Venant system.*, HDR, University P. & M. Curie - Paris 6 - <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00551488/>, 2010.
- [35] M.J. Salençon and J.M. Thébault, *Simulation model of a mesotrophic reservoir (Lac de Pareloup, France) : Melodia, an ecosystem reservoir management model*, Ecological modelling **84** (1996), 163–187.

Des modèles mathématiques et des écoulements géophysiques

---

- [36] B. Sialve, N. Bernet, and O. Bernard, *Anaerobic digestion of microalgae as a necessary step to make microalgal biodiesel sustainable*, *Biotechnology Advances* **27** (2009), no. 4, 409–416.
- [37] D.B. Van de Waal, J. Verspagen, J. Finke, V. Vournazou, A. Immers, W. Kardinaal, L. Tonk, S. Becker, E. Van Donk, P. Visser, and J. Huisman, *Reversal in competitive dominance of a toxic versus non-toxic cyanobacterium in response to rising  $CO_2$* , *ISME J (Journal of Microbial Ecology)* **5** (2011), no. 9, 1438–1450.

## Intégrabilité dynamique : de l'approche algébrique au calcul parallèle

par Vladimir Salnikov<sup>1</sup>  
*Prix Lavrentiev 2012*<sup>2</sup>

### Résumé

Dans cet article on discute des méthodes qui proviennent des propriétés algébriques et topologiques des systèmes intégrables pour l'analyse qualitative des systèmes dynamiques. On étudie notamment les possibilités d'utiliser des approches numériques pour tester la régularité du comportement des systèmes dynamiques. On présente également l'implémentation efficace des algorithmes liés à ce thème.

**Mots clés :** Intégrabilité, topologie d'espace de phases, théorie KAM, groupe de monodromie, approches numériques, parallélisation.

### Introduction

La question de l'intégrabilité des systèmes dynamiques est étudiée sérieusement depuis le milieu du XIX siècle. À cette époque, la principale propriété des systèmes d'équations différentielles ordinaires qui intéressait les mathématiciens (et aussi les physiciens) était l'*intégrabilité par quadratures*, c'est-à-dire la possibilité de trouver, à l'aide de l'inversion de fonctions et du calcul de primitives, une solution  $\mathbf{x}(t)$  d'un système

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \quad (1)$$

$\mathbf{x}$  et  $\mathbf{v}$  étant les variables vectorielles.

En étudiant des exemples provenant de la mécanique analytique, les scientifiques ont compris qu'il y a deux propriétés importantes du système qui facilitent la résolution du problème : l'existence du groupe de symétries continu du système (théorème de Noether), et l'existence des fonctions constantes le long des trajectoires – les intégrales premières (théorème de Liouville-Arnold) (voir [1] pour un aperçu des résultats). Pour résumer, ces observations ont été regroupées dans la définition "moderne" de l'intégrabilité au sens de Liouville-Arnold

<sup>1</sup>LMI INSA de Rouen, Avenue de l'Université, 76801, Saint-Etienne-du-Rouvray Cedex, France, vladimir.salnikov@insa-rouen.fr

<sup>2</sup>Le Prix Lavrentiev est un prix scientifique décerné chaque année à un jeune chercheur par l'Ambassade de France en Russie.

## Intégrabilité dynamique : de l’approche algébrique au calcul parallèle

---

proposée au milieu du XX siècle, le système de  $n$  degrés de liberté doit notamment posséder  $n$  intégrales premières indépendantes qui commutent au sens des crochets de Poisson.

À partir de cette formulation, la théorie des systèmes dynamiques a vécu une vraie renaissance, d’autant plus qu’il était possible de profiter des outils puissants de la géométrie symplectique et de l’analyse complexe pour étudier le comportement qualitatif des systèmes des équations différentielles ordinaires.

Le but de cet article est d’illustrer l’idée que cette théorie est actuellement en période de deuxième renaissance : d’une part le développement du calcul formel et l’accessibilité à des puissances importantes du calcul numérique permettent de surmonter les difficultés techniques pour appliquer des méthodes avancées et, d’autre part, la modélisation en mécanique, physique, chimie et biologie fournit des exemples des systèmes où l’analyse qualitative est importante pour les applications ciblées. Plus précisément, nous allons décrire deux propriétés des systèmes intégrables :

- une propriété liée à la topologie d’espace de phases,
- une propriété de branchement des solutions du système complexifié.

En se basant sur ces propriétés, nous allons proposer des algorithmes d’étude qualitative des systèmes dynamiques avec des commentaires sur leur implémentation. On va bien évidemment donner quelques exemples d’application de ces méthodes.

Avant de commencer la partie principale de cet article, nous allons mentionner quelques motivations globales d’une telle analyse. Tout d’abord les systèmes intégrables sont en quelques sortes qualitativement plus réguliers. C’est-à-dire que pour un tel système, il est raisonnable de parler de perturbation et de stabilité. Mais si le système n’est pas dans la classe des systèmes intégrables (et la plupart des systèmes n’en font pas partie), cela veut dire que son comportement est qualitativement compliqué, et que l’on peut alors anticiper la présence d’effets non-linéaires intéressants, chaotisation etc... Il y a donc deux directions naturelles de l’étude des systèmes dynamiques : la chasse aux systèmes intégrables non-artificiels et la démonstration rigoureuse de la non-intégrabilité des systèmes intéressants pour les applications.

## 1 Méthode des sections

Dans cette première partie on va s’intéresser aux systèmes dynamiques réels avec un petit nombre de degrés de liberté. L’outil principal de leur analyse va être l’étude de la topologie basique des trajectoires dans l’espace de phases.

### 1.1 Idée

On considère d’abord un système mécanique autonome avec deux degrés de liberté et on suppose que l’énergie totale  $H$  est préservée le long des trajectoires de

ce système. Pour que ce système soit complètement intégrable, on a besoin d’une intégrale première supplémentaire. La différence entre le cas où elle existe et le cas où elle n’existe pas peut être formulée en termes topologiques. Plus précisément, si une seconde intégrale première existe, on a la certitude que la trajectoire du système ne peut pas être dense sur l’ensemble de niveau  $\{H = h\}$ , puisqu’elle appartient forcément à sa sous-variété.

Pour distinguer le cas où le système n’est pas intégrable, on peut considérer l’intersection de la trajectoire avec les plans de dimension deux dans l’espace de phases. Avec la conservation de l’énergie, le résultat peut être soit un ensemble fini de points soit un ensemble fini de courbes, le dernier cas n’est possible que pour les systèmes non-intégrables (pour plus de détails sur la méthode et sa généralisation voir [2]).

## 1.2 Généralisation – théorie KAM

Il est important de comprendre que même si la présence des courbes dans les sections montre la non-intégrabilité (au moins dans la classe des intégrales premières suffisamment régulières), les points dans les sections ne prouvent pas l’intégrabilité du système. En effet, ce n’est qu’une condition nécessaire de l’intégrabilité : le théorème classique de Liouville-Arnold établit que l’espace de phases du système intégrable est feuilleté par les tores, qui sont de dimension deux dans la situation discutée, ce qui interdit la présence de courbes dans les sections. Mais globalement la situation est plus subtile : on sait (Poincaré [3]) que si on considère une perturbation d’un système intégrable, le système obtenu n’est en général plus intégrable.

Par contre le théorème de Kolmogorov–Arnold–Moser ([4]) affirme que certains tores vont préserver leur topologie, ces tores vont donner les sections contenant un nombre fini de points (que l’on va appeler les *sections régulières* par la suite). De plus, le même théorème donne une estimation de la mesure de tels tores en fonction de la perturbation, cette mesure atteint son maximum pour le système non-perturbé. Cela permet de localiser les domaines dans l’espace des paramètres quand l’intégrabilité est possible. On peut notamment étudier les différents jeux des paramètres et estimer la proportion des tores qui préservent leur topologie par une méthode de style Monte Carlo ([5]), c’est-à-dire que l’on lance plusieurs trajectoires partant des points pseudo-aléatoires d’espace de phases, et on évalue la proportion des sections régulières. Les maxima de la distribution obtenue sont les candidats aux régions de l’intégrabilité.

Avant de passer aux exemples d’applications de cette technique, nous allons donner quelques précisions sur l’implémentation. Tout d’abord l’avantage important de la méthode des sections présentée est que la propriété de non-intégrabilité est facilement repérable (on peut même automatiser ce procédé). Cela veut dire qu’étant donné un système que l’on peut réduire à un espace de phases de dimension quatre, cette méthode fournit l’image de son comportement qualitatif sans interaction avec l’utilisateur. La seule chose qu’il ne faut pas négliger, c’est

Intégrabilité dynamique : de l’approche algébrique au calcul parallèle

le temps de calcul : sachant que l’intersection d’une trajectoire avec un plan de dimension deux dans un espace de dimension quatre est un événement rare, nous sommes obligés de considérer les trajectoires assez longues. Mais comme toutes les simulations sont indépendantes, ce calcul est parfaitement parallélisable.

### 1.3 Illustration – les toupies

On va maintenant considérer l’exemple du mouvement d’un corps solide avec un point fixe – un exemple classique qui a motivé (ainsi que le problème de mouvement de trois corps gravitants) le développement des méthodes de l’analyse de l’intégrabilité.

On étudie donc la rotation d’un corps solide de masse  $m$  autour d’un point fixe  $O$  dans un champs de pesanteur constant,  $g$  étant la constante gravitationnelle. Les caractéristiques physiques de ce système sont la position de centre de gravité par rapport à un point fixe  $\mathbf{r}$  et la matrice d’inertie  $J$ . Pour simplifier les équations de mouvement, il est pratique de choisir un repère associé aux axes de symétrie, c’est-à-dire les directions propres de  $J$  avec les valeurs propres que l’on note  $A, B, C$  (les moments d’inertie principaux). Pour décrire l’état du système, il suffit de donner les composantes du vecteur de pesanteur  $\gamma$  et la vitesse angulaire  $\omega$  qui sont soumises au système d’équations dit d’Euler–Poisson :

$$J\dot{\omega} + \omega \wedge J\omega = -m\mathbf{g}\mathbf{r} \wedge \gamma, \quad \dot{\gamma} + \omega \wedge \gamma = 0.$$

Les équations d’Euler-Poisson possèdent trois intégrales premières :

$$H \equiv \frac{1}{2}J\omega \cdot \omega + m\mathbf{g}\mathbf{r} \cdot \gamma, \quad K \equiv J\omega \cdot \gamma, \quad l^2 \equiv \|\gamma\|^2.$$

Sur l’ensemble de niveau

$$M = \{(\omega, \gamma), K = k, l^2 = 1\}$$

les équations d’Euler-Poisson sont hamiltoniennes, on a donc un système mécanique réduit à deux degrés de liberté où  $H|_M$  est l’intégrale de l’énergie. La condition nécessaire et suffisante pour que ce système soit intégrable est l’existence d’une deuxième intégrale première indépendante de  $H$ .

On peut donc étudier cela à l’aide de la *méthode des sections*. Le calcul<sup>3</sup> pour tous les jeux des paramètres étant un peu difficile à visualiser, on ne va présenter que les situations remarquables.

Commençons par le cas des valeurs arbitraires de  $A, B, C$  et faisons varier les valeurs de  $\mathbf{r} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$  autour de 0. Par exemple, pour  $b = c = 0$  la dépendance de la proportion des systèmes réguliers de valeur de  $a$  est donnée sur la figure 1. Le maximum évident en  $a = 0$  correspond au cas intégrable d’Euler (1758), quand le centre de gravité est fixé, et l’intégrale supplémentaire est le moment cinétique :

<sup>3</sup>Le calcul a été fait au LMI – INSA de Rouen, en utilisant la technologie CUDA de programmation pour GPU. La carte graphique adaptée a été financée par le prix "Lavrentiev 2012"

Intégrabilité dynamique : de l'approche algébrique au calcul parallèle

$\|J\omega\|^2 = \text{const.}$  Ce n'est peut-être pas évident d'imaginer un corps solide avec le centre de gravité fixé – il faut par exemple penser aux objets donnés sur la figure 2.

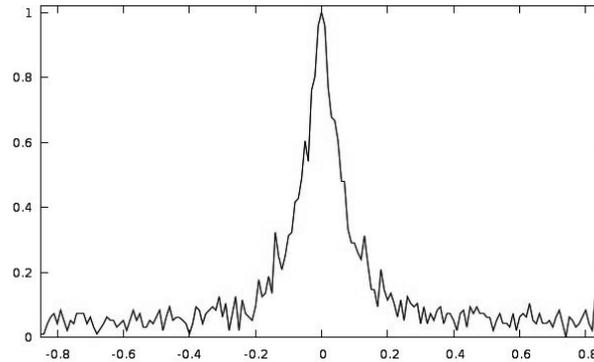


FIG. 1: Le cas d'Euler



FIG. 2: Exemples de corps solides avec un point fixe. *Gauche* : oiseau équilibriste. *Droite* : Roue.

On prend maintenant un corps dynamiquement symétrique, c'est-à-dire il y a (au moins) deux moments principaux d'inertie qui coïncident. On fixe  $A = B$  et on choisit le vecteur  $\mathbf{r}$  dans le plan des directions propres correspondantes. La figure 3 montre la dépendance de la proportion des sections régulières de la valeur de  $C$ . On voit clairement deux maxima : le premier correspond au cas de Kovalevs-kaya (1889), avec  $A = B = 2C$  et le centre de gravité est dans le plan orthogonal

Intégrabilité dynamique : de l'approche algébrique au calcul parallèle

de l'axe de symétrie passant par le point fixe. Le deuxième maximum est celui de Lagrange (1788), un corps symétrique avec le centre de gravité sur l'axe de symétrie, l'intégrale supplémentaire étant la projection du moment cinétique sur l'axe de symétrie. De tels corps sont par contre plus habituels : ce sont les toupies (figure 4) où l'on peut considérer le point de contact avec la surface comme étant un point fixe. Même en représentant les cas assez simples des systèmes dynamiques, les toupies représentent un exemple important pour les applications. Si l'on considère les systèmes perturbés associés, les phénomènes dynamiques intéressants se produisent comme dans le cas d'un anagyre ou du tippe-top (figure 4).

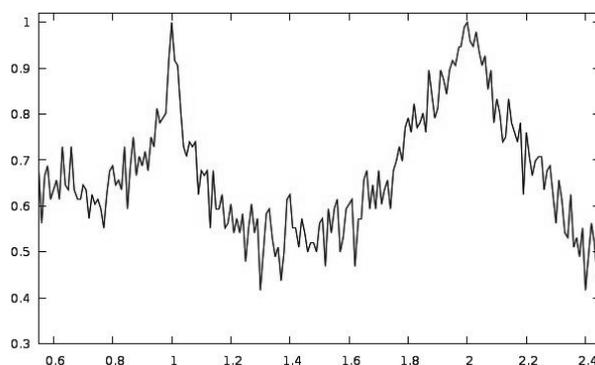


FIG. 3: Les cas de Kovalevskaya et de Lagrange



FIG. 4: Exemples des corps solides avec un point fixe. *Gauche* : Toupie. *Centre* : Anagyre. *Droite* : Tippe-top.

Le problème de l'existence des autres cas intégrables était ouvert depuis assez longtemps, il a été résolu complètement par S.L. Ziglin (au moins pour les intégrales d'une certaine classe) – on va préciser cela dans la deuxième partie de cet article.

## 1.4 Application – pendules

Pour conclure cette partie de l’article, nous allons décrire une autre application de la méthode présentée. Il s’agit du mouvement des systèmes de type pendule, le but principal de cette illustration est de donner l’idée du procédé pour l’analyse de plusieurs paramètres. On considère le mouvement libre planaire du système mécanique (figure 5) qui ressemble à un pendule triple. Ce système est caractérisé par deux paramètres  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  représentant les positions de fixation des segments.

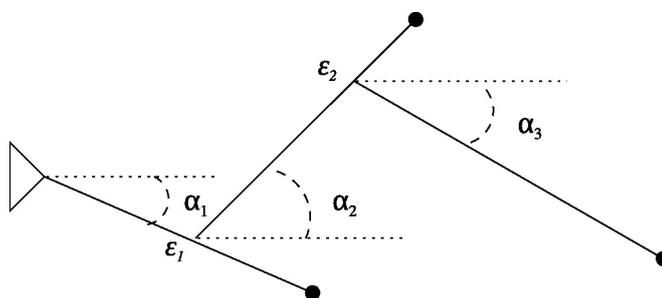


FIG. 5: Le système de type pendule triple caractérisé par des angles.

Comme on le voit facilement, le nombre de degrés de liberté est trois, par conséquent l’espace des phases est de dimension six, on ne peut pas appliquer la méthode des sections directement. Mais ce système a une intégrale première de moment cinétique liée à la symétrie rotationnelle, ce qui permet de réduire l’espace des phases à la dimension quatre, en utilisant la transformation de Routh ([6]) et l’on peut ensuite appliquer la méthode.

L’intégrabilité de cette famille de systèmes a été étudiée dans [2]. Sur la figure 6, nous donnons la distribution des sections régulières en fonction des paramètres<sup>4</sup>.

À partir de ces images, on voit bien que les sections régulières s’accumulent près du segment  $\varepsilon_1 = 0$ . C’est-à-dire que l’on a montré que les systèmes de type pendule ne sont intégrables que dans les cas triviaux, quand le système se divise en parties de dimension plus petite.

## 2 Monodromie

Dans la deuxième partie de cette article on va discuter de la méthode de l’étude de l’intégrabilité qui utilise les approches de l’analyse complexe et les groupes

<sup>4</sup>Ce calcul a été fait au Centre de Calcul A. A. Dorodnitsyn de l’Académie des Sciences de Russie et à l’Institut Camille Jordan de l’Université Claude Bernard Lyon 1

Intégrabilité dynamique : de l'approche algébrique au calcul parallèle

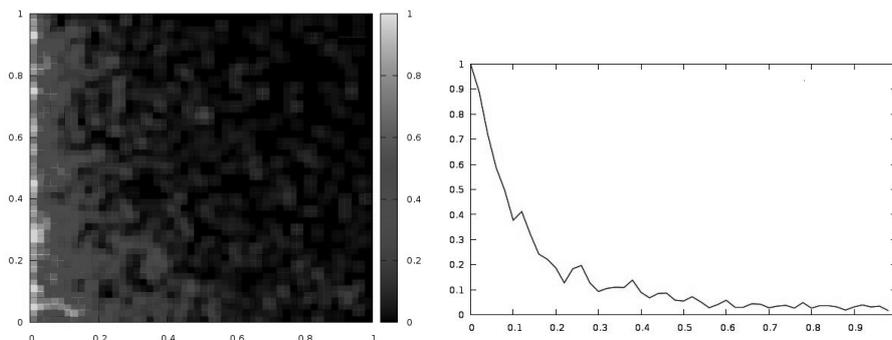


FIG. 6: Distribution des sections régulières. *Gauche* : Dépendance de  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in (0, 1) \times (0, 1)$ . *Droite* : Dépendance de  $\varepsilon_1 \in (0, 1)$ .

algébriques. L'idée globale de base de telles méthodes est de restreindre la classe des intégrales premières "admissibles". Par exemple, on peut considérer la classe des intégrales polynomiales ou prolongeables vers les fonctions méromorphes.

## 2.1 Théorie de Ziglin

On peut trouver un bon aperçu des méthodes modernes dans [7], ici on va donner un survol de la méthode de S.L. Ziglin qui a proposé un schéma de l'étude des systèmes dynamiques à l'aide de groupe des automorphismes spécifiques.

On considère la version complexifiée du système (1) :

$$\frac{dx}{dz} = v(x), \quad (2)$$

où  $x$  appartient à une variété complexe,  $z$  est le temps complexe et les parties droites  $v$  sont des fonctions holomorphes.

L'idée principale consiste à étudier le branchement des solutions des équations de mouvement. Si le système (2) a des solutions complexes branchées, cela ne l'empêche pas d'être intégrable, par contre le branchement des solutions du système dit *aux variations* peut donner une obstruction à l'intégrabilité. Plus précisément, on considère  $x_0(z)$  – une surface de Riemann de la solution particulière de (2) et on construit le long de cette solution un système non-autonome :

$$\dot{\xi} = A\xi, \quad A = \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=x_0(z)} \quad (3)$$

Étant linéaire, le système (3) possède une base de solutions fondamentales. Si on construit une solution le long d'une boucle sur  $x_0$ , cette base change, et le changement est géré par une matrice, qui s'appelle une matrice de monodromie. L'ensemble de ces matrices forme un groupe représenté dans le groupe fondamental de  $x_0$ .

Le résultat de Ziglin ([8]) est que le groupe de monodromie du système intégrable est commutatif modulo certains cas très spécifiques. C'est en utilisant cette méthode que Ziglin a démontré la non-intégrabilité du problème de corps solide sauf les cas classiques.

## 2.2 Algorithme effectif

On peut voir que dans la méthode basée sur le résultat de Ziglin il y a deux étapes difficiles : il faut connaître une solution particulière non-triviale et il faut que cette solution ne soit pas trop compliquée pour pouvoir calculer le groupe de monodromie. Cela veut dire qu'on ne sait étudier que les systèmes assez "triviaux", qui possèdent une certaine symétrie ; et pour les systèmes "non triviaux", où on est sûr que le comportement est non-régulier, on ne sait rien démontrer ! C'est assez naturel de proposer l'utilisation des méthodes numériques pour résoudre ce problème, mais il y a étonnement peu de travaux sur ce sujet. On peut seulement citer les articles [9, 10] où les auteurs utilisent les approches numériques pour traiter la deuxième difficulté du calcul du groupe pour les cas où la solution particulière est connue.

Nous allons maintenant décrire l'algorithme qui est expliqué en détail dans [11] : l'application effective de l'approche de Ziglin avec l'utilisation de la solution particulière obtenue numériquement. Une chose essentielle à comprendre est que la solution ne doit pas être vue comme une fonction du temps, mais comme un ensemble de valeurs qui dépendent d'un chemin dans le plan complexe de temps. On va donc résoudre les deux systèmes (2) et (3) simultanément – cela donne le système

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}) \\ \dot{\Xi} = A(\mathbf{x})\Xi, \end{cases} \quad (4)$$

où la deuxième ligne est une équation matricielle où  $\mathbf{x}$  n'est pas remplacé par une solution particulière  $\mathbf{x}_0$ .

L'algorithme effectif est le suivant :

- i. écrire (analytiquement) le système (4) sans fixer la solution particulière.
- ii. Choisir un domaine borné dans  $\mathbb{C}$  et un réseau de points dans ce domaine avec un point  $t_0$  marqué.
- iii. Pour chaque point, choisir une boucle de  $t_0$  l'"entourant". Intégrer numériquement le système (4) le long de cette boucle avec  $\Xi(t_0) = id$  et  $\mathbf{x}(t_0)$  – arbitraire (comme une condition initiale). Les trois cas possibles sont :
  1.  $\mathbf{x}$  et  $\Xi$  reviennent aux valeurs initiales – ce point correspond à la transformation triviale du groupe de monodromie.
  2. Les valeurs de  $\mathbf{x}$  ne reviennent pas aux valeurs initiales – continuer l'intégration le long de cette boucle.
  3. Les valeurs de  $\mathbf{x}$  reviennent aux valeurs initiales après un nombre fini des boucles parcourues mais pas les valeurs de  $\Xi$  – stocker la matrice  $\Xi$ , ceci est un générateur du groupe de monodromie.

## Intégrabilité dynamique : de l’approche algébrique au calcul parallèle

- iv. Calculer les commutateurs des matrices obtenues dans iii.3. Si parmi eux il y a des commutateurs non-nuls, conclure la non-intégrabilité ; sinon changer la valeur initiale de  $x$  pour l’étape iii et répéter celle-là .

Faisons quelques remarques par rapport à cet algorithme. Il permet tout d’abord de montrer la non-intégrabilité pour les cas où la solution de (2) revient aux valeurs initiales après un nombre fini de tours le long des boucles dans  $C$ . Mais si cela ne se produit pas, cela veut dire que le système ne satisfait pas la propriété de Painlevé et donc (au moins pour le mouvement dans un domaine compact d’espace de phases) n’admet pas d’intégrales analytiques. De point de vue numérique, on voit aussi que la condition qui permet de conclure la non-intégrabilité est une condition de type inégalité, que l’on peut donc garantir. On voit aussi que l’utilisation de cette méthode ne nécessite pas trop d’interaction avec l’utilisateur. Les solutions obtenues en intégrant le long des boucles différentes étant indépendantes, l’algorithme est aussi bien parallélisable.

### 2.3 Application – pendule triple

Sans trop entrer dans les détails, on va dire que l’algorithme présenté a été appliqué dans [11] pour démontrer la non-intégrabilité des systèmes divers d’origine physique, tels que le système d’Hénon-Heiles, du satellite symétrique, et du pendule triple que l’on a discuté à la première partie de cet article.

Pour ce dernier, on va quand-même dire quelques mots sur l’aspect pratique de l’application. D’habitude, lorsqu’on applique les méthodes algébriques analytiquement, le problème de réduction et de simplification du système se pose. Mais l’algorithme dont on discute ici ne dépend ni de la taille ni de la complexité du système en question. Le pendule triple est un système qui peut être étudié soit comme un système dynamique dans l’espace des configurations  $\mathbb{R}^6$  avec les trois contraintes mécaniques, soit dans l’espace  $\mathbb{T}^3$  avec les contraintes résolues, soit dans l’espace réduit après la transformation de Routh. Le choix entre ces trois options est la question de l’équilibre de calcul analytique et de la taille du système analysé par l’algorithme. Dans l’article [11], le choix de la troisième option a été fait avec le but de comparer les résultats de calcul complexe avec la sortie de procédé des sections de [2]. La seule difficulté technique pour ce choix est la nécessité de calculer explicitement les parties droites de (4), cela peut être fait en utilisant le logiciel de calcul formel (“Sage” par exemple – [12]).

## Conclusions

Pour récapituler, dans cet article nous avons discuté de deux méthodes de l’analyse qualitative des systèmes dynamique liées à l’étude de l’intégrabilité. La première permet de donner une image globale de la régularité du comportement du système et de localiser les domaines réguliers éventuels dans l’espace des paramètres. La deuxième est plus adaptée à l’analyse des systèmes concrets. Les deux

sont des exemples de "computer assisted proof", c'est-à-dire permettent de démontrer rigoureusement les résultats mathématiques en utilisant les méthodes numériques.

Pour les problèmes concrets on peut aussi penser les combiner, c'est-à-dire d'abord analyser l'espace des paramètres avec la méthode des sections et étudier ensuite les cas intéressants (ou douteux !) avec l'approche de l'analyse complexe.

Pour conclure on va mentionner quelques problèmes ouverts qui suscitent notre intérêt pour ces méthodes : la motivation principale est l'analyse qualitative des systèmes provenant de la mécanique céleste relativiste et de la biologie. Le premier sujet porte sur une modification naturelle du problème de corps gravitant : si on considère la loi de Newton avec la vitesse finie de propagation de l'interaction, on obtient un système dynamique avec le retard. La première question dans ce cas là consiste à classifier les solutions bornées possibles. Dans le cas classique (avec la propagation immédiate de l'interaction) ces solutions correspondent aux trajectoires plus régulières que les trajectoires génériques. En ce qui concerne le deuxième sujet en biologie, il s'agit des modèles de la dynamique des populations adaptés récemment aussi pour la description simplifiée de la réponse immunitaire dans le contexte des maladies de type cancer. Pour ces systèmes, le problème important est la recherche des points d'équilibre ou des solutions de type cycles limites. Pour ces deux exemples les effets mentionnés peuvent être repérés avec les procédés proposés dans cet article.

**Remerciements.** L'auteur souhaite remercier les participants du workshop DISCo-2012 – "Integrability in Dynamical Systems and Control" pour les discussions enrichissantes liées au sujet de cet article.

## Bibliographie

- [1] Kozlov V V, *Symmetries, Topology and Resonances in Hamiltonian Mechanics*, Springer, 1996.
- [2] Salnikov V, On numerical approaches to the analysis of topology of the phase space for dynamical integrability, preprint math.DS/1206.3801.
- [3] Poincaré H, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, Vol. 1-2. – Paris, Gauthier-Villars, 1893., JFM 25.1847.03 ;  
Poincaré H, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, séance du mardi 7 juin 1892.
- [4] Arnold V I, Kozlov V V, Neistadt A I, *Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics*, Springer, 2006.
- [5] Metropolis N, Ulam S, *J. Amer. statistical assoc.* **44**, **247**, 335–341, 1949.
- [6] Appel P., *Traité de mécanique rationnelle*, Paris, Éditions Jacques Gabay, 1991.
- [7] Audin M, *Les systèmes hamiltoniens et leur intégrabilité*, Cours Spécialisés, SMF et EDP Sciences, 2001.
- [8] Ziglin S L, *Fun. Anal. Appl.*, **16** and **17**, 1982.

Intégrabilité dynamique : de l'approche algébrique au calcul parallèle

---

- [9] Roekaerts D, Yoshida H, *J. Phys. A : Math. Gen.* **21**, 3547-3557, 1988.
- [10] Maciejewski A J, Godziewski K, *Reports on Math. Phys.* **44**, 133-142, 1999.
- [11] Salnikov V, Effective algorithm of analysis of integrability via the Ziglin's method, preprint math.DS/1208.6252.
- [12] <http://www.sagemath.org/>

*Mathématiques & Applications*  
Collection de la SMAI éditée par Springer-Verlag  
Directeurs de la collection : J. Garnier et V. Perrier

DES NOUVELLES DE LA COLLECTION MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS

*Par Josselin Garnier et Valérie Perrier*

La collection Mathématiques et Applications, créée par la SMAI à la fin des années 80, a pour vocation l'édition de cours avancés de Master (M2), d'école doctorale ou de dernière année d'école d'ingénieurs. Certains ouvrages peuvent avoir une vocation purement pédagogique alors que d'autres constituent des textes de référence. Le premier volume paraît chez Ellipses en 1990, puis à partir du numéro 10, en 1992, la publication est assurée par l'éditeur Springer. Aujourd'hui, 73 volumes sont publiés, et leurs contenus reflètent la diversité à la fois des outils comme des applications. Les sujets abordés couvrent les domaines classiques des mathématiques appliquées : analyse numérique et équations aux dérivées partielles, probabilités et statistiques, optimisation, recherche opérationnelle, systèmes dynamiques, jusqu'à la théorie des jeux ou les méthodes algébriques... Les livres concernent aussi bien des aspects comme la modélisation et l'analyse mathématique que des développements algorithmiques et le calcul, ou encore des applications très spécifiques à un domaine donné. De ce point de vue, ces 73 volumes reflètent la très grande richesse des mathématiques en interaction avec d'autres disciplines comme : la physique statistique, la mécanique, la mécanique des fluides, la mécanique céleste, l'électromagnétisme, la chimie, l'optique, les sciences du vivant, l'informatique, l'automatique, le traitement d'image, la finance, la cryptographie. Les derniers numéros parus sont :

- Bases, outils et principes pour l'analyse variationnelle, par Jean-Baptiste Hiriart-Urruty (Nr 70),
- Mouvements browniens, martingales et calcul stochastique, par Jean-Francois Le Gall (Nr 71),
- Equations aux dérivées partielles elliptiques non linéaires, par Hervé Le Dret (Nr 72),
- Fractional fields and applications, par Serge Cohen et Jacques Istas (Nr 73).

Comme tous les 4 ans, le comité éditorial a vu sa composition évoluer en 2012 : il s'agit de pouvoir représenter ces différents aspects des mathématiques appliquées, et aussi les thématiques "phares" de la SMAI portées par ses groupes : GAMNI, MAS, MODE, SIGMA (ex-groupe AFA renommé pour intégrer les mathématiques de l'image et la modélisation géométrique) ainsi que le récent groupe MAIRCI qui représente le calcul sous toutes ses formes (scientifique, formel, haute performance...).

Grégoire Allaire, co-directeur très actif de la collection depuis 2005, passe la main, et nous le remercions chaleureusement pour son investissement ! Les actuels directeurs de la collection sont Josselin Garnier (université Paris VII) et Valérie Perrier (université de Grenoble). La composition du Comité Editorial 2012 est désormais celle donnée sur la page suivante.

MATAPLI n° 100- Mars 2013

---

Nous encourageons vivement la soumission de manuscrits (en français ou anglais) : les textes ou projets peuvent être soumis directement à l’un des membres du comité éditorial, avec copie à V. Perrier ([valerie.perrier@imag.fr](mailto:valerie.perrier@imag.fr)) ou J. Garnier ([garnier@math.univ-paris-diderot.fr](mailto:garnier@math.univ-paris-diderot.fr)).

**MATHÉMATIQUES & APPLICATIONS :**  
**Comité de Lecture 2012–2015**

Rémi ABGRALL, INRIA et Inst. Polytechnique de Bordeaux, FR, [remi.abgrall@inria.fr](mailto:remi.abgrall@inria.fr)  
Grégoire ALLAIRE, CMAP, École Polytechnique, Palaiseau, FR, [gregoire.allaire@polytechnique.fr](mailto:gregoire.allaire@polytechnique.fr)  
Michel BENAÏM, Inst. Math., Univ. de Neuchâtel, CH, [michel.benaim@unine.ch](mailto:michel.benaim@unine.ch)  
Maitine BERGOUNIOUX, MAPMO, Université d’Orléans, FR, [maitine.bergounioux@univ-orleans.fr](mailto:maitine.bergounioux@univ-orleans.fr)  
Thierry COLIN, Inst. Polytechnique de Bordeaux, FR, [colin@math.u-bordeaux1.fr](mailto:colin@math.u-bordeaux1.fr)  
Marie-Christine COSTA, UMA, ENSTA, Paris, FR, [marie-christine.costa@ensta.fr](mailto:marie-christine.costa@ensta.fr)  
Arnaud DEBUSSCHE, ENS Cachan, Bruz, FR, [arnaud.debussche@bretagne.ens-cachan.fr](mailto:arnaud.debussche@bretagne.ens-cachan.fr)  
Isabelle GALLAGHER, Inst. Math. Jussieu, Univ. Paris 7, FR, [gallagher@math.univ-paris-diderot.fr](mailto:gallagher@math.univ-paris-diderot.fr)  
Josselin GARNIER, Lab. Proba. et Mod. Aléatoires, Univ. Paris 7, FR, [garnier@math.univ-paris-diderot.fr](mailto:garnier@math.univ-paris-diderot.fr)  
Stéphane GAUBERT, INRIA, Saclay - Île-de-France, Orsay, FR, [stephane.gaubert@inria.fr](mailto:stephane.gaubert@inria.fr)  
Emmanuel GOBET, CMAP, École Polytechnique, Palaiseau, FR, [emmanuel.gobet@polytechnique.edu](mailto:emmanuel.gobet@polytechnique.edu)  
Raphaele HERBIN, CMI LATP, Université d’Aix-Marseille, FR, [raphaele.herbin@latp.univ-mrs.fr](mailto:raphaele.herbin@latp.univ-mrs.fr)  
Marc HOFFMANN, CEREMADE, Université Paris-Dauphine, FR, [hoffmann@ceremade.dauphine.fr](mailto:hoffmann@ceremade.dauphine.fr)  
Claude LE BRIS, CERMICS, ENPC, Marne la Vallée, FR, [lebris@cermics.enpc.fr](mailto:lebris@cermics.enpc.fr)  
Sylvie MELEARD, CMAP, École Polytechnique, Palaiseau, FR, [sylvie.meleard@polytechnique.edu](mailto:sylvie.meleard@polytechnique.edu)  
Felix OTTO, Max Planck Institute, Leipzig, GE, [otto@mis.mpg.de](mailto:otto@mis.mpg.de)  
Valérie PERRIER, Lab. Jean-Kunzmann, ENSIMAG, Grenoble, FR, [valerie.perrier@imag.fr](mailto:valerie.perrier@imag.fr)  
Philippe ROBERT, INRIA Rocquencourt, Le Chesnay, FR, [philippe.robert@inria.fr](mailto:philippe.robert@inria.fr)  
Pierre ROUCHON, Automatique et Systèmes, École Mines, Paris, FR, [pierre.rouchon@ensmp.fr](mailto:pierre.rouchon@ensmp.fr)  
Bruno SALVY, INRIA, LIP - ENS Lyon, FR, [bruno.salvy@inria.fr](mailto:bruno.salvy@inria.fr)  
Annick SARTENAER, Dept. Mathématiques, Univ. Namur, BE, [annick.sartenaer@fundp.ac.be](mailto:annick.sartenaer@fundp.ac.be)  
Eric SONNENDRÜCKER, Max-Planck-Institut, Garching, GE, [eric.sonnendruecker@ipp.mpg.de](mailto:eric.sonnendruecker@ipp.mpg.de)  
Alain TROUVÉ, CMLA, ENS Cachan, FR, [trouve@cmla.ens-cachan.fr](mailto:trouve@cmla.ens-cachan.fr)  
Cédric VILLANI, Université de Lyon et IHP, Paris, FR, [villani@ihp.fr](mailto:villani@ihp.fr)  
Enrique ZUAZUA, BCAM, Bilbao, ES, [zuazua@bcamath.org](mailto:zuazua@bcamath.org)

**Directeurs de la collection : J. GARNIER et V. PERRIER**

---

### Mathématiques & Applications

- Vol 60 N. Caspard, B. Monjardet, B. Leclerc, *Ensembles ordonnés finis : concepts, résultats et usages*, 2007, 340 p., 58 €- tarif SMAI : 46,60 €
- Vol 61 H. Pham, *Optimisation et contrôle stochastique appliqués à la finance*, 2007, 188 p., 35 €- tarif SMAI : 28 €
- Vol 62 H. Ammari, *An Introduction to Mathematics of Emerging Biomedical Imaging*, 2008, 205 p., 46 €- tarif SMAI : 36,80 €
- Vol 63 C. Gaetan, X. Guyon, *Modélisation et statistique spatiales*, 2008, 330 p., 64 €- tarif SMAI : 51.20 €
- Vol 64 J.-M. Rakotoson, *Réarrangement relatif*, 2008, 320 p., 64 €- tarif SMAI : 51.20 €
- Vol 65 M. Choulli, *Elementary Feedback Stabilization of the Linear Reaction-convection-diffusion Equation and the Wave Equation*, 2010, 300 p., 64 €- tarif SMAI : 51.20 €
- Vol 66 W. Liu, *Une introduction aux problèmes inverses elliptiques et paraboliques*, 2009, 270 p., 95 €- tarif SMAI : 76 €
- Vol 67 W. Tinson, *Plans d'expérience : constructions et analyses statistiques*, 2010, 530 p., 100 €- tarif SMAI : 80 €
- Vol 68 B. Desprès, *Lois de conservation Eulériennes, Lagrangiennes et méthodes numériques*, 2010, 530 p., 55 €- tarif SMAI : 44 €
- Vol 69 D.A. Di Pietro, A. Ern, *Mathematical aspects of discontinuous Galerkin methods*, 2012, 384 p., 89,95 €- tarif SMAI : 71,95 €
- Vol 70 J. B. Hiriart-Urruty, *Bases, outils et principes pour l'analyse variationnelle* 2013, à partir de 34,99 €
- Vol 71 J. F. Le Gall, *Mouvement brownien, martingales et calcul stochastique* 2013, à partir de 26,99 €
- Vol 72 H. Le Dret, *Équations aux dérivées partielles elliptiques non linéaires* 2013, à partir de 34,99 €
- Vol 73 S. Cohen et J. Istas, *Fractional Fields and Applications* 2013, à partir de 42,19 €

*Le tarif SMAI (20% de réduction) et la souscription (30% sur le prix public) sont réservés aux membres de la SMAI.*

Pour obtenir l'un de ces volumes, adressez votre commande à :

Springer-Verlag, Customer Service Books -Haberstr. 7, D 69126 Heidelberg/ Allemagne

Tél. 0 800 777 46 437 (No vert) - Fax 00 49 6221 345 229 - e-mail : orders@springer.de

Paiement à la commande par chèque à l'ordre de Springer-Verlag ou par carte de crédit (préciser le type de carte, le numéro et la date d'expiration).

Prix TTC en France (5,5% TVA incl.). Au prix des livres doit être ajoutée une participation forfaitaire aux frais de port : 5 euros (+ 1,50 euros par ouvrage supplémentaire).

---

## Thèses en ligne !

Le service TEL (<http://tel.archives-ouvertes.fr/>) est dédié à l’archivage des thèses et des Habilitations à Diriger les Recherches. Il est modelé sur le serveur de prépublications HAL. Ces services ont été créés par le CCSD (Centre pour la Communication Scientifique Directe). TEL est géré en collaboration avec Mathdoc et la Société Française de Physique.

Le dépôt des thèses est libre, la vérification concerne seulement la pertinence du classement thématique et la correction des données administratives, comme pour HAL.

Tout nouveau docteur (ou habilité) peut ainsi rendre visible (en 24 heures environ) son document de soutenance, ce qui ne peut qu’être encouragé !

Thierry Dumont.

## Résumés de thèses

*par* Carole LE GUYADER

Il est rappelé aux personnes qui souhaitent faire apparaître un résumé de leur thèse ou de leur HDR que celui-ci ne doit pas dépasser une trentaine de lignes. Le non-respect de cette contrainte conduira à une réduction du résumé (pas forcément pertinente) par le rédacteur en chef, voire à un refus de publication.

### HABILITATIONS À DIRIGER DES RECHERCHES

**Gabriel STOLTZ**

#### **Simulation moléculaire : Problèmes dynamiques et hors d'équilibre**

*Soutenue le 18 juin 2012*

*Université Paris Est, CERMICS/Ecole des Ponts et équipe MICMAC, INRIA  
Rocquencourt*

L'objectif de la simulation moléculaire est de comprendre et prédire les propriétés macroscopiques des matériaux à partir de leur description à l'échelle microscopique. Ce mémoire présente quelques contributions à ce sujet, pour des modèles de la physique statistique et de la physique quantique.

Mes travaux en physique statistique numérique peuvent être classés en deux catégories : le calcul de propriétés d'équilibre, l'accent étant porté sur le calcul de différences d'énergie libre (chapitre 2), et l'étude de dynamiques hors d'équilibre en régime permanent pour le calcul de propriétés de transport (chapitre 3). Dans les deux cas, les méthodes numériques reposent sur des dynamiques hors d'équilibre ou nonlinéaires, la distinction entre ces classes de méthodes provenant du fait que l'état invariant du système est soit un état d'équilibre (éventuellement, à une correction près) ou un état hors d'équilibre.

Le chapitre 4 présente quelques résultats pour des dynamiques quantiques : fictives, comme pour la transition adiabatique d'états dégénérés ; ou authentiques, comme pour l'évolution en temps des défauts locaux dans les cristaux.

**Rodolphe TURPAULT**

**Modélisation, analyse numérique et simulations de phénomènes complexes pour des systèmes hyperboliques de lois de conservation avec termes sources raides et en électrocardiologie**

*Soutenue le 22 octobre 2012*

*Laboratoire de Mathématiques Jean Leray, Université de Nantes*

Ces travaux s’articulent autour de deux thèmes principaux. Le premier concerne des systèmes hyperboliques de lois de conservation avec termes source potentiellement raides. Ces systèmes dégénèrent en temps long et quand le terme source devient raide en des systèmes plus petits de type diffusion (voire plus complexes). On construit une classe de schémas numériques préservant ces asymptotiques qui soit à la fois relativement générique en termes de systèmes pris en compte et de schémas numériques dans les deux limites (hyperbolique et parabolique), qui possèdent de bonnes propriétés et qui soient facile à implémenter. Cette technique, basée sur une modification d’un solveur de Riemann approché pour la partie hyperbolique, s’étend naturellement en dimension supérieure à 1 sur des maillages non-structurés. L’application principale dans cette première partie est le transfert radiatif, à la fois dans des contextes de rentrée atmosphérique, de radiothérapie et de rayonnement dans les nuages. Des modèles *ad hoc* sont proposés et étudiés, en particulier un modèle hybride cinétique/moments. Enfin, un schéma numérique de type GRP espace/temps d’ordre arbitrairement élevé et sans restriction sur le pas de temps est proposé pour approcher des systèmes hyperboliques linéaires avec terme source.

Le second thème concerne l’électrocardiologie. Dans l’objectif de construire un code de calcul afin de réaliser des simulations de la propagation du potentiel électrique dans le cœur, on présente trois résultats originaux. Tout d’abord un schéma numérique de type volumes finis à dualité discrète, adapté aux fortes anisotropies des modèles considérés, puis un modèle du réseau de conduction rapide et des jonctions Purkinje/muscle et enfin une méthode intégrale permettant d’obtenir des électrogrammes à moindre coût numérique. Pour finir, on présente un résultat obtenu en collaboration avec des collègues biologistes de l’Institut du Thorax de Nantes, pour lesquelles la simulation numérique permet de valider le diagnostic et l’impact des traitements pour une maladie génétique.

**Carole LE GUYADER**

**Contribution à l'analyse mathématique d'images : segmentation, registration et décomposition**

*Soutenue le 16 novembre 2012*

*INSA Rouen & Université de Rouen*

Ce mémoire synthétise les travaux réalisés depuis ma thèse de doctorat (soutenue en décembre 2004) en tant que Maître de Conférences à l'INSA de Rennes (2005-2009) puis à l'INSA de Rouen (2009-2012). Ils s'inscrivent dans la continuité des travaux effectués durant mon doctorat consacrés à la segmentation sous contraintes géométriques par méthodes variationnelles et équations aux dérivées partielles, puisqu'ils se focalisent sur des thématiques relatives au traitement d'images. Néanmoins, si les premiers travaux réalisés après ma thèse demeurent liés à la problématique de la segmentation, les suivants ont permis d'élargir mon champ d'études et de développer d'autres aptitudes dans des domaines dans lesquels je n'étais pas spécialiste (théorie de l'élasticité non-linéaire, théorie des solutions de viscosité pour les problèmes non-locaux, théorie de l'approximation, etc.).

Mes travaux gravitent donc autour de 4 axes majeurs liés à l'imagerie mathématique et à la théorie de l'approximation, et privilégient les approches de type variationnel : dans un espace adéquat, on construit une fonctionnelle dont le minimiseur correspond à la quantité recherchée. Puis, pour caractériser et calculer explicitement une solution, l'outil essentiel utilisé est l'équation d'Euler-Lagrange. Ces travaux se déclinent de la manière suivante :

1. La segmentation d'images qui consiste à détecter et à visualiser les contours des objets présents dans une image, avec comme finalité la quantification de l'information, comme par exemple la volumétrie : volume d'une tumeur dans le cerveau, étude de la cavité ventriculaire cardiaque, etc..
2. La 'registration', qui étant données deux images dites *Reference* et *Template*, consiste à déterminer une transformation difféomorphique optimale permettant de déformer l'image *Template* en l'image *Reference*. Pour des images de même modalité, la qualité de la 'registration' est liée à la corrélation entre les caractéristiques géométriques et la distribution des niveaux de gris de l'image *Template* et celles de l'image *Reference*. Pour des images produites par différents mécanismes et possédant des modalités distinctes, l'objet de la 'registration' est de corréliser les images tout en conservant la modalité de l'image *Template*.
3. La décomposition d'images, dont l'objectif est de décomposer une image donnée  $f$  texturée en la somme d'une partie dite *cartoon* ou géométrique  $u$  (qui s'apparente à une interprétation grossière de l'image  $f$ ) et d'une partie

## Résumés de thèses

---

oscillatoire ou texturée  $v$ . La problématique réside, plus précisément, dans la recherche d’espaces fonctionnels adaptés pour modéliser chaque composante de cette décomposition.

4. L’approximation et les interactions possibles entre imagerie et approximation. Dans le domaine de l’approximation, nous nous focaliserons en particulier sur des applications de la méthode des  $D^m$ -splines et sur l’extension de résultats de convergence et d’estimation d’erreurs (issus de cette théorie) à des problèmes d’approximation de champs de vitesse du vent. Nous nous intéresserons également à des interactions possibles entre ‘régistration’ et approximation et plus particulièrement, à la construction de déformations préservant la topologie (au confluent donc, de l’imagerie et de la théorie de l’approximation).

### Adeline LECLERCQ SAMSON

*Soutenu le 21 novembre 2012*  
*Laboratoire MAP5, Université Paris Descartes*

Mes domaines de recherche concernent à la fois le développement théorique et algorithmique de méthodes statistiques, le développement de modèles stochastiques pour des applications biologiques ou médicales et l’utilisation de ces méthodes pour la résolution de problèmes biomédicaux. L’approche au cœur de mes travaux de recherche est la modélisation stochastique (équation différentielle stochastique, chaîne de Markov) de phénomènes biologiques.

J’ai développé des méthodes d’estimation paramétriques tenant compte de certaines spécificités des données biologiques longitudinales : modèle mixte avec données censurées, fonction de régression définie par équation différentielle ordinaire, par équation différentielle stochastique (EDS). L’estimation de ces modèles est complexe car la vraisemblance n’est pas explicite. La méthodologie statistique repose sur une maximisation de la vraisemblance à l’aide d’algorithmes stochastiques (SAEM, MCMC), dont j’étudie la convergence. J’ai également proposé une estimation non-paramétrique par déconvolution adaptative de la densité des paramètres aléatoires dans le cadre d’un modèle linéaire mixte et de données répétées. Ces travaux méthodologiques ont été motivés par des projets transdisciplinaires, par exemple : analyse de données longitudinales de charges virales d’un essai clinique de l’Agence Nationale de Recherche sur le Sida, prédiction de la croissance foetale chez des jumeaux, croissance tumorale.

J’ai aussi considéré l’estimation de modèles stochastiques utilisés en biologie lorsqu’on dispose d’une seule trajectoire individuelle, par exemple l’estimation pa-

ramétrique d’EDS observées à temps discrets avec bruit de mesure, pour l’analyse d’images médicales fonctionnelles. Plusieurs de mes travaux ont pour objectif commun la modélisation de données temporelles de l’activité d’un neurone (données de potentiel membranaire) par des modèles stochastiques, en particulier des EDS bidimensionnelles dont seulement une composante est observée. L’estimation des paramètres de ces systèmes est complexe car le processus observé n’est plus markovien. J’ai abordé le problème d’estimation d’un système elliptique en proposant un algorithme stochastique d’estimation basé sur un filtre particulière. Dans le cas où l’EDS est hypoelliptique, j’ai proposé une fonction de contraste pour estimer ses paramètres. Les résultats d’estimation obtenus sur données réelles sont tout à fait encourageants.

**Mots-clés :** Modélisation stochastique de processus biologiques, équations différentielles stochastiques, modèles mixtes, estimation paramétrique/non paramétrique, algorithmes stochastiques (EM, SAEM, MCMC).

**Adrien BLANCHET**

### **Méthodes variationnelles appliquées en biologie et en économie**

*Soutenue le 3 décembre 2012*

*GREMAQ, Université Toulouse 1 - Capitole*

Ce mémoire d’habilitation à diriger des recherches présente certaines avancées que les méthodes variationnelles peuvent apporter à la compréhension qualitative de phénomènes d’émergence en biologie et en économie. Les méthodes d’entropie en lien avec les inégalités fonctionnelles ainsi que la théorie du transport optimal se révèlent être des outils particulièrement adaptés et élégants pour prouver des résultats puissants d’existence, d’unicité, de régularité ou de comportements asymptotiques.

**Jérôme GILLES**

### **Contributions à l’analyse et restauration d’images**

*Soutenue le 6 décembre 2012*

*CMLA, ENS Cachan*

Dans cette Habilitation à Diriger les Recherches, je présente mes contributions en analyse et restauration d’images. J’aborderai dans un premier temps de nou-

## Résumés de thèses

---

veaux résultats concernant l'étude des modèles de décomposition d'images en composantes cartoon + textures. Notamment, je présenterai un théorème montrant qu'il est possible de combiner le modèle classique TV-G avec des filtres de type Littlewood-Paley. Il est ainsi possible d'extraire de manière quasi parfaite les différentes textures présentes dans une image. Cette association peut être utilisée pour construire un algorithme de décomposition multiéchelles.

Dans un deuxième temps, je présenterai mes travaux concernant la restauration d'images acquises au travers de la turbulence atmosphérique. Nous verrons que ce problème peut être abordé comme la combinaison de deux sous problèmes : l'un de recalage non rigide et l'autre de déconvolution. Nous verrons que le premier problème peut être efficacement résolu à l'aide d'un modèle variationnel basé sur une estimation du flot optique et une régularisation de type variation totale. Par ailleurs, je propose une méthode originale pour effectuer la déconvolution. Celle-ci utilise directement un modèle de flou basé sur les équations de propagation électromagnétique au travers de l'atmosphère turbulente.

Dans un dernier temps, je présenterai des travaux en cours sur une approche originale pour construire des ondelettes auto-adaptatives dépendant du signal étudié. Je donnerai la condition nécessaire pour construire une base orthonormale et présenterai les premiers résultats obtenus sur signaux simulés et réels. En conclusion, nous verrons que cette approche pose de nouvelles questions qui seront abordées dans de futurs travaux.

**Olivier PANTZ**

### **Quelques problèmes variationnels : Optimisation de forme, contacts et analyse asymptotique**

*Soutenu le 6 décembre 2012*

*Université Paris Sud, Orsay*

Les travaux présentés dans ce mémoire portent principalement sur trois thèmes : l'optimisation de forme, l'analyse asymptotique et la simulation et modélisation des contacts sans frottement en grandes déformations. La colonne vertébrale qui relie tous ces thèmes est qu'ils peuvent tous être formulés en terme de problèmes variationnels. Ce mémoire se compose de trois chapitres, chacun correspondant à l'une des thématiques mentionnées.

**Optimisation de Forme.** Après avoir présenté rapidement diverses méthodes standards d'optimisation de forme (géométrique, lignes de niveaux, homogénéisation, SIMP), de nouvelles approches sont proposées. Elles sont motivées par la volonté de proposer une alternative à la pénalisation classique de la méthode d'homogénéisation afin de permettre un contrôle précis de la complexité géo-

métrique de la forme optimale finale. En particulier, on introduit une méthode de déshomogénéisation consistant à reproduire à une échelle macroscopique une approximation correcte du composite optimal. Ces travaux ont été réalisés en collaboration avec G. Allaire, K. Trabelsi et D. Smith.

**Analyse Asymptotique.** La seconde partie est consacrée à l'étude de divers systèmes variationnels dépendant d'un petit paramètre. On s'intéresse notamment à deux problèmes de réduction de dimension en obtenant d'une part un modèle unidimensionnel de poutres en flexion/torsion et un modèle bidimensionnel de coques fortement anisotropes. Ces modélisations sont obtenues comme limite de l'élasticité non linéaire tridimensionnelle en étudiant le comportement limite des minimiseurs de l'énergie lorsque le diamètre ou l'épaisseur de la structure tend vers zéro. Avec des outils similaires, on montre que certains réseaux atomiques carrés avec interactions à trois points vérifient la règle de Cauchy-Born. Par ailleurs, on s'intéresse également dans ce chapitre à l'homogénéisation de faisceaux d'axones. Des simulations numériques permettent d'analyser leur réponse aux stimulations électriques utilisées lors de certaines opérations chirurgicales. Ces travaux ont été réalisés en collaboration avec A. Raoult, N. Meunier, E. Mandonnet et B. Merlet.

**(Auto)contacts en grandes déformations.** Les contacts sont omniprésents dans tout système mécanique. Dans mes travaux de thèse, j'ai proposé une nouvelle modélisation des contacts sans frottement en grandes déformations. Ce chapitre est consacré à l'aspect purement numérique du problème dans un cadre statique ou quasi-statique, ce qui consiste à déterminer un minimiseur de l'énergie élastique (non convexe) d'un système composé de solides élastiques sur l'espace des déformations sans (auto)-intersection (également non convexe). On propose deux nouveaux algorithmes. Un algorithme de type pénalisation, basé sur la modélisation introduite durant ma thèse et un algorithme, plus classique, de type approximation interne pour lequel la prise en compte des contacts est directement effectuée sur le problème discrétisé. Ces travaux ont été réalisés en collaboration avec J.F. Gerbeau, M. Astorino et K.F. Traoré.

**Zied AMMARI**

**Systèmes hamiltoniens en théorie quantique des champs : dynamique asymptotique et limite classique**

*Soutenue le 5 février 2013*

*IRMAR, Université de Rennes 1*

Le texte présenté dresse le bilan de mes recherches consacrées à l'analyse mathématique de la théorie quantique des champs. L'essentiel est dédié à l'étude des propriétés dynamiques des systèmes hamiltoniens en dimension infinie dans les

## Résumés de thèses

---

espaces de Fock. La théorie de diffusion, la limite classique et la théorie du champ moyen sont les thèmes centraux du manuscrit. D'autres questions sont également abordées.

En particulier, la relation entre l'unicité des solutions pour des équations de champs classiques en dimension infinie et l'unicité pour les équations de continuité associées. Ainsi que les équations non-autonomes abstraites de Schrödinger et les représentations projectives des groupes topologiques.

THÈSES DE DOCTORAT D'UNIVERSITÉ

**Mame Diarra FALL**

Directeurs de thèse : Éric Barat (CEA), Claude Comtat (SHFJ) et Ali Mohammad-Djafari (CNRS).

**Modélisation stochastique de processus pharmaco-cinétiques, application à la reconstruction tomographique par émission de positrons (TEP) spatio-temporelle**

*Soutenue le 9 mars 2012*

*Supélec*

L'objectif de ce travail est de développer de nouvelles méthodes statistiques de reconstruction d'image spatiale (3D) et spatio-temporelle (3D+t) en tomographie par émission de positrons (TEP). La TEP est une technique d'imagerie médicale fonctionnelle jouant un rôle important en oncologie, en neurologie, en cardiologie etc. Cependant, la TEP repose sur l'administration au patient d'un traceur radioactif et la qualité de la reconstruction est dépendante de la dose administrée. Le but de cette thèse est de proposer des méthodes efficaces, capables de reconstruire des images dans un contexte de faibles doses tout en préservant la qualité de l'interprétation.

Nous avons abordé la reconstruction sous la forme d'un problème inverse spatial (3D) et spatio-temporel (3D+t), dans un cadre bayésien non paramétrique. La régularisation du problème inverse mal posé se fait dans un cadre bayésien, au travers de l'introduction d'une information dite *a priori*. De plus, la modélisation bayésienne caractérise les grandeurs à estimer par leur distribution *a posteriori*, ce qui rend accessible la distribution de l'incertitude associée à la reconstruction. L'approche non paramétrique quant à elle pourvoit la modélisation d'une grande robustesse et d'une grande flexibilité. Notre méthodologie consiste à considérer l'image comme une densité de probabilité dans  $\mathbb{R}^k$  (pour une reconstruction en  $k$  dimensions) et à chercher la solution parmi l'ensemble des densités de probabilité de  $\mathbb{R}^k$ . Cependant, la grande dimensionalité des données à manipuler conduit à des estimateurs n'ayant pas de forme explicite. Cela implique l'utilisation de techniques d'approximation pour l'inférence. La plupart de ces techniques sont basées sur les méthodes de Monte-Carlo par chaînes de Markov (MCMC). Dans l'approche bayésienne non paramétrique, nous sommes confrontés à la difficulté majeure de générer aléatoirement des objets de dimension infinie sur un calculateur. Nous avons donc développé une nouvelle méthode d'échantillonnage qui allie à la fois bonnes capacités de mélange et possibilité d'être parallélisé afin de traiter de gros volumes de données.

L'approche adoptée nous a permis d'obtenir des reconstructions spatiales 3D sans nécessiter de voxelisation de l'espace, et des reconstructions spatio-temporelles

## Résumés de thèses

---

4D sans discrétisation en amont ni dans l’espace ni dans le temps. De plus, on peut quantifier l’erreur associée à l’estimation statistique au travers des intervalles de crédibilité.

**Amel BENTATA**

Directeur de thèse : Rama Cont (Laboratoire de Probabilités et modèles aléatoires, Université Pierre & Marie Curie).

### **Projection markovienne de processus stochastiques**

*Soutenue le 28 mai 2012*

*Laboratoire de Probabilités et modèles aléatoires, Université Pierre & Marie Curie*

Cette thèse porte sur l’étude mathématique du problème de projection Markovienne d’un processus aléatoire : il s’agit de construire, étant donné un processus aléatoire  $\zeta$ , un processus de Markov ayant à chaque instant la même distribution que  $\zeta$ . Cette construction permet ensuite de déployer les outils analytiques disponibles pour l’étude des processus de Markov (équations aux dérivées partielles ou équations integro-différentielles) dans l’étude des lois marginales de  $\zeta$ , même lorsque  $\zeta$  n’est pas markovien. D’abord étudié dans un contexte probabiliste, notamment par Gyöngy (1986), ce problème a connu un regain d’intérêt motivé par les applications en finance, sous l’impulsion des travaux de B. Dupire. La thèse entreprend une étude systématique des aspects probabilistes (construction d’un processus de Markov mimant les lois marginales de  $\zeta$ ) et analytiques (dérivation d’une équation de Kolmogorov forward) de ce problème, étendant les résultats existants au cas de semimartingales discontinues. Notre approche repose sur l’utilisation de la notion de problème de martingale pour un opérateur integro-différentiel. Nous donnons en particulier un résultat d’unicité pour une équation de Kolmogorov associée à un opérateur integro-différentiel non-dégénéré. Ces résultats ont des applications en finance : nous montrons notamment comment ils peuvent servir à réduire la dimension d’un problème à travers l’exemple de l’évaluation des options sur indice en finance.

**Alexandra FRANCHITTI**

Directeur de thèse : Yvon Maday (Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Pierre & Marie Curie - Paris 6).

**Analyse et Optimisation d'un Réseau de Stimulation Multisite Cardiaque**

*Soutenue le 19 juin 2012*

*Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Pierre & Marie Curie - Paris 6*

Cet exposé présente les résultats de l'Analyse et de l'Optimisation d'un modèle numérique tridimensionnel représentant un réseau d'électrodes pour la propagation du potentiel d'action, acteur principal de la stimulation cardiaque. Pour calculer ce potentiel, nous avons choisi le modèle phénoménologique de type réaction-diffusion proposé par Aliev-Panfilov. Après avoir choisi des paramètres dits de 'sortie', pertinents pour qualifier sur des bases physiologiques le potentiel d'action simulé numériquement, nous avons déterminé les paramètres d'entrée du modèle d'Aliev-Panfilov permettant de reproduire ces paramètres de 'sortie'. La simulation 'directe' étant ainsi réaliste, calibrée à la fois sur des cas sains et malades, nous sommes passés au contrôle d'un cœur pathologique pour en améliorer le fonctionnement par divers types de pacemaker : monosite, bisite ou multisite (encore appelé filet d'électrodes). Le premier objectif a été de déterminer une fonctionnelle de coût réaliste et en accord avec le cahier des charges choisi par un cardiologue. La résolution mathématique du problème de contrôle a permis d'optimiser le placement des électrodes (dans le cas multisite) et le courant émis par la ou les électrodes, montrant, dans ce cadre, la plus grande efficacité du filet d'électrodes.

**Marie KRAY**

Directeur de thèse : Frédéric Nataf (Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Pierre & Marie Curie - Paris 6).

**Reconstruction de signaux et identification d'objets par la méthode TRAC en retournement temporel**

*Soutenue le 2 juillet 2012*

*Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Pierre & Marie Curie - Paris 6*

Nous présentons une méthode de retournement temporel avec conditions aux limites absorbantes (TRAC). Cette méthode permet de 'recréer le passé' sans connaissance de la source qui a émis les signaux rétro-propagés. Nous proposons deux applications aux problèmes inverses : la réduction de la taille du domaine

## Résumés de thèses

---

de calcul en redéfinissant une surface de référence virtuelle sur laquelle les récepteurs semblent positionnés, et la détermination de la localisation d’une inclusion inconnue à partir de mesures au bord. La méthode TRAC ne nécessite aucune connaissance *a priori* des propriétés physiques de l’inclusion. Des tests numériques effectués sur l’équation des ondes illustrent l’efficacité de cette méthode, qui se révèle être très robuste vis-à-vis du bruit sur les données. En particulier, nous appliquons la méthode TRAC à la discrimination entre une unique inclusion et deux inclusions proches.

### **Mohamed Kamel RIAHI**

Directeurs de thèse : Yvon Maday (Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Pierre & Marie Curie - Paris 6) et Julien Salomon (CEREMADE, Université Paris-Dauphine).

### **Conception et analyse d’algorithmes parallèles en temps pour l’accélération de simulations numériques d’équations d’évolution**

*Soutenue le 10 juillet 2012*

*Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Pierre & Marie Curie - Paris 6*

Cette thèse présente des algorithmes permettant la parallélisation dans la direction temporelle de la simulation de systèmes régis par des équations aux dérivées partielles. Elle traite principalement des problèmes de parallélisation en temps issus de trois domaines d’application différents proposant des modèles très complexes :

### **Contrôle optimal parabolique**

Nous avons développé deux algorithmes parallèles que nous avons appelés SITPOC et PITPOC. Ces deux algorithmes sont basés sur une méthode générale de décomposition en temps des problèmes de contrôle optimal. Un résultat de convergence est obtenu pour l’algorithme SITPOC. Nous avons également présenté des interprétations matricielles de ces algorithmes. Les perspectives liées à ce travail concernent l’étude de stabilité des algorithmes ainsi que leur accélération, notamment *via* l’utilisation d’autres procédures d’optimisation locales.

### **Cinétique de la population des neutrons dans un réacteur nucléaire**

Dans un premier temps, ce travail a consisté à étudier un modèle statique de la cinétique neutronique. Cette étape est fondamentale pour la production du flux propre constituant la condition initiale de la cinétique. Par la suite, nous avons conçu un solveur en temps regroupant toutes les variables neutroniques (deux groupes de flux neutronique et six groupes de concentrations de précurseurs) et adapté aux différents scénarios possibles réduisant

la physique. Les résultats de ce solveur sont comparables à ceux obtenus par le code MINOS du CEA. Par conséquent, après validation du solveur séquentiel, nous avons conçu un schéma pararéel pour la résolution en temps. Nous avons finalement considéré plusieurs modèles physiques de la cinétique des neutrons que nous avons couplés avec l’algorithme pararéel en temps dans lequel le solveur grossier utilisé a été simulé avec une réduction du modèle physique. Cette réduction a été bénéfique puisqu’elle a permis une accélération importante du traitement en temps machine.

### **Contrôle par résonance magnétique nucléaire et information quantique**

Ce chapitre présente un travail d’ouverture sur une méthode parallèle en temps de résolution d’un problème de contrôle optimal en résonance magnétique nucléaire.

Notre méthode produit une accélération importante par rapport à l’algorithme de référence non parallèle. De plus, les champs de contrôle produits par parallélisation sont lisses du point de vue fréquentiel ce qui permet une mise en œuvre expérimentale plus simple dans les instruments.

Les tests numériques ont prouvé l’efficacité des méthodes numériques employées. Sur des exemples académiques et sans faire usage de techniques de programmation avancées, nous avons obtenu des accélérations de résolution significatives.

### **Chao ZHOU**

Directeur de thèse : Anis Matoussi (Université du Maine/Laboratoire Manceau de Mathématiques & Polytechnique/CMAP).

### **Incertitude sur les Modèles en Finance et Équations Différentielles Stochastiques Rétrogrades du Second Ordre**

*Soutenue le 1<sup>er</sup> octobre 2012*

*CMAP, École Polytechnique*

L’objectif principal de cette thèse est d’étudier quelques problèmes de mathématiques financières dans un marché incomplet avec incertitude sur les modèles. Récemment, deux approches différentes ont été développées sur ce sujet. L’une est la théorie des  $G$ -espérances non-linéaires initiée par Peng, et l’autre est la théorie des équations différentielles stochastiques rétrogrades du second ordre (dans la suite 2EDSRs) introduite par Soner, Touzi et Zhang. Dans cette thèse, nous adoptons le point de vue de ces derniers auteurs.

Cette thèse contient quatre parties dans le domaine des 2EDSRs. Nous commençons par généraliser la théorie des 2EDSRs initialement introduite dans le cas de générateurs lipschitziens continus à celui de générateurs à croissance quadra-

## Résumés de thèses

---

tique. Cette nouvelle classe des 2EDSRs nous permettra ensuite d'étudier le problème de maximisation d'utilité robuste dans les modèles non-dominés. Dans la deuxième partie, nous étudions ce problème pour trois fonctions d'utilité. Dans chaque cas, nous donnons une caractérisation de la fonction valeur et d'une stratégie d'investissement optimale *via* la solution d'une 2EDSR.

Dans la troisième partie, nous fournissons également une théorie d'existence et unicité pour des EDSRs réfléchies du second ordre avec obstacles inférieurs et générateurs lipschitziens, nous appliquons ensuite ce résultat à l'étude du problème de valorisation des options américaines dans un modèle financier à volatilité incertaine.

Dans la quatrième partie, nous étudions une classe des 2EDSRs avec sauts. En particulier, nous prouvons l'existence et l'unicité de solutions dans les espaces appropriés. Nous pouvons interpréter ces équations comme des EDSRs avec sauts standards, avec volatilité et mesure de saut incertaines. Comme application de ces résultats, nous étudions un problème de maximisation d'utilité exponentielle robuste avec incertitude sur la volatilité et la mesure des sauts.

La dernière partie est dédiée à l'implémentation numérique des méthodes de Monte Carlo pour la valorisation des options dans des modèles à volatilité incertaine.

### Adrien DE LARRARD

Directeur de thèse : Rama Cont (Laboratoire de Probabilités et modèles aléatoires, Université Pierre & Marie Curie).

#### **Dynamique de carnets d'ordres boursiers : modèles stochastiques et théorèmes limites**

*Soutenue le 2 octobre 2012*

*Laboratoire de Probabilités et modèles aléatoires, Université Pierre & Marie Curie*

Cette thèse propose un cadre mathématique pour la modélisation de la dynamique du prix et du flux d'ordres dans un marché électronique où les participants achètent et vendent un produit financier en soumettant des ordres limites et des ordres de marché à haute fréquence dans un carnet d'ordres centralisé. Nous modélisons le carnet d'ordres comme un système de files d'attente et nous montrons que la dynamique du prix dans un tel marché peut être obtenue par des théorèmes limites. Nous étudions en détail la relation entre les principales propriétés du prix et la dynamique du processus ponctuel décrivant l'arrivée et l'exécution des ordres, d'abord dans un cadre Markovien (Chapitre 2) puis, en utilisant des méthodes asymptotiques, dans le cadre plus général d'un proces-

sus ponctuel stationnaire dans l’asymptotique de l’approximation de diffusion où l’on suppose que les ordres arrivent fréquemment (Chapitres 3 et 4), ce qui est le cas pour la plupart des marchés boursiers liquides. Nos résultats asymptotiques sont en accord avec les données empiriques haute-fréquence.

**Maël BOSSON**

Directeurs de thèse : Brigitte Bidegaray-Fesquet (CNRS) et Stéphane Redon (INRIA, Rhône-Alpes).

**Adaptative algorithms for computational chemistry and interactive modeling**

*Soutenu le 19 octobre 2012*

*Laboratoire Jean Kuntzmann et Université de Grenoble*

A l’échelle atomique, les outils de modélisation interactive sont de plus en plus nécessaires. Cependant, résoudre les équations de la physique sous-jacente en temps interactif est un défi numérique difficile. Dans cette dissertation, nous proposons des nouveaux algorithmes qui permettent la modélisation interactive de structures chimiques. Tout d’abord, nous présentons un outil de modélisation pour construire des modèles structuraux de systèmes hydrocarbonés. Les retours physiques sont basés sur le potentiel de Brenner. Pour obtenir des taux interactifs lors de l’édition de systèmes contenant un grand nombre d’atomes, nous introduisons un nouvel algorithme adaptatif. Ensuite, nous introduisons ce que nous pensons être le premier algorithme de chimie quantique interactif au niveau de théorie ‘Atom Superposition and Electron Delocalization Molecular Orbital’. Cette méthode est basée sur une approche diviser-pour-régner qui, comme nous le montrons, est précise et efficace pour cette théorie semi-empirique non auto-cohérente. Nous proposons ensuite une nouvelle approche pour la chimie quantique interactive : ‘Block-Adaptive Quantum Mechanics’ (BAQM). BAQM contraint la position des noyaux et les degrés de liberté électronique à la volée pour simplifier la simulation. Finalement, nous présentons plusieurs applications : une étude de la formation du graphane, la simulation interactive à des fins pédagogiques, et le prototypage virtuel à l’échelle atomique, à la fois sur des ordinateurs de bureau et dans des environnements de réalité virtuelle.

**Mots-clés :** Atomic scale, interactive modeling, quantum chemistry, adaptative algorithms, divide-and-conquer, reduced basis.

Résumés de thèses

**Maxime GAZEAU**

Directrice de thèse : Anne de Bouard (CMAP, École Polytechnique).

**Analyse de modèles mathématiques pour la propagation de la lumière dans les fibres optiques en présence de biréfringence aléatoire**

*Soutenue le 19 octobre 2012*

*CMAP, École Polytechnique*

Mes travaux de thèse sont consacrés à l'étude de la propagation de la lumière dans les fibres optiques monomodes. Les télécommunications par fibres optiques sont limitées par certains effets (linéaires et non linéaires) qui ont pour conséquence d'étaler les impulsions lumineuses et de dégrader le signal. Un des effets les plus limitants pour ce type de transmission est la Dispersion Modale de Polarisation (Polarization Mode Dispersion (PMD) en anglais). Ce phénomène est lié au caractère vectoriel de la lumière et à la biréfringence dans les fibres. La biréfringence est un phénomène qui apparaît dans les fibres non parfaitement symétriques et qui a pour effet de décomposer le champ électrique en deux modes de polarisation orthogonale. Afin de modéliser l'enveloppe lentement variable du champ électrique, des physiciens ont dérivé à partir des équations de Maxwell un système couplé d'équations de Schrödinger non linéaires appelé équation de Manakov PMD. La particularité de ces équations est qu'elles font intervenir différentes longueurs d'échelles. On introduit donc dans l'équation un petit paramètre  $\epsilon > 0$ , déterminé par le ratio de ces échelles. La dynamique de l'enveloppe lentement variable  $\epsilon X$  est décrite par

$$i \frac{\partial \epsilon X(t)}{\partial t} + \frac{i b'}{\epsilon} \sigma(\epsilon \nu(t)) \frac{\partial \epsilon X(t)}{\partial x} + \frac{d_0}{2} \frac{\partial^2 \epsilon X(t)}{\partial x^2} + F_{\epsilon \nu(t)}(\epsilon X(t)) = 0, \quad (5)$$

où  $\epsilon \nu(t)$  est un processus stochastique modélisant les variations rapides et aléatoires de l'état de polarisation de la lumière et  $\sigma(\epsilon \nu(t))$  est une matrice  $2 \times 2$  caractérisant les transferts d'énergies entre les deux composantes.

Au cours de ma thèse, je me suis intéressé au comportement asymptotique de la solution de l'équation de Manakov PMD lorsque  $\epsilon$  tend vers 0 et l'équation limite est donnée par

$$i dX(t) + \left( \frac{d_0}{2} \frac{\partial^2 X(t)}{\partial x^2} + F(X(t)) \right) dt + i \sqrt{\gamma} \sum_{k=1}^3 \sigma_k \frac{\partial X(t)}{\partial x} \circ dW_k(t) = 0, \quad (6)$$

où  $W = (W_1, W_2, W_3)$  est un mouvement brownien de dimension 3 et  $\circ$  correspond à l'intégrale de Stratonovich. Je me suis également intéressé à l'analyse numérique d'un schéma de différences finies pour l'équation (6) pour lequel j'ai montré un ordre de convergence fort de  $1/2$ . Ce schéma utilise une discrétisation semi-implicite de l'intégrale de Stratonovich, ce qui le rend conservatif pour

la norme  $L^2$ . La dernière partie de mon travail est consacrée à la simulation numérique de l'équation (6). L'objectif est d'étudier numériquement l'évolution de la statistique de la dispersion modale de polarisation et la stabilité des solitons de Manakov soumis à la PMD. Dans ce cadre, j'ai implémenté une méthode de réduction de variance valable pour les équations aux dérivées partielles stochastiques.

**Ghislain HAINE**

Directeurs de thèse : Karim Ramdani (INRIA) et Marius Tucsnak (Université de Lorraine).

**Observateurs en dimension infinie. Application à l'étude de quelques problèmes inverses**

*Soutenue le 22 octobre 2012*

*Université de Lorraine*

Dans un grand nombre d'applications modernes, on est amené à estimer l'état initial (ou final) d'un système infini-dimensionnel (typiquement un système gouverné par une équation aux Dérivées Partielles (EDP) d'évolution) à partir de la connaissance partielle du système sur un intervalle de temps limité. Un champ d'applications dans lequel apparaît fréquemment ce type de problème d'identification est celui de la médecine. Ainsi, la détection de tumeurs par tomographie thermo-acoustique peut se ramener à des problèmes de reconstruction de données initiales. D'autres méthodes nécessitent l'identification d'un terme source, qui, sous certaines hypothèses, peut également se réécrire sous la forme d'un problème de reconstruction de données initiales.

On s'intéresse dans cette thèse à la reconstruction de la donnée initiale d'un système d'évolution, en travaillant autant que possible sur le système infini-dimensionnel, à l'aide du nouvel algorithme développé par Ramdani, Tucsnak et Weiss (Automatica 2010).

Nous abordons en particulier l'analyse numérique de l'algorithme dans le cadre des équations de Schrödinger et des ondes avec observation interne. Nous étudions les espaces fonctionnels adéquats pour son utilisation dans les équations de Maxwell, avec observations interne et frontière. Enfin, nous tentons d'étendre le cadre d'application de cet algorithme lorsque le système initial est perturbé ou que le problème inverse n'est plus bien posé, avec application à la tomographie thermo-acoustique.

## Résumés de thèses

---

**Antoine Marie BOGSO**

Directeurs de thèse : Samuel Herrmann (Université de Bourgogne) et Bernard Roynette (Université de Lorraine).

### **Étude de peacocks sous des hypothèses de monotonie conditionnelle et de positivité totale**

*Soutenue le 23 octobre 2012*

*Université de Lorraine*

Cette thèse porte sur les processus croissants pour l'ordre convexe que nous désignons sous le nom de 'peacocks'. Un résultat remarquable dû à Kellerer stipule qu'un processus stochastique à valeurs réelles est un peacock si et seulement s'il possède les mêmes marginales unidimensionnelles qu'une martingale. Une telle martingale est dite associée à ce processus. Mais dans son article, Kellerer ne donne ni d'exemple de peacock, ni d'idée précise sur la construction d'une martingale associée pour un peacock donné. Ainsi, comme d'autres travaux sur les peacocks, notre étude vise deux objectifs. Il s'agit d'exhiber de nouvelles familles de peacocks et de construire des martingales associées pour certains peacocks.

Dans les trois premiers chapitres, nous exhibons diverses classes de peacocks en utilisant successivement les notions de monotonie conditionnelle, de peacock très fort et de positivité totale d'ordre 2. En particulier, nous fournissons plusieurs extensions du résultat de Carr-Ewald-Xiao selon lequel la moyenne arithmétique du mouvement brownien géométrique, encore appelée 'option asiatique' est un peacock. L'objet du dernier chapitre est de construire des martingales associées pour une classe de peacocks. Pour cela, nous utilisons les plongements d'Azéma-Yor et de Bertoin-Le Jan. L'originalité de ce chapitre est l'utilisation de la positivité totale d'ordre 2 dans l'étude du plongement d'Azéma-Yor.

**Mots-clés :** Processus stochastiques, processus de Markov, mouvement brownien, martingales, peacocks, monotonie conditionnelle, positivité totale d'ordre 2, problème de Skorokhod, plongement d'Azéma-Yor, plongement de Bertoin-Le Jan.

**Guillaume BOUSQUET**

Directeur de thèse : François Faure (Université Joseph Fourier) .

### **Déformation et découpe interactive de solides à géométrie complexe**

*Soutenue le 25 octobre 2012*

*Laboratoire Jean Kuntzmann et Université de Grenoble*

La simulation physique des modèles déformables est devenue omniprésente dans l'infographie. Elle permet de synthétiser des comportements réels, en se basant

sur des lois physiques issues de la mécanique des milieux continus. Dans cette thèse, nous nous intéressons aux simulations interactives telles qu’appliquées aux jeux vidéos ou aux simulateurs chirurgicaux. La majorité des travaux se sont focalisés jusqu’ici sur l’animation d’objets composés de matériaux homogènes. Néanmoins, bon nombre d’objets réels, comme les structures biologiques, sont composés de multiples matériaux imbriqués. Leur décomposition en zones homogènes requiert une discrétisation spatiale à haute résolution pour résoudre les variations des propriétés du matériau, ce qui aboutit à des temps de calcul prohibitifs. Dans ce contexte, nous présentons de nouvelles techniques de simulation en temps réel d’objets déformables qui peuvent être découpés. Tout d’abord, une méthode de découpe d’objets déformables en temps réel dans laquelle, contrairement aux méthodes précédentes, l’objet se déforme au contact d’un outil coupant et ne se coupe que lorsque la pression atteint un certain niveau. L’indépendance des modèles physiques, de collision et de rendu facilitent les changements topologiques. L’exploitation du GPU et les modifications locales permettent une exécution rapide. Ensuite, une méthode dynamique sans maillage, utilisant des repères comme nœuds au lieu de points, dont la formulation du champ de déplacement s’apparente au skinning ; héritant ainsi de sa souplesse de mise en œuvre et d’une rigueur équivalente aux méthodes physiques telles que les éléments finis. L’introduction des points d’intégration, réduisant le nombre d’échantillons par une approximation aux moindres carrés, accélère les intégrations spatiales. D’autres pré-calculs sont présentés afin d’accélérer le temps de simulation. Enfin, la définition de fonctions de forme anisotropes encodant les variations des propriétés du matériau grâce à l’introduction d’une distance de compliance. Ces fonctions de forme complexes découplent la résolution matérielle de celles des fonctions de déplacements et permettent un échantillonnage des nœuds extrêmement faible. L’utilisation de la distance de compliance permet une distribution automatique des nœuds de simulation relativement aux propriétés matérielles.

**Mots-clés :** Simulation, repères déformables, skinning, méthodes particulières, éléments finis, simulation chirurgicale.

**Adrien GAIDON**

Directrice de thèse : Cordelia Schmid (INRIA, Rhône-Alpes).

**Modèles Structurés pour la Reconnaissance d’Actions dans des Vidéos Réalistes**

*Soutenue le 25 octobre 2012*

*Laboratoire Jean Kuntzmann et Université de Grenoble*

Cette thèse décrit de nouveaux modèles pour la reconnaissance de catégories d’actions, comme ‘ouvrir une porte’ ou ‘courir’, dans des vidéos réalistes telles

## Résumés de thèses

---

que les films. Nous nous intéressons tout particulièrement aux propriétés structurales des actions : comment les décomposer, quelle en est la structure caractéristique et comment utiliser cette information afin de représenter le contenu d’une vidéo. La difficulté principale à laquelle nos modèles s’attellent réside dans la satisfaction simultanée de deux contraintes antagonistes. D’une part, nous devons précisément modéliser les aspects discriminants d’une action afin de pouvoir clairement identifier les différences entre catégories. D’autre part, nos représentations doivent être robustes en conditions réelles, c’est-à-dire dans des vidéos réalistes avec de nombreuses variations visuelles en termes d’acteurs, d’environnements et de points de vue. Dans cette optique, nous proposons donc trois modèles précis et robustes à la fois, qui capturent les relations entre parties d’actions ainsi que leur contenu. Notre approche se base sur des caractéristiques locales (notamment les points d’intérêts spatio-temporels et le flot optique) et a pour objectif d’organiser l’ensemble des descripteurs locaux décrivant une vidéo. Nous proposons aussi des noyaux permettant de comparer efficacement les représentations structurées que nous introduisons. Bien que nos modèles se basent tous sur les principes mentionnés ci-dessus, ils diffèrent de par le type de problème traité et la structure sur laquelle ils reposent. Nos trois approches et leurs assertions sont à chaque fois validées par des expériences poussées sur des bases de données publiques parmi les plus difficiles en reconnaissance d’actions. Nos résultats sont significativement meilleurs que ceux de l’état de l’art, illustrant ainsi à quel point la structure des actions est importante afin de bâtir des modèles précis et robustes pour la reconnaissance d’actions dans des vidéos réalistes.

**Mots-clés :** Action recognition, video analysis, computer vision, machine learning.

### **Thomas MENSINK**

Directeurs de thèse : Cordelia Schmid (INRIA, Rhône-Alpes), Jakob Verbeek (INRIA, Rhône-Alpes) et Gabriela Csurka (XEROX).

#### **Learning Image Classification and Retrieval Models**

*Soutenue le 26 octobre 2012*

*Laboratoire Jean Kuntzmann et Université de Grenoble*

Nous assistons actuellement à une explosion de la quantité des données visuelles. Par exemple, plusieurs millions de photos sont partagées quotidiennement sur les réseaux sociaux. Les méthodes d’interprétation d’images visent à faciliter l’accès à ces données visuelles, d’une manière sémantiquement compréhensible. Dans ce manuscrit, nous définissons certains buts détaillés qui sont intéressants pour les tâches d’interprétation d’images, telles que la classification ou la recherche d’images, que nous considérons dans les trois chapitres principaux. Tout d’abord,

nous visons l’exploitation de la nature multimodale de nombreuses bases de données, pour lesquelles les documents sont composés d’images et de descriptions textuelles. Dans ce but, nous définissons des similarités entre le contenu visuel d’un document, et la description textuelle d’un autre document. Ces similarités sont calculées en deux étapes, tout d’abord nous trouvons les voisins visuellement similaires dans la base multimodale, puis nous utilisons les descriptions textuelles de ces voisins afin de définir une similarité avec la description textuelle de n’importe quel document. Ensuite, nous présentons une série de modèles structurés pour la classification d’images, qui encodent explicitement les interactions binaires entre les étiquettes (ou labels). Ces modèles sont plus expressifs que des prédicateurs d’étiquette indépendants, et aboutissent à des prédictions plus fiables, en particulier dans un scénario de prédiction interactive, où les utilisateurs fournissent les valeurs de certaines des étiquettes d’images. Un scénario interactif comme celui-ci offre un compromis intéressant entre la précision, et l’effort d’annotation manuelle requis. Nous explorons les modèles structurés pour la classification multi-étiquette d’images, pour la classification d’image basée sur les attributs, et pour l’optimisation de certaines mesures de rang spécifiques. Enfin, nous explorons les classifieurs par  $k$  plus proches voisins, et les classifieurs par plus proche moyenne, pour la classification d’images à grande échelle. Nous proposons des méthodes d’apprentissage de métrique efficaces pour améliorer les performances de classification, et appliquons ces méthodes à une base de plus d’un million d’images d’apprentissage, et d’un millier de classes. Comme les deux méthodes de classification permettent d’incorporer des classes non vues pendant l’apprentissage à un coût presque nul, nous avons également étudié leur performance pour la généralisation. Nous montrons que la classification par plus proche moyenne généralise à partir d’un millier de classes, sur dix mille classes à un coût négligeable, et les performances obtenus sont comparables à l’état de l’art.

**Mots-clés :** Classification d’image, recherche d’image, prédiction de structure, apprentissage sans exemple, prédiction interactive d’étiquette, apprentissage de métriques, classification à grande échelle.

**Huu Tron NGUYEN**

Directeur de thèse : Michel Théra (Laboratoire XLIM, Université de Limoges).

**Régularité métrique, multi-applications implicites et applications**

*Soutenue le 26 octobre 2012*

*Laboratoire XLIM, Université de Limoges*

Dans cette thèse, l’auteur a utilisé la théorie des bornes d’erreur afin d’étudier les propriétés variationnelles des multiplications (applications multivoques) : régularité métrique, propriété de type Lipschitz (Aubin property), ou encore ou-

## Résumés de thèses

---

verture à taux linéaire. Il établit des théorèmes de multiapplications implicites dans les espaces des métriques complets ainsi que dans les espaces de Banach, ou encore dans les espaces de Asplund lorsque les résultats sont donnés sous forme duale en termes de co-dérivées (dans le sens de Mordukhowich). Il étudie aussi la stabilité de la régularité métrique des multiapplications implicites pour de ‘petites’ perturbations, c’est-à-dire lorsque la multiapplication perturbée est assez proche de l’application multivoque d’origine. La régularité métrique de la somme des deux applications multivoques dans les espaces de Banach ainsi que dans les espaces d’Asplund est aussi considérée. Cette étude s’inscrit dans la continuité du théorème classique de Luysternik & Graves, qui lui-même généralise le célèbre théorème de l’application ouverte de Banach. Ces résultats sont utilisés pour établir la régularité métrique de multiapplications d’un type particulier : les multiapplications épigraphiques qui jouent un rôle important en optimisation multicritères.

**Mots-clés :** Analyse non-lisse, théorie des bornes d’erreur, régularité métrique, multiapplication implicite.

### **Laurent BELCOUR**

Directeurs de thèse : Nicolas Holzschuch et Cyril Soler (INRIA, Rhône-Alpes) .

#### **Analyse Fréquentielle du Transport Radiatif, de la théorie aux applications**

*Soutenue le 30 octobre 2012*

*Laboratoire Jean Kuntzmann et Université de Grenoble*

Cette thèse présente une extension de l’analyse fréquentielle des light-fields locaux introduite par Durand et al. Nous ajoutons à cette analyse l’étude d’opérateurs tels que la réfraction par des surfaces spéculaires et non-spéculaires, le mouvement et les milieux participatifs. Nous étendons des opérateurs précédemment définis pour permettre l’étude d’occlusions non planaires, des BRDFs anisotropes et les lentilles multiples. Nous présentons l’analyse de la covariance du transport de la lumière, une méthode pour estimer la matrice de covariance d’un light-field local à partir de l’ensemble des opérations auxquels est soumis le light-field. Nous montrons l’application de cet outil avec plusieurs applications permettant le sampling adaptatif et le filtrage de flous de bougé ou de profondeur de champ, l’estimation des tailles de noyaux de reconstruction pour les photons et les photon beams ainsi que le sampling adaptatif des effets volumiques.

**Mots-clés :** Analyse de Fourier, synthèse d’image, sampling adaptatif.

**Julien HAMONIER**

Directeur de thèse : Antoine Ayache (Université Lille 1).

**Analyse par ondelettes du mouvement multifractionnaire stable linéaire**

*Soutenue le 7 novembre 2012*

*Université Lille 1*

L’objectif est d’étudier les propriétés trajectoires et statistiques du *mouvement multifractionnaire stable linéaire* (mmsl), introduit par S. Stoev et M.S. Taquq (2004, 2005), comme généralisation du *mouvement brownien fractionnaire* (mbf). Ce processus stochastique strictement  $\alpha$ -stable ( $St\alpha S$ ), désigné par  $Y = \{Y(t) : t \in \mathbb{R}\}$ , est obtenu en modifiant, la représentation du mbf sous forme de moyenne mobile non anticipative, de la façon suivante : la mesure brownienne est remplacée par une mesure  $St\alpha S$ , et le paramètre de Hurst  $H$  par une fonction  $H(\cdot)$  dépendant de  $t$ . On se place systématiquement dans le cas où cette fonction est continue et à valeurs dans l’intervalle ouvert  $]1/\alpha, 1[$ . La thèse se compose de trois parties.

Le but principal de la première partie, est de déterminer de fins modules de continuité, globaux et locaux, du mmsl  $\{Y(t) : t \in \mathbb{R}\}$ ; pour ce faire, la stratégie consiste à étudier avec précision le comportement trajectoirel du champ  $\{X(u, v) : (u, v) \in \mathbb{R} \times ]1/\alpha, 1[ \}$ , le champ générateur des mmsl, ainsi que celui de sa dérivée partielle de tout ordre par rapport à  $v$ . L’étude repose essentiellement sur une nouvelle représentation de  $\{X(u, v) : (u, v) \in \mathbb{R} \times ]1/\alpha, 1[ \}$  sous la forme d’une série aléatoire dont on montre la convergence presque sûre dans certains espaces de Hölder.

Cette précédente représentation souffre de deux inconvénients : d’une part, elle n’est pas suffisamment explicite et ne peut donc permettre une simulation du mmsl en un temps de calcul raisonnable, d’autre part, elle ne sépare pas complètement les parties hautes et basses fréquences de  $\{X(u, v) : (u, v) \in \mathbb{R} \times ]1/\alpha, 1[ \}$ . Afin d’y remédier, l’objectif de cette deuxième partie consiste d’abord à introduire, via la base de Haar, une autre représentation en série aléatoire de ce champ, puis d’en établir la convergence presque sûre uniformément en  $(u, v)$  dans un rectangle compact et enfin à estimer finement la vitesse de convergence.

Dans cette dernière partie, l’objectif est de construire au moyen des coefficients d’ondelettes  $\{d_{j,k}\}_{(j,k) \in \mathbb{Z}^2}$  du mmsl, des estimateurs statistiques de trois importants paramètres reliés à ce processus, à savoir : le minimum de la fonction  $H(\cdot)$  sur un intervalle compact arbitraire,  $H(t_0)$  la valeur de celle-ci en un point  $t_0$  choisi arbitrairement, ainsi que la valeur du paramètre de stabilité  $\alpha$ .

## Résumés de thèses

---

**Alexandre JANON**

Directrices de thèse : Clémentine Prieur et Maëlle Nodet (Université Joseph Fourier).

**Analyse de sensibilité, réduction de dimension. Application à l’océanographie**

*Soutenue le 15 novembre 2012*

*Laboratoire Jean Kuntzmann et Université de Grenoble*

Les modèles mathématiques ont pour but de décrire le comportement d’un système. Bien souvent, cette description est imparfaite, notamment en raison des incertitudes sur les paramètres qui définissent le modèle. Dans le contexte de la modélisation des fluides géophysiques, ces paramètres peuvent être par exemple la géométrie du domaine, l’état initial, le forçage par le vent, ou les coefficients de frottement ou de viscosité. L’objet de l’analyse de sensibilité est de mesurer l’impact de l’incertitude attachée à chaque paramètre d’entrée sur la solution du modèle, et, plus particulièrement, identifier les paramètres (ou groupes de paramètres) ‘sensibles’. Parmi les différentes méthodes d’analyse de sensibilité, nous privilégierons la méthode reposant sur le calcul des indices de sensibilité de Sobol. Le calcul numérique de ces indices de Sobol nécessite l’obtention des solutions numériques du modèle pour un grand nombre d’instances des paramètres d’entrée. Cependant, dans de nombreux contextes, dont celui des modèles géophysiques, chaque lancement du modèle peut nécessiter un temps de calcul important, ce qui rend inenvisageable, ou tout au moins peu pratique, d’effectuer le nombre de lancements suffisant pour estimer les indices de Sobol avec la précision désirée. Ceci amène à remplacer le modèle initial par un *métamodèle* (aussi appelé *surface de réponse* ou *modèle de substitution*). Il s’agit d’un modèle approchant le modèle numérique de départ, qui nécessite un temps de calcul par lancement nettement diminué par rapport au modèle original. Cette thèse se centre sur l’utilisation d’un métamodèle dans le cadre du calcul des indices de Sobol, plus particulièrement sur la quantification de l’impact du remplacement du modèle par un métamodèle en terme d’erreur d’estimation des indices de Sobol. Nous nous intéressons également à une méthode de construction d’un métamodèle efficace et rigoureux pouvant être utilisé dans le contexte géophysique.

**Jean-Yves TISSOT**

Directeurs de thèse : Eric Blayo-Nogret et Clémentine Prieur (Université Joseph Fourier).

**Sur la décomposition ANOVA et l'estimation des indices de Sobol'.**  
**Application à un modèle d'écosystème marin**

*Soutenue le 16 novembre 2012*

*Laboratoire Jean Kuntzmann et Université de Grenoble*

Dans les domaines de la modélisation et de la simulation numérique, les simulateurs développés prennent parfois en compte de nombreux paramètres dont l'impact sur les sorties n'est pas toujours bien connu. L'objectif principal de l'analyse de sensibilité est d'aider à mieux comprendre comment les sorties d'un modèle sont sensibles aux variations de ces paramètres. L'approche la mieux adaptée pour appréhender ce problème dans le cas de modèles potentiellement complexes et fortement non linéaires repose sur la décomposition ANOVA et les indices de Sobol'. En particulier, ces derniers permettent de quantifier l'influence de chacun des paramètres sur la réponse du modèle. Dans cette thèse, nous nous intéressons au problème de l'estimation des indices de Sobol'. Dans une première partie, nous réintroduisons de manière rigoureuse des méthodes existantes au regard de l'analyse harmonique discrète sur des groupes cycliques et des tableaux orthogonaux randomisés. Cela nous permet d'étudier les propriétés théoriques de ces méthodes et de les généraliser. Dans un second temps, nous considérons la méthode de Monte Carlo spécifique à l'estimation des indices de Sobol' et nous introduisons une nouvelle approche permettant de l'améliorer. Cette amélioration est construite autour des hypercubes latins et permet de réduire le nombre de simulations nécessaires pour estimer les indices de Sobol' par cette méthode. En parallèle, nous mettons en pratique ces différentes méthodes sur un modèle d'écosystème marin.

**Anne-Claire EGLOFFE**

Directrices de thèse : Céline Grandmont (Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Paris 6) et Muriel Boulakia (Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Paris 6).

**Étude de quelques problèmes inverses pour le système de Stokes. Application aux poumons**

*Soutenue le 19 novembre 2012*

*Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Paris 6*

## Résumés de thèses

---

Dans cette thèse, nous nous intéressons à la résolution de problèmes inverses provenant d’une modélisation multi-échelle de l’écoulement de l’air dans les poumons. Dans un premier temps, nous considérons une version simplifiée du modèle de l’écoulement de l’air dans les poumons : l’écoulement est modélisé par les équations de Stokes incompressibles avec des conditions aux limites de type Robin sur une partie du bord. Nous cherchons à identifier le coefficient de Robin défini sur une partie non accessible du bord à partir de mesures de la vitesse et de la pression disponibles sur une autre partie du bord.

Après avoir quantifié des résultats de continuation unique pour le système de Stokes, nous établissons deux inégalités de stabilité logarithmiques, l’une valable en dimension 2 et l’autre valable en toute dimension. Toutes deux sont basées sur des inégalités de Carleman, globale dans le premier cas et locales dans le second. Les inégalités de stabilité sont d’abord montrées sur le problème stationnaire puis la théorie des semi-groupes permet de passer au problème non stationnaire. De plus, sous l’hypothèse *a priori* que le coefficient de Robin est constant par morceaux, nous prouvons une inégalité de stabilité Lipschitzienne pour le problème stationnaire. Nous concluons cette thèse en revenant au problème initial pour lequel nous imposons des conditions au bord non-standard faisant intervenir le flux. En particulier, nous obtenons des premiers résultats numériques encourageants concernant l’identification de certains paramètres du modèle (résistances à l’écoulement de l’air, élasticité des tissus).

**Mots-clés :** Problème inverse, Inégalité de stabilité, Inégalité de Carleman, Système de Stokes, Conditions aux limites mixtes, Modélisation de l’appareil respiratoire.

**Madhi MOHAMMADBAGHER**

Directeurs de thèse : Nicolas Holzschuch et Cyril Soler (INRIA, Rhône-Alpes) .

### **Apparence Matérielle : représentation et rendu photo-réaliste**

*Soutenue le 19 novembre 2012*

*Laboratoire Jean Kuntzmann et Université de Grenoble*

Cette thèse présente quelques avancées sur la représentation efficace de l’apparence matérielle dans une simulation de l’éclairage. Nous présentons deux contributions : un algorithme pratique de simulation interactive pour rendre la réflectance mesurée avec une géométrie dynamique en utilisant une analyse fréquentielle du transport de l’énergie lumineuse et le shading hiérarchique et sur-échantillonnage dans un contexte deferred shading, et une nouvelle fonction de distribution pour le modèle de BRDF de Cook-Torrance. Dans la première partie, nous présentons une analyse fréquentielle de transport de l’éclairage en temps réel. La bande passante et la variance sont fonction de l’éclairage incident, de la

distance parcourue par la lumière, de la BRDF et de la texture, et de la configuration de la géométrie (la courbure). Nous utilisons ces informations pour sous-échantillonner l’image en utilisant un nombre adaptatif d’échantillons. Nous calculons l’éclairage de façon hiérarchique, en un seul passage. Notre algorithme est implémenté dans un cadre de deferred shading, et fonctionne avec des fonctions de réflectance quelconques, y compris mesurées. Nous proposons deux extensions : pré-convolution de l’éclairage incident pour plus d’efficacité, et anti-aliasing utilisant l’information de fréquence. Dans la deuxième partie, nous nous intéressons aux fonctions de réflectance à base de micro-facette, comme le modèle de Cook-Torrance. En nous basant sur les réflectances mesurées, nous proposons une nouvelle distribution des micro-facettes. Cette distribution, Shifted Gamma Distribution, s’adapte aux données avec plus de précision. Nous montrons également comment calculer la fonction d’ombrage et de masquage pour cette distribution. Dans un deuxième temps, nous observons que pour certains matériaux, le coefficient de Fresnel ne suit pas l’approximation de Schlick. Nous proposons une généralisation de cette approximation qui correspond mieux aux données mesurées. Nous proposons par ailleurs une nouvelle technique d’optimisation, canal par canal, en deux étapes. Notre modèle est plus précis que les modèles existants, du diffus au spéculaire.

**Mots-clés :** Apparence matérielle, réflectance, BRDF, analyse fréquentielle, micro-facette, Cook-Torrance.

#### **Laureen RIBASSIN MAJED**

Directeurs de thèse : Stéphane Cléménçon (Telecom ParisTech) et Rachid Lounes (MAP5, université Paris Descartes).

#### **Modélisation déterministe de la transmission des infections à Human Papillomavirus. Impact de la vaccination**

*Soutenue le 19 novembre 2012*

*Laboratoire MAP5, Université Paris Descartes*

Les infections à Papillomavirus Humain (HPV) sont des infections sexuellement transmissibles très fréquentes. La persistance de ces infections est un facteur causal du cancer du col de l’utérus et est aussi à l’origine d’autres cancers de la zone ano-génitale et de verrues génitales chez les femmes et chez les hommes. Depuis l’introduction de deux vaccins bivalent et quadrivalent permettant de prévenir certains types d’HPV, de nombreux modèles mathématiques ont été développés afin d’estimer l’impact potentiel de différentes stratégies de vaccination. L’objectif de ce travail de thèse a été d’estimer l’impact potentiel de la vaccination en France sur l’incidence de certains cancers liés à l’HPV, notamment le cancer du col de l’utérus et le cancer anal chez les femmes françaises ; ainsi que sur la préva-

## Résumés de thèses

---

lence des infections à HPV 6/11/16/18. Différents modèles dynamiques de type déterministe ont été développés. Ils sont représentés par des systèmes d'équations différentielles ordinaires. Une étude théorique du comportement asymptotique d'un premier modèle comportant peu de strates a été réalisée. Le nombre de reproduction de base  $\mathcal{R}_0$  et le nombre de reproduction avec vaccination  $\mathcal{R}_v$  ont été estimés. Des modèles plus complexes ont intégré une structure d'âge et de comportement sexuel.

Les modélisations réalisées permettent de conclure à l'impact important de la vaccination sur la prévalence des infections à HPV et sur l'incidence des cancers du col de l'utérus et de la zone anale chez les femmes françaises dans un délai de quelques décennies, si l'on prend en compte les taux de vaccination observés en France au début de la campagne de vaccination.

**Mots-clés :** Modèle déterministe, cancer, vaccin, Papillomavirus Humain, nombre de reproduction de base.

### Visesh CHARI

Directeurs de thèse : Peter Sturm, Emmanuel Prados et Edmond Boyer (INRIA, Rhône-Alpes).

#### Estimation de la forme d'objets spéculaires à partir d'un système multi-vues

*Soutenue le 20 novembre 2012*

*Laboratoire Jean Kuntzmann et Université de Grenoble*

Comprendre la reconstruction 3D et l'analyse de la géométrie multi-vues liées aux objets transparents est l'un des problèmes les plus difficiles de la vision par ordinateur. Dans cette thèse, nous nous intéressons à de nouvelles approches pour analyser les images de surfaces transparentes spéculaires afin d'en déduire leurs propriétés géométriques et photométriques. Un des modèles les plus simples de surface de réfraction est une surface plane. Bien que sa présence soit omniprésente dans notre monde sous la forme de vitres transparentes, de fenêtres, ou la surface d'eau stagnante, très peu de choses sont connues sur la géométrie multi-vues causée par la réfraction d'une telle surface. Dans la première partie de cette thèse, nous analysons la géométrie à vues multiples d'une surface réfractive. Nous considérons le cas où une ou plusieurs caméras dans un milieu (p. ex. l'air) regardent une scène dans un autre milieu (p. ex. l'eau), avec une interface plane entre ces deux milieux. Le cas d'une photo sous-marine, par exemple, correspond à cette description. Comme le modèle de projection perspectif ne correspond pas à ce scénario, nous dérivons le modèle de caméra et sa matrice de projection associée. Nous montrons que les lignes 3D de la scène correspondent à des courbes quartiques dans les images. Un point intéressant à noter à propos de cette configuration est que si l'on considère un indice de réfraction homogène, alors il existe une courbe unique dans l'image pour chaque ligne 3D du monde.

Nous décrivons et développons ensuite des éléments de géométrie multi-vues tels que les matrices fondamentales ou d'homographies liées à la scène, et donnons des éléments pour l'estimation de pose des caméras à partir de plusieurs points de vue. Nous montrons également que lorsque le milieu est plus dense, la ligne d'horizon correspond à une conique qui peut être décomposée afin d'en déduire les paramètres de l'interface. Ensuite, nous étendons notre approche en proposant des algorithmes pour estimer la géométrie de plusieurs surfaces planes rétractives à partir d'une seule image. Un exemple typique d'un tel scénario est par exemple lorsque l'on regarde à travers un aquarium. Nous proposons une méthode simple pour calculer les normales de telles surfaces étant donné divers scénari, en limitant le système à une caméra axiale. Cela permet dans notre cas d'utiliser des approches basées sur ransac comme l'algorithme '8 points' pour le calcul de matrice fondamentale, d'une manière similaire à l'estimation de distorsions axiales de la littérature en vision par ordinateur. Nous montrons également que le même modèle peut être directement adapté pour reconstruire des surfaces réfléchives sous l'hypothèse que les surfaces soient planes par morceaux. Nous présentons des résultats de reconstruction 3D encourageants, et analysons leur précision. Alors que les deux approches précédentes se focalisent seulement sur la reconstruction d'une ou plusieurs surfaces planes réfractives en utilisant uniquement l'information géométrique, les surfaces spéculaires modifient également la manière dont l'énergie lumineuse à la surface est redistribuée. Le modèle sous-jacent correspondant peut être expliqué par les équations de Fresnel. En exploitant à la fois cette information géométrique et photométrique, nous proposons une méthode pour reconstruire la forme de surfaces spéculaires arbitraires. Nous montrons que notre approche implique un scénario d'acquisition simple. Tout d'abord, nous analysons plusieurs cas minimaux pour la reconstruction de formes, et en déduisons une nouvelle contrainte qui combine la géométrie et la théorie de Fresnel à propos des surfaces transparentes. Ensuite, nous illustrons la nature complémentaire de ces attributs qui nous aident à obtenir une information supplémentaire sur l'objet, qu'il est difficile d'avoir autrement. Finalement, nous proposons une discussion sur les aspects pratiques de notre algorithme de reconstruction, et présentons des résultats sur des données difficiles et non triviales. Dans le cas de ces scénari, nous montrons que des résultats de grande qualité peuvent être obtenus. En conclusion, nous analysons différentes propriétés géométriques et photométriques des surfaces transparentes spéculaires, et explorons deux approches pour la reconstruction : une reconstruction spécifique à la forme, et une approche indépendante de la forme. Dans les deux cas, nous proposons différentes contributions, à la fois théoriques et algorithmiques, avec à chaque fois des résultats encourageants. Finalement nous abordons la question des applications potentielles et des futures directions de recherche.

**Mots-clés :** Estimation de la forme, multi-vues, spéculaires, reconstruction.

Résumés de thèses

---

**Nicolas POPOFF**

Directrices de thèse : Virginie Bonnaillie-Noël et Monique Dauge (IRMAR, Université de Rennes 1).

**Sur le spectre de l’opérateur de Schrödinger magnétique dans un domaine diédral**

*Soutenue le 20 novembre 2012  
IRMAR, Université de Rennes 1*

Cette thèse analyse le spectre d’opérateurs de Schrödinger avec champ magnétique constant dans des ouverts de type diédraux. Pour comprendre l’influence d’une arête courbe sur la première valeur propre de l’opérateur dans la limite semi-classique, il faut connaître le bas du spectre de l’opérateur de Schrödinger magnétique avec champ constant sur un dièdre infini. Par transformation de Fourier ce problème se ramène à l’étude d’une famille d’opérateurs à paramètre sur un secteur infini. On calcule le spectre essentiel de ces opérateurs sur le secteur et on montre que dans certains cas il y a des valeurs propres discrètes sous le spectre essentiel. Par comparaison avec des opérateurs de Sturm-Liouville singuliers sur le demi-axe on obtient des majorations du bas du spectre de l’opérateur sur le dièdre : pour un angle d’ouverture assez petit et certaines orientations du champ magnétique, celui-ci est strictement inférieur aux quantités spectrales issues du cas régulier. Finalement on applique ces résultats à l’opérateur de Schrödinger avec champ magnétique constant et petit paramètre dans des domaines bornés de l’espace possédant des arêtes courbes. Pour déterminer une asymptotique de la première valeur propre dans la limite semi-classique, on construit des quasi-modes près de l’arête à l’aide des fonctions propres du problème à paramètre sur le secteur. En utilisant une partition du domaine selon que l’on est près de l’arête ou du bord régulier, on obtient le premier terme de l’asymptotique pour diverses orientations du champ magnétique et on montre dans certains cas que la première valeur propre est inférieure aux valeurs propres associées à des ouverts réguliers.

**Cristóbal Andrés BERTOGLIO BELTRÁN**

Directeurs de thèse : Jean-Frédéric Gerbeau (Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Paris 6) et Miguel Ángel Fernández (INRIA Paris-Rocquencourt).

**Problèmes Directs et Inverses en Interaction Fluide-Structure. Application à l’hémodynamique**

*Soutenue le 23 novembre 2012  
Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Paris 6*

Dans cette thèse nous traitons de la simulation d’interaction fluide-structure (FSI) dans les problèmes en hémodynamique, en mettant l’accent sur l’assimilation de données et sur la simulation dans les conditions physiologiques.

La première partie présente et analyse un schéma de couplage semi-implicite des équations de Navier-Stokes (NSE) et d’un modèle de conditions aux limites réduit, lorsque les NSE sont résolues avec une méthode de projection. Cela permet de simuler des problèmes de mécanique de fluides et de FSI de façon plus robuste, c’est à dire en évitant les possibles instabilités associées à des cas-tests réalistes.

La deuxième partie est consacrée à l’assimilation des données avec des méthodes séquentielles en FSI. Nous présentons d’abord une étude sur l’application d’un filtre de Kalman réduit pour l’estimation efficace des paramètres physiques d’intérêt, comme la distribution de la rigidité de la paroi de l’artère et la résistance proximale dans le fluide, à partir des mesures de déplacement à l’interface fluide-structure. Ensuite, nous analysons certains observateurs de Luenberger utilisés pour la mécanique des solides en FSI, dans le but de construire des estimateurs d’état efficaces pour des problèmes FSI de grande taille.

Dans la troisième et dernière partie, nous appliquons les méthodologies mentionnées ci-dessus aux problèmes physiques réels. Tout d’abord, la rigidité de la paroi est estimée (pour des modèles solides linéaires et non linéaires) à partir de données provenant d’un tube de silicone simulant une aorte. Pour finir, nous analysons une aorte réelle avec une coarctation réparée, nous testons les techniques d’estimation avec des données synthétiques et nous montrons quelques résultats obtenues à partir de données issues du patient.

### Sébastien MARINESQUE

Directeur de thèse : Didier Auroux (Université de Nice Sophia Antipolis).

#### Méthodes de reconstruction itératives en tomographie thermoacoustique

*Soutenue le 23 novembre 2012*

*Université Toulouse III - Paul Sabatier*

A partir du problème de la tomographie thermoacoustique (TTA), nous avons défini, étudié et mis en œuvre diverses méthodes itératives de reconstruction : le Nudging Direct et Rétrograde (BFN), d’implémentation et d’usage simple, une méthode variationnelle (VT) et le SEEK Direct et Rétrograde (BF-SEEK), plus élaboré, ainsi qu’une méthode couplant filtre de Kalman (KF) et renversement temporel (TR).

A l’occasion d’une formulation commune aux méthodes séquentielles précitées, nous avons mis en évidence une nouvelle classe de méthodes de résolution de problèmes inverses : les algorithmes de Filtrage Direct et Rétrograde (BFF). Outre l’existence et l’unicité des solutions (notamment des rétrogrades), sont étudiés

## Résumés de thèses

---

divers cadres caractérisant la convergence théorique des algorithmes. Ainsi, un cadre théorique général est précisé pour que le BFN soit bien posé. Puis, dans le cadre offert par la TTA, l’existence et l’unicité de ses solutions ainsi que la convergence géométrique de l’algorithme sont prouvées, avec un taux de convergence explicite, et une description de ses comportements numériques est proposée. Dans la continuité de ces premiers résultats, l’étude théorique et numérique de généralisations à un modèle et à un cadre de travail plus réalistes est menée : ainsi sont considérés différents cas-types d’objets à reconstruire ou de positionnement et d’éparpillement des capteurs, des modèles d’équation d’onde atténuée, des vitesses variables (trapping ou non), ou encore la présence de bruits extérieurs à l’objet. Puis des outils de contrôle et d’estimation optimaux permettent de caractériser d’une part la convergence du BFN, et d’autre part les rappels définissant des BFF convergents, et le problème est ramené à un critère d’observabilité.

Avec pour points de comparaison les méthodes les plus souples et efficaces du moment (le TR et une variante itérée), de nombreuses expérimentations sont menées afin de tester les différents BFF et la VT. D’où l’on déduit que, robustes, de complexité variée et adaptative, les méthodes proposées constituent une excellente alternative aux méthodes de reconstruction usuelles, notamment en TTA et tout particulièrement dans des situations d’observation dégénérées.

**Sébastien COURT**

Directeur de thèse : Jean-Pierre Raymond (Université Toulouse III - Paul Sabatier).

### **Problèmes d’interactions entre une structure déformable et un fluide visqueux et incompressible**

*Soutenu le 26 novembre 2012*

*Université Toulouse III - Paul Sabatier*

Dans cette thèse, nous étudions un système fluide-solide qui modélise les interactions entre une structure déformable, et un fluide visqueux et incompressible qui l’entoure. Il couple les équations de Navier-Stokes incompressibles (pour l’état du fluide) avec les lois de Newton (pour la dynamique du solide). L’existence de solutions fortes est étudiée dans les deux premiers chapitres, pour des déformations du solide limitées ou non en régularité.

Puis nous prouvons la stabilisation à zéro de ce système couplé, pour des perturbations extérieures petites, par des déformations du solide soumises à des contraintes physiques qui lui garantissent en particulier d’être autopropulsé. Ensuite nous décrivons des moyens pratiques de générer de telles déformations. Enfin nous développons une méthode numérique pour un problème de Stokes avec conditions de Dirichlet non homogènes. Elle nous permet d’obtenir une bonne approximation de la trace normale du tenseur des contraintes de Cauchy, pour

des frontières qui ne dépendent pas du maillage. Cette méthode combine une approche de type domaines fictifs basée sur les idées de Xfem, et une méthode de Lagrangien augmenté. Du point de vue des interactions fluide-structure, l'intérêt de cette méthode réside dans l'importance du rôle joué par les forces du fluide à l'interface fluide-solide.

**Mots-clés :** Interactions fluide-structure, équations de Navier-Stokes, existence et unicité de solutions fortes, mécanique des solides déformables, théorie du contrôle, stabilisation par feedback, Xfem, méthodes de domaines fictifs, stabilisation numérique.

### **Roland DENIS**

Directeurs de thèse : Stéphane Labbé et Emmanuel Maitre (Université Joseph Fourier).

#### **Modélisation et simulation de l'effet Leidenfrost dans les micro-gouttes**

*Soutenue le 26 novembre 2012*

*Laboratoire Jean Kuntzmann et Université de Grenoble*

L'effet Leidenfrost représente un cas particulier de caléfaction : lorsqu'une goutte de liquide est déposée sur une surface dont la température est très supérieure à la température d'ébullition du liquide, ce dernier s'évapore avant de toucher la surface et la vapeur ainsi créée forme un coussin sous la goutte qui la maintient en sustentation et l'isole de la plaque chauffante. Ce travail de thèse concerne la modélisation et la simulation de ce phénomène complexe. Dans une première partie, nous étudions un modèle avec interface raide basée sur les équations de Navier-Stokes enrichies avec des termes interfaciaux prenant en compte le changement de phase et la tension de surface. La simulation d'une couche uniforme de liquide sur un film de vapeur nous ramène à un cas unidimensionnel pour lequel on utilise la méthode ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian) afin de gérer la hauteur variable de chaque phase. La discrétisation du modèle est validée sur un cas test. Dans une seconde partie, on utilise la méthode de capture d'interface Level-Set dans laquelle la frontière liquide/gaz est représentée par la ligne de niveau zéro d'une fonction. Cette interface est artificiellement épaissie et les quantités thermodynamiques y sont régularisées. La tension de surface et le changement de phase sont alors introduits sous forme de termes volumiques dans nos équations. L'hypothèse d'incompressibilité de chaque phase pure nous amène alors à un fluide généralisé dont la compressibilité se manifeste uniquement dans la zone interfaciale, là où se produit le changement de phase. La troisième partie est consacrée à la discrétisation de ce modèle pour l'étude tridimensionnelle d'une goutte d'eau, immobile et symétrique par rotation, se ramenant ainsi à un problème bi-dimensionnel axisymétrique. La méthode Level-Set nécessite des choix

## Résumés de thèses

---

numériques particuliers qui sont alors explicités : schéma d'advection peu diffusif, redistanciation par résolution d'une équation de Hamilton-Jacobi et correction globale du volume de la goutte, prenant en compte le changement de phase. Un algorithme de projection de type Chorin est également utilisé afin de satisfaire la contrainte sur la compressibilité de notre fluide. On présentera également un nouveau schéma aux différences finies à stencil compact pour l'approximation du gradient. La dernière partie présente et compare nos résultats numériques avec plusieurs courbes théoriques, décrivant chacune l'évolution de certains paramètres de la goutte de liquide : son volume, son rayon et la hauteur de la couche de vapeur.

**Mots-clés :** Leidenfrost, dynamique des fluides, changement de phase, tension de surface, méthode level-set, modélisation.

**Saïd JABRANE**

Directeurs de thèse : Vincent Borrelli (ICJ lyon) et Francis Lazarus (GIBSA-LAB Grenoble).

### **H-principe, visualisation et applications**

*Soutenue le 26 novembre 2012*

*Institut Camille Jordan*

L'objectif de cette thèse est le développement d'un programme permettant la visualisation de certaines surfaces célèbres dont il n'existe aucune image : les plongements isométriques des tores carrés plats dans l'espace euclidien de dimension trois  $\mathbb{E}^3$ . Ces plongements isométriques ont été découverts par Nash et Kuiper en 1954-1955 et ont surpris la communauté mathématique par leur existence et par leur régularité inhabituelle : celle-ci est seulement de classe  $C^1$  en général.

Cette thèse introduit de nouveaux résultats et des nouvelles techniques analytiques dans la théorie de l'intégration convexe afin de construire pour la première fois en topologie, de tels plongements.

La méthode de Nash et Kuiper, en dépit de son caractère constructif, ne fournit pas de procédé suffisamment explicite pour permettre de représenter ces plongements. Elle ne se prête donc pas à une visualisation. Mais la donne change avec Gromov. Ce dernier revisite les travaux de Nash-Kuiper et en extrait une méthode, *l'intégration convexe* qui généralise et éclaire leur démarche. Avec cette méthode, les idées sous-jacentes aux démonstrations de Nash et Kuiper deviennent plus accessibles et plus compréhensibles. En particulier, une visualisation de plongements isométriques de surfaces dans l'espace euclidien  $\mathbb{E}^3$  devient possible à condition de transformer cette méthode en algorithme, d'adapter et de simplifier la théorie au cas particulier des tores. C'est ce que nous avons réalisé dans ce travail de thèse pour le tore carré plat.

Trois parties forment cette thèse :

1. **La partie mathématique.** (Chapitre I, II et III ) Il s’agit de développer une version explicite de la théorie de l’intégration convexe (qui est un outil pour démontrer des  $h$ -principes) afin de permettre son implémentation. La première phase de cette partie consiste en l’adaptation des diverses étapes de la construction de Gromov-Nash-Kuiper en vue de leur implémentation.
2. **La partie algorithmique.** (Chapitre IV)  
Elle présente les étapes principales de l’algorithme général permettant de construire grâce à l’intégration convexe une suite d’immersions convergeant vers une immersion isométrique du tore carré plat et  $C^0$ -proche d’une immersion initiale donnée du tore  $\mathbb{T}^2$ .
3. **La partie informatique.** (Chapitre V et VI )  
La partie informatique consiste en l’implémentation de l’algorithme mis en place dans la partie précédente puis en la production d’images.

Cette thèse s’inscrit dans le cadre du projet **Hévéa** réunissant les trois laboratoires suivants : ICJ (Institut Camille Jordan), LJK (Laboratoire Jean Kuntzmann) et Gipsa-Lab spécialisés en mathématiques, mathématiques appliquées et informatique. Ce travail a été soutenu par le **CNRS** et par une **allocation doctorale de recherche de la Région Rhône-Alpes**. Il a fait l’objet d’une publication aux PNAS.

**Khaled SALEH**

Directeurs de thèse : Frédéric Coquel (Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Paris 6) et Jean-Marc Hérard (Université de Provence).

**Analyse et simulation numérique par relaxation d’écoulements diphasiques compressibles. Contribution au traitement des phases évanescentes**

*Soutenue le 26 novembre 2012*

*Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Paris 6*

Dans le cadre du nucléaire civil, la modélisation des écoulements diphasiques est nécessaire à la représentation de nombreuses configurations d’écoulements fluides dans les circuits primaire et secondaire des centrales s’appuyant sur des réacteurs à eau pressurisée (REP). Les applications visées concernent non seulement le fonctionnement nominal, mais aussi et surtout les configurations incidentelles, parmi lesquelles on peut citer l’accident par perte de réfrigérant primaire (APRP), les phénomènes de crise d’ébullition, mais aussi le renoyage des coeurs. En régime nominal dans le circuit primaire, le fonctionnement est très proche du fonctionnement monophasique pur, la vapeur étant *a priori* absente. En revanche,

## Résumés de thèses

---

le taux de présence de vapeur peut devenir de faible à conséquent dans les situations incidentelles.

Cette thèse s’intéresse plus particulièrement au modèle diphasique de Baer-Nunziato [1] qui entre dans la classe des modèles bifluides hyperboliques. L’objectif de ce travail est de proposer quelques techniques de prise en compte de la disparition de phase, régime qui occasionne d’importantes instabilités tant au niveau du modèle qu’au niveau de sa simulation numérique.

L’enseignement principal de la thèse est que dans ces régimes, il est possible de stabiliser les solutions en introduisant une dissipation de l’entropie totale de mélange. D’un point de vue numérique, cette dissipation d’entropie supplémentaire permet en effet d’obtenir des approximations stables dans ces régimes. Les méthodes d’analyse et d’approximation proposées reposent de façon intensive sur les techniques d’approximation par relaxation de type Suliciu (voir [2]), et les méthodes numériques qui en découlent. Deux approches sont principalement étudiées.

Dans une première approche dite approche Eulerienne directe, la résolution exacte du problème de Riemann pour le système relaxé permet de définir un schéma numérique extrêmement précis pour le modèle de Baer-Nunziato. Nous montrons que dans les régimes de fonctionnement normal (i.e. sans disparition de phase), la méthode numérique ainsi obtenue est bien plus économique en terme de coût CPU (à précision donnée) que le schéma classique très simple de Rusanov. De plus, nous montrons que ce nouveau schéma est très robuste puisqu’il permet la simulation des régimes de disparition de phase. Les travaux furent initialement développés sur la version 1D du modèle, pour laquelle une inégalité d’entropie discrète vérifiée par le schéma fut démontrée. Ils furent ensuite étendus en 3D et intégrés à un prototype de code industriel développé par EDF.

La deuxième approche, dite approche par splitting acoustique, propose à travers un opérateur de splitting temporel, de séparer les phénomènes de propagation d’ondes acoustiques et les phénomènes associés au transport matériel. Cette approche a le double objectif d’éviter la résonance due à l’interaction entre ces deux types d’ondes, mais surtout de permettre à long terme un traitement implicite des phénomènes acoustiques, tout en explicitant la discrétisation des phénomènes de transport. On parle alors de méthodes semi-implicites. Le schéma que nous proposons admet une mise en oeuvre remarquablement simple. De plus, nous montrons qu’il permet la prise en compte simple de la disparition de phase. Une des principales nouveautés de ce travail est d’exploiter des fermetures dissipatives du couple vitesse et pression d’interface, et de montrer que ces fermetures permettent le contrôle de la taille des solutions du problème de Riemann associé à l’étape acoustique.

- 1 M.R Baer et J.W. Nunziato. A two-phase mixture theory for the deflagration to detonation transition (DDT) in reactive granular materials. *Int. J. Multiphase Flow*. Vol.12(6), 1986, pp.861,Äi889.
- 2 F. Bouchut. *Nonlinear stability of finite volume methods for hyperbolic conservation laws and well-balanced schemes for sources*. Birkhäuser Verlag. Frontiers in Mathematics. 2004.

**Charles-Edouard BREHIER**

Directeurs de thèse : Arnaud Debussche (ENS Cachan Bretagne) et Erwan Faou (ENS Cachan Bretagne & INRIA).

**Analyse numérique d’EDP Stochastiques hautement oscillantes**

*Soutenue le 27 novembre 2012*

*ENS Cachan, Antenne de Bretagne*

Dans une première partie, on s’intéresse à un système d’EDP stochastiques variant selon deux échelles de temps, et plus particulièrement à l’approximation de la composante lente à l’aide d’un schéma numérique efficace. On commence par montrer un principe de moyennisation, à savoir la convergence de la composante lente du système vers la solution d’une équation dite moyennée. Ensuite on prouve qu’un schéma numérique de type Euler fournit une bonne approximation d’un coefficient inconnu apparaissant dans cette équation moyennée. Finalement, on construit et on analyse un schéma de discrétisation du système à partir des résultats précédents, selon la méthodologie dite HMM (Heterogeneous Multiscale Method).

On met en évidence l’ordre de convergence par rapport au paramètre d’échelle temporelle et aux différents paramètres du schéma numérique ; on étudie les convergences au sens fort (approximation des trajectoires) et au sens faible (approximation des lois).

Dans une seconde partie, on étudie une méthode d’approximation de solutions d’EDP paraboliques, en combinant une approche semi-lagrangienne et une discrétisation de type Monte-Carlo. On montre d’abord dans un cas simplifié que la variance dépend des pas de discrétisation ; enfin on fournit des simulations numériques de solutions, afin de mettre en avant les applications possibles d’une telle méthode.

## Résumés de thèses

---

### **Samuel MARTIN**

Directeurs de thèse : Guillaume James et Antoine Girard (Université Joseph Fourier).

#### **Coordination et robustesse des systèmes dynamiques multi-agents**

*Soutenue le 28 novembre 2012*

*Laboratoire Jean Kuntzmann et Université de Grenoble*

Cette thèse présente une étude de systèmes multi-agents. Ce type de systèmes trouve de nombreuses applications telles que le contrôle de flotte de véhicules en robotique, la conception de réseaux d'énergie distribués ainsi que la modélisation de dynamiques d'opinions. Dans une première partie, nous présentons un nouveau résultat en théorie de consensus qui approfondit et étend les récents travaux de Hendrickx et Tsitsiklis sur le consensus sous condition de coupe balancée. Par la suite, nous appliquons le consensus au contrôle de flotte de véhicules. Nous présentons plusieurs résultats concernant l'obtention de l'alignement en vitesse (flocking). Cette étude s'appuie sur une analyse de robustesse du réseau d'interaction en vue de préserver sa connexité. Cette notion est centrale dans la thèse. Enfin, nous présentons les résultats d'une collaboration avec une chercheuse en sociologie concernant l'analyse du réseau social de la controverse sur les loisirs motorisés hors route. Nous étudions le lien entre les scènes nationale et locale. Pour cela, nous faisons appel à des outils de visualisation de grands graphes et calculons la centralité des acteurs du réseau.

**Mots-clés :** Coordination, robustesse, systèmes dynamiques multi-agents, consensus, flocking, analyse de réseaux sociaux.

### **Christophe DENIS**

Directeurs de thèse : Antoine Chambaz et Adeline Samson (Laboratoire MAP5, Université Paris Descartes).

#### **Méthodes statistiques pour la classification de données de maintien postural**

*Soutenue le 29 novembre 2012*

*Laboratoire MAP5, Université Paris Descartes*

Our study contributes to the search of a notion of *postural style*, focusing on the issue of classifying subjects in terms of postural maintenance. A deficit in postural maintenance often results in falling, which is particularly hazardous in elderly people. The long term goal is to develop protocols to identify such deficits and to adapt on a case by case basis the medical protocols for functional rehabilitation.

Our work relies on a clinical study dedicated to evaluating postural maintenance. Seventy subjects are enrolled in the cohort. Each subject belongs to one of three groups of hemiplegic, vestibular and normal patients. Every subject undergoes up to four experimental protocols that were designed to grab the characteristics of the subject’s strategy to maintain posture. The data notably include the complex trajectories of the points where the maximal pressure is exerted by each foot as the subject’s balance is artificially perturbed.

In the first part of the manuscript, we propose and study two classification procedures in terms of postural maintenance. We first address the problem of classifying hemiplegic versus normal subjects. Then we tackle the more ambitious problem of the classification of subjects as hemiplegic, vestibular or normal. To reach our goal, we develop a variety of statistical techniques relying on a wide spectrum of statistical principles. For instance, we formulate and solve the issue of ranking the experimental protocols by decreasing order of relevance relative to postural maintenance in the paradigm of semiparametric models. We exploit a stochastic processes model and its inference to extract small-dimensional relevant features from the high-dimensional trajectories derived from the experimental protocols. On top of that, we add a layer of abrupt changes detection to enhance the latter procedure of extraction of small-dimensional features. On several occasions we draw advantage from the principle of aggregation of predictors to obtain better classifiers.

The second part of this manuscript is devoted to connex topics. We study the asymptotic behavior of the *top scoring pair* classifier which plays a great role in the first part. Originally designed by Geman *et al.* (2004) to classify diseases based on genetic profiles, this classification procedure had not been theoretically studied before, to the best of our knowledge. Furthermore, we propose an inference procedure of abrupt changes for Cox-Ingersoll-Ross processes observed at discrete times. We also introduce and study an extension of the aggregation principle called super-learning (van der Laan *et al.*, 2007) to the framework of classification in more than two classes.

**Mots-clés :** Postural maintenance, supervised classification, cross-validation, top scoring pair classifier, super-learning, change point estimation.

## Résumés de thèses

---

**Zuqi TANG**

Directeurs de thèse : Francis Piriou, Emmanuel Creusé, Yvonnick Le Menach (Université Lille 1) et Serge Nicaise (Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis).

### **Estimateurs d'erreur *a posteriori* résiduels en éléments finis pour la résolution de problèmes d'électromagnétisme en formulations potentielles**

*Soutenue le 29 novembre 2012*

*Laboratoire d'Electrotechnique et d'Electronique de Puissance de Lille et  
Laboratoire Paul Painlevé, Université Lille 1*

Ce travail s'intéresse à la résolution numérique par éléments finis des équations de Maxwell en régime quasi-stationnaire et en formulations potentielles. L'objectif poursuivi consiste à développer des estimateurs d'erreur *a posteriori* résiduels, afin de contrôler l'erreur de discrétisation spatiale, dans le cadre d'applications en régime statique ou en régime dynamique harmonique.

La première partie de cette thèse introduit la modélisation des phénomènes physiques étudiés et parvient aux équations mathématiques en résultant. En outre, on y présente les estimateurs *a posteriori* et leur intérêt dans le cadre de la mise en œuvre de la méthode des éléments finis.

La deuxième partie débute par le développement de l'estimateur *a posteriori* dans le cas de la magnétostatique en formulation potentielle vecteur  $\mathbf{A}$ . Les outils mathématiques nécessaires à l'étude sont en particulier détaillés. L'estimateur obtenu est alors validé sur quelques cas tests académiques. Puis on traite de l'estimateur *a posteriori* pour la formulation magnétodynamique en potentiel  $\mathbf{A}/\varphi$  en régime harmonique. Un soin particulier doit être apporté afin de générer une décomposition de Helmholtz *ad hoc* de l'erreur permettant d'obtenir la fiabilité de l'estimateur. Plusieurs configurations sont traitées en fonction de la position du domaine conducteur dans le domaine de calcul et des conditions aux limites associées. Un test numérique est ensuite effectué. Enfin on s'intéresse à l'estimateur d'erreur *a posteriori* pour la formulation  $\mathbf{T}/\Omega$  en régime harmonique pour le problème de la magnétodynamique, en supposant le domaine conducteur simplement connexe. Similairement à la formulation  $\mathbf{A}/\varphi$ , une décomposition de Helmholtz est développée pour établir la fiabilité, et une validation numérique est proposée.

La troisième partie du mémoire présente une batterie de tests numériques applicatifs et industriels permettant de tester les estimateurs développés dans des conditions réelles. Celle-ci se termine notamment par une application de EDF R&D ayant pour objet le contrôle non destructif par courant de Foucault de tubes

générateurs de vapeur.

**Saad BENJELLOUN**

Directeurs de thèse : Laurent Desvillettes (CMLA, ENS Cachan) et Jean-Michel Ghiadaglia (CMLA, ENS Cachan).

**Quelques problèmes d'écoulements multi-fluides : analyse mathématique,  
modélisation numérique et simulation**

*Soutenue le 3 décembre 2012*

*CMLA, ENS Cachan*

La présente thèse comporte trois parties indépendantes.

La première partie présente une preuve d'existence de solutions faibles globales pour un modèle de sprays de type Vlasov-Navier-Stokes-incompressible avec densité variable. Ce modèle est obtenu par une limite formelle à partir d'un modèle Vlasov-Navier-Stokes-incompressible avec fragmentation, où seules deux valeurs de rayons de particules sont considérées : un rayon  $r_1$  pour les particules avant fragmentation, et un rayon  $r_2 \ll r_1$  pour les particules obtenues par fragmentation. Le modèle asymptotique est obtenu dans la limite  $r_2$  tendant vers zéro. La démonstration s'appuie sur des techniques de régularisation et de troncature en vitesse, sur le théorème de Schauder et enfin sur une méthode de compacité de Lions-Di-Perna pour l'élimination des régularisations introduites dans le système initial.

La deuxième partie concerne la modélisation de l'impact d'une vague de liquide sur une paroi. L'objectif de cette partie est d'obtenir un modèle pour la fuite du gaz environnant sur les 'côtés' de la vague. Un modèle numérique est réalisé en remplaçant la vague liquide par une masse solide indéformable et un schéma VFFC-ALE est conçu pour la simulation numérique du modèle. La mise sans dimension des équations permet de montrer les nombres sans dimension qui régissent le phénomène de fuite. La vitesse moyenne de fuite est comparée à la vitesse dans le cas d'un fluide incompressible (pour lequel on a une expression exacte). Enfin, *via* la simulation numérique, une étude paramétrique est réalisée en fonction des nombres sans dimensions.

Dans la troisième partie on présente une méthode numérique pour la simulation d'un modèle Vlasov-Boltzmann-Euler pour les sprays. Cette méthode couple le schéma VFFC à la méthode PIC (Particle In Cell). Les résultats présentés concernent l'écoulement d'un spray dans un pipeline courbe qu'on modélise par un système Vlasov-Boltzmann-Euler quasi-1D.

## Résumés de thèses

---

**Estelle DUVEAU**

Directeurs de thèse : Edmond Boyer et Lionel Reveret (INRIA, Rhône-Alpes).

### **Mesure de surface 3D pour la caractérisation du vieillissement chez la souris**

*Soutenue le 3 décembre 2012*

*Laboratoire Jean Kuntzmann et Université de Grenoble*

L’analyse du comportement des petits animaux de laboratoire tels que rats et souris est fondamentale en recherche biologique. L’objectif de cette thèse est de faire des mesures anatomiques sur le squelette de souris à partir de vidéos et de démontrer la robustesse de ces mesures par une validation quantitative. Les principales difficultés viennent du sujet d’étude, la souris, qui, vu comme un objet géométrique, peut subir de grandes déformations très rapidement et des conditions expérimentales qui ne permettent pas d’obtenir des flux vidéos de même qualité que pour l’étude de l’humain. Au vu de ces difficultés, nous nous concentrons tout d’abord dans le Chapitre 2 sur la mise en place d’une méthode de recalage de squelette à l’aide de marqueurs collés sur la peau de l’animal. On montre que les effets de couplage non-rigide entre peau et squelette peuvent être contrecarrés par une pondération de l’influence des différents marqueurs dans la cinématique inverse. Cela nous permet de justifier que, malgré ce couplage non rigide, des informations sur la peau de l’animal sont suffisantes pour recalcer de manière précise et robuste les structures squelettiques. Nous développons pour cela une chaîne de traitement de données morphologiques qui nous permet de proposer un modèle générique d’animation du squelette des souris. La méthode de cinématique inverse pondérée est validée grâce à des vidéos radiographiques. Ayant justifié de l’utilisation de points à la surface de la peau (l’enveloppe) pour recalcer le squelette, nous proposons dans le Chapitre 3 un nouveau modèle de déformation de l’enveloppe. Ce modèle, appelé OQR (pour Oriented Quads Rigging, gréage de quadrilatères orientés), est une structure géométrique flexible possédant les bonnes propriétés de déformation de l’animation par cage. A l’instar des squelettes d’animation, elle permet d’avoir une paramétrisation haut-niveau de la morphologie et du mouvement. Nous montrons également comment, grâce à cette bonne déformation de l’enveloppe, nous pouvons utiliser les sommets du maillage déformé comme marqueurs pour la méthode de recalage du squelette du Chapitre 2. Dans les chapitres 2 et 3, nous avons construit un modèle de souris qui permet d’animer en même temps l’enveloppe et le squelette. Ce modèle est paramétré par OQR. Nous proposons donc dans le Chapitre 4 une méthode d’extraction de ces paramètres à partir soit d’une séquence de maillage sans cohérence temporelle soit directement à partir d’images segmentées. Pour contraindre le problème, nous faisons l’apprentissage d’un espace réduit de configurations d’OQR vraisemblables.

**Mots-clés :** Animation à partir de vidéos, reconstruction de surfaces, vision par ordinateur, analyse.

**Damien PASSEMIER**

Directeur de thèse : Jiang-Fen Yao (IRMAR, Université de Rennes 1).

**Inférence statistique dans un modèle à variances isolées de grande dimension**

*Soutenu le 4 décembre 2012  
IRMAR, Université de Rennes 1*

Cette thèse s'intéresse à l'estimation statistique dans un modèle à variances isolées (modèle spike) de grande dimension. La théorie des matrices aléatoires permet de prendre en compte cette spécificité, puisque la plupart des résultats limites considèrent que la taille de la matrice tend vers l'infini. Une part importante de ces résultats concerne la matrice de covariance empirique. Dans un premier temps, nous nous intéressons à l'estimation du nombre de facteurs/spikes. La différence de comportement des valeurs propres de la matrice de covariance empirique, selon que l'on considère celles correspondant aux spikes ou non, nous permet de construire un estimateur. Ce dernier correspond à la différence de deux valeurs propres consécutives ordonnées. Nous établissons la consistance de l'estimateur dans le cas où toutes les spikes sont distinctes, et le comparons à deux méthodes existantes à travers des simulations. L'estimateur dépend d'un seuil qui doit remplir certaines conditions. Dans la suite, nous étendons le résultat de consistance au cas d'égalité et améliorons l'estimateur en changeant de seuil. Dans un second temps, nous considérons les estimateurs du maximum de vraisemblance d'un modèle à facteurs strict à variance homoscedastique. En utilisant un théorème limite pour les statistiques spectrales linéaires, nous corrigeons l'estimateur de la variance commune en grande dimension en donnant l'expression de son biais et en établissant sa loi limite. Nous présentons une version corrigée du test du rapport de vraisemblance d'adéquation à un modèle à facteurs. Finalement, nous construisons un test d'égalité de deux spikes.

**Paul SAUVY**

Directeur de thèse : Jacques Giacomoni (LMAP - UMR CNRS 5142 - UPPA).

**Étude de quelques problèmes elliptiques et paraboliques quasi-linéaires avec singularités**

*Soutenu le 4 décembre 2012  
Université de Pau et des Pays de l'Adour*

## Résumés de thèses

---

Cette thèse s'inscrit dans le domaine mathématique de l'**analyse des équations aux dérivées partielles non-linéaires**. Plus précisément, nous avons fait ici l'étude de **problèmes quasi-linéaires singuliers**. Le terme 'singulier' fait référence à l'intervention d'une non-linéarité qui explose au bord du domaine où l'équation est posée. La présence d'une telle singularité entraîne un manque de régularité et donc de compacité des solutions qui ne nous permet pas d'appliquer directement les méthodes classiques de l'analyse non-linéaire pour démontrer l'**existence de solutions** et discuter des propriétés de **régularité** et de **comportement asymptotique** de ces solutions. Pour contourner cette difficulté, nous sommes amenés à établir des estimations *a priori* très fines au voisinage du bord du domaine en combinant diverses méthodes : méthodes de monotonie (reliée au principe du maximum), méthodes variationnelles, argument de convexité, méthodes de point fixe et semi-discrétisation en temps. A travers, l'étude de trois problèmes-modèle faisant intervenir l'**opérateur  $p$ -Laplacien**, nous avons montré comment ces différentes méthodes pouvaient être mises en œuvre. Les résultats que nous avons obtenus sont décrits dans les trois chapitres de cette thèse :

- Dans le Chapitre I, nous avons étudié un **problème d'absorption elliptique singulier**. En utilisant des *méthodes de sur- et sous solutions* et des *méthodes variationnelles*, nous établissons des résultats d'**existence de solutions**. Par des *méthodes de comparaison locale*, nous démontrons également la propriété de **support compact** de ces solutions, pour de fortes singularités.
- Dans le Chapitre II, nous étudions le cas d'un **système d'équations quasi-linéaires singulières**. Par des arguments de *point fixe* et de *monotonie*, nous démontrons deux résultats généraux d'**existence de solutions**. Dans un deuxième temps, nous faisons une analyse plus détaillée de systèmes du type Gierer-Meinhardt modélisant des phénomènes biologiques. Des résultats d'**unicité** ainsi que des estimations précises sur le **comportement** des solutions sont alors obtenus.
- Dans le Chapitre III, nous faisons l'étude d'un **problème d'absorption, parabolique singulier**. Nous établissons par une méthode de *semi-discrétisation en temps* des résultats d'**existence de solutions**. Grâce à des inégalités d'énergie, nous démontrons également l'**extinction en temps fini** de ces solutions.

**Mots-clés :** Opérateur  $p$ -Laplacien, problèmes singuliers, problèmes/systèmes elliptiques, problèmes paraboliques, solution à support compact, stabilité des solutions, extinction en temps fini.

**Benoît FABREGES**

Directeur de thèse : Bertrand Maury (Université Paris-Sud 11).

**Une méthode de prolongement régulier pour la simulation d'écoulements  
fluide/particules**

*Soutenue le 6 décembre 2012*

*Université Paris-Sud 11*

Nous étudions dans ce travail une méthode de type éléments finis dans le but de simuler le mouvement de particules rigides immergées. La méthode développée ici est une méthode de type domaine fictif. L'idée est de chercher un prolongement régulier de la solution exacte à tout le domaine fictif afin d'obtenir une solution régulière sur tout le domaine et retrouver l'ordre optimal de l'erreur avec des éléments d'ordre 1. Le prolongement régulier est recherché en minimisant une fonctionnelle dont le gradient est donné par la solution d'un nouveau problème fluide faisant intervenir une distribution simple couche dans le second membre. Nous faisons une analyse numérique, dans le cas scalaire, de l'approximation de cette distribution par une combinaison de masse de Dirac. Un des avantages de cette méthode est de pouvoir utiliser des solveurs rapides sur maillages cartésiens tout en conservant l'ordre optimal de l'erreur. Un autre avantage de la méthode vient du fait que les opérateurs ne sont pas modifiés, seuls les seconds membres dépendent de la géométrie du domaine initial. Nous avons de plus écrit un code C++ parallèle en deux et trois dimensions, permettant de simuler des écoulements fluide/particules rigides avec cette méthode. Nous présentons ainsi une description des principales composantes de ce code.

**Jérôme LOHEAC**

Directeurs de thèse : Marius Tucsnak (Université de Lorraine) et Jean-François Scheid (Université de Lorraine).

**Contrôle en temps optimal et nage à bas nombre de Reynolds**

*Soutenue le 6 décembre 2012*

*Université de Lorraine*

Cette thèse est divisée en deux parties, le fil directeur étant la contrôlabilité en temps optimal.

Dans la première partie, après un rappel du principe du maximum de Pontryagin dans le cas des systèmes de dimension finie, nous mettrons en œuvre ce principe sur le cas d'un intégrateur non-holonyme connu sous le nom de système de Brockett pour lequel nous imposons des contraintes sur l'état. La difficulté de

## Résumés de thèses

---

cette étude provient du fait que l'on considère un problème de contrôle avec des contraintes sur l'état.

Après cet exemple, nous nous intéressons à une extension du principe du maximum de Pontryagin au cas des systèmes de dimension infinie. Plus précisément, l'extension que nous considérons s'applique au cas de systèmes exactement contrôlables en tout temps. Typiquement, ce résultat s'applique à l'équation de Schrödinger avec contrôle interne. Pour de tels systèmes, sous une condition de contrôlabilité approchée, depuis un ensemble de temps non négligeable, nous montrons l'existence d'un contrôle bang-bang.

Dans la seconde partie, nous étudions le problème de la nage à bas nombre de Reynolds. Une modélisation physique convenable nous permet de le formaliser comme un problème de contrôle.

Nous obtenons alors un résultat de contrôlabilité sur ce problème. Plus précisément, nous montrons que quel que soit la forme du nageur, celui-ci peut se déformer légèrement pour suivre une trajectoire imposée.

Nous étudions ensuite le cas d'un nageur à symétrie axiale. Les résultats de la première partie permettent alors la recherche d'un contrôle en temps optimal.

**Mots-clés :** Commande, Théorie de ; Reynolds, Nombre de ; Interaction fluide-structure ; Schrödinger, Équation de ; Optimisation mathématique.

### Marthe ROUX

Directeur de thèse : Jean-Paul Vila (Université Toulouse III - Paul Sabatier).

#### Modèles de fronts pour films minces

*Soutenue le 6 décembre 2012*

*Université Toulouse III - Paul Sabatier*

Dans cette thèse, nous souhaitons décrire la dynamique du front d'avancement d'un film mince s'écoulant sur un plan incliné non rugueux. Nous nous intéressons surtout au problème de point triple situé à l'interface entre la paroi solide, le fluide en mouvement et l'air, par exemple lors de l'écoulement d'une goutte sur une surface inclinée. Dans une première partie, nous expliquons pourquoi on peut se ramener aux équations de Stokes et pourquoi le problème résultant est mal posé. Pour y remédier, la condition de non-glissement à la paroi est remplacée par une condition de glissement lorsqu'on est proche du front. Ainsi on réussit à trouver une solution dans  $H^1$ . Puis nous développons la dynamique de l'écoulement à l'amont du front : un film mince. Cet écoulement peut se modéliser sous la forme d'équations de type Saint-Venant sur la hauteur et le débit. Nous justifions cette construction à partir des équations de Navier-Stokes en utilisant un développement asymptotique en fonction du paramètre onde longue. Dans la zone du front nous résolvons le système de Stokes stationnaire avec glissement au fond par un développement asymptotique en fonction du nombre ca-

pillaire. Le front est divisé en une zone interne près du front et une zone externe loin du front, puis les solutions de chaque zone sont soit raccordées directement (angles dynamique et statique égaux), soit raccordées au moyen d'une zone intermédiaire (angles dynamique et statique différents). Cela nous conduit à deux familles de modèles. En réunissant les modèles type Saint-Venant et les différents modèles de front, nous obtenons un modèle de Saint-Venant tenant compte de la dynamique du front. A partir de ce modèle à deux équations nous pouvons écrire un modèle plus simple à une équation sur la hauteur. Ce modèle permet d'étendre les modèles existants avec adhérence à des modèles avec glissement. On peut alors réaliser des simulations numériques combinant un front d'avancement et un film mince.

**Pierre-Henri COCQUET**

Directeurs de thèse : Abderrahmane Bendali (IMT, INSA Toulouse) et Vincent Mouysset (M2SN, ONERA Centre de Toulouse).

**Etude mathématique et numérique de modèles homogénéisés de métamatériaux**

*Soutenue le 7 décembre 2012*

*Université Toulouse III - Paul Sabatier*

Cette thèse concerne la modélisation mathématique et l'approximation numérique de modèles homogénéisés de métamatériaux.

Dans la première partie on étudie des problèmes de propagation d'ondes en présence de métamatériaux homogénéisés tels que les équations de Maxwell, le système de l'acoustique ou de l'élasticité linéaire. Nous établissons des résultats d'existence et d'unicité pour ces systèmes sous des hypothèses phénoménologiques sur le métamatériau en accord avec certains modèles de la littérature. Nous abordons ensuite leurs approximations numériques. Nous présentons des résultats concernant les éléments finis pour l'approximation de l'équation de Helmholtz qui montrent que ce schéma peut ne pas converger en présence de métamatériaux. On propose alors un schéma adapté aux métamatériaux, le schéma EF-AL, qui converge dès que le problème est bien-posé. On termine par l'étude du schéma Galerkin Discontinu dont on montre numériquement sa convergence sur des exemples de métamatériaux.

La seconde partie présente l'homogénéisation non-périodique formelle de métamatériaux acoustiques. Les travaux d'A.G. Ramm sur la création de milieux à partir d'assemblages d'obstacles sont repris afin de préciser l'asymptotique fine du comportement du champ diffracté par un nombre fini de petites boules de rayon  $\delta$ . On utilise pour cela la méthode des développements asymptotiques raccordés. On établit l'existence et l'unicité de ce dernier et des estimations d'erreurs qui valident l'approche formelle. On suppose ensuite que le nombre de petits

## Résumés de thèses

---

objets tend vers l’infini lorsque  $\delta$  tend vers 0 et passons à la limite dans le développement. Une approximation de Born permet d’obtenir l’indice du milieu contenant tous les objets qui, dans certains cas, est celui d’un métamatériau.

### **Mustapha HACHED**

Directeurs de thèse : A. Bouhamidi et K. Jbilou (Université du Littoral Côte d’Opale).

### **Méthodes de sous-espaces de Krylov matriciels appliquées aux équations aux dérivées partielles**

*Soutenue le 7 décembre 2012*

*Université du Littoral Côte d’Opale*

Cette thèse porte sur des méthodes de résolution d’équations matricielles appliquées à la résolution numérique d’équations aux dérivées partielles ou de problèmes de contrôle linéaire.

Dans la première partie de ce travail, nous nous intéressons au cas d’équations linéaires générales de la forme  $\mathcal{M}(X) = C$ , où  $\mathcal{M}$  est un opérateur linéaire matriciel. La méthode dite de GMRES globale, dont nous rappelons le principe et les propriétés, s’avère particulièrement adaptée au cas où  $\mathcal{M}(X)$  ne peut s’exprimer aisément sous forme polynomiale. On se penche ensuite sur un cas particulier d’équations de Sylvester  $AX + XB = C$  rencontré dans les problèmes issus de la discrétisation d’équations aux dérivées partielles. Nous proposons une méthode, notée LR-BA-ADI (Low Rank Block Arnoldi ADI) consistant à utiliser un préconditionnement de type ADI et une méthode de Krylov par blocs économique en termes de mémoire. Enfin, nous proposons une méthode de type Newton-Krylov par blocs avec préconditionnement ADI pour les équations de Riccati issues de problèmes de contrôle linéaire quadratique. Des tests comparatifs et des résultats de convergence et de majoration de l’erreur sont donnés.

Dans la seconde partie, nous nous intéressons d’abord à la résolution numérique d’équations de type Burgers de la forme  $\partial_t u + \mu(u \cdot \nabla)u - \nu Lu = f$  sur un ensemble  $\Omega \times [t_0, T]$ , où  $\Omega$  est un domaine de  $R^d$ ,  $d \geq 2$ ,  $\mu$  et  $\nu$  sont deux paramètres et  $L$  est un opérateur différentiel linéaire. Nous regardons dans un premier temps le cas où  $\Omega$  est un rectangle de  $R^2$  puis le cas où le domaine  $\Omega$  est choisi quelconque dans  $R^d$ ,  $d \geq 2$ , l’approche choisie repose alors sur l’interpolation par des fonctions à base radiale, ne nécessitant pas de maillage et dont le formalisme est indépendant de la dimension. Les cas stationnaire et évolutif sont traités successivement. Enfin, nous nous intéressons à un problème de contrôle linéaire quadratique. En particulier, nous nous penchons sur l’équation de la chaleur en deux dimensions. La recherche du contrôle qui minimise une certaine énergie nous ramène à la résolution d’une équation de Riccati. Cette équation est résolue numériquement par la méthode de type Newton-Krylov par blocs avec préconditionnement ADI.

**Guillaume ROLLAND**

Directeur de thèse : Michel Pierre (IRMAR, Université de Rennes 1).

**Global existence and fast-reaction limit in reaction-diffusion systems with cross effects**

*Soutenu le 7 décembre 2012  
IRMAR, Université de Rennes 1*

On étudie des systèmes d'équations aux dérivées partielles paraboliques issus de modèles de cinétique chimique, de dynamique des populations et de la théorie de l'électromigration. On s'intéresse à des questions d'existence de solutions globales en temps, à l'unicité de solutions faibles, ainsi qu'à la limite de réaction rapide dans un système de réaction-diffusion.

Dans un premier chapitre, on étudie deux systèmes aux diffusions croisées. On commence par s'intéresser à un modèle de dynamique des populations, où les effets croisés dans les interactions entre les différentes espèces sont modélisés par des opérateurs non locaux. Pour toute dimension d'espace, on prouve l'existence et l'unicité de solutions globales régulières. On s'intéresse ensuite à un système aux diffusions croisées qui apparaît comme la limite de réaction rapide d'un système classique associé à la réaction chimique  $C_1 + C_2 = C_3$ . On prouve alors la convergence, lorsque  $k$  tend vers l'infini, de la solution du système avec une vitesse de réaction finie  $k$ , vers une solution globale du système limite.

Le second chapitre contient de nouveaux résultats d'existence globale pour des systèmes de réaction-diffusion. Pour des réseaux de réactions chimiques élémentaires du type  $C_i + C_j = C_k$  qui suivent la loi d'Action de Masse, on montre l'existence et l'unicité de solutions globales fortes, pour des dimensions en espace  $N < 6$  dans le cas semi-linéaire et  $N < 4$  dans le cas quasi-linéaire. On montre aussi l'existence de solutions globales faibles pour une classe de systèmes paraboliques quasi-linéaires dont les non-linéarités sont au plus quadratiques et dont les données initiales sont seulement supposées positives et intégrables.

Dans le dernier chapitre, on généralise un résultat d'existence globale de solutions fortes pour des systèmes de réaction-diffusion dont les non-linéarités ont une structure 'triangulaire', pour lesquels on prend désormais en compte des termes d'advection et des coefficients de diffusion dépendant du temps et de la variable d'espace. Ce résultat est ensuite utilisé dans un argument de point fixe de Leray-Schauder pour prouver l'existence en toute dimension de solutions globales à un problème d'électromigration-diffusion.

Résumés de thèses

---

**Cyril RIGAULT**

Directeurs de thèse : Mohammed Lemou (CNRS & IRMAR) et Florian Méhats (IRMAR, Université de Rennes 1).

**Étude mathématique de modèles cinétiques pour la gravitation tenant compte d'effets relativistes : stabilité, solutions autosimilaires**

*Soutenue le 11 décembre 2012  
IRMAR, Université de Rennes 1*

Cette thèse propose une étude mathématique du comportement des solutions autour d'états stationnaires pour des systèmes cinétiques gravitationnels de type Vlasov.

Les trois premières parties présentent des résultats théoriques. Tout d'abord, par une approche variationnelle, on construit des états stationnaires pour le système de Vlasov-Manev et on montre leur stabilité orbitale. Ensuite, on prouve l'existence de solutions autosimilaires explosant en temps fini autour d'un état stationnaire pour le système dit de 'Vlasov-Manev pur'. Enfin on démontre la stabilité orbitale d'une large classe d'états stationnaires pour le système de Vlasov-Poisson relativiste. Ces résultats s'appuient sur de nouvelles méthodes utilisant la rigidité du flot. Celles-ci permettent notamment d'obtenir la séparation d'états stationnaires en évitant l'étude d'équations d'Euler-Lagrange non locales, de résoudre un problème variationnel avec une infinité de contraintes et de prouver la stabilité orbitale de solutions stationnaires non nécessairement obtenues de manière variationnelle.

Dans la quatrième et dernière partie, nous étudions numériquement l'équation de Vlasov-Poisson en coordonnées radiales. Après avoir choisi un système de variables adéquates, nous présentons des schémas numériques de différences finies conservant la masse et l'Hamiltonien du système.

**Alexandre UZUREAU**

Directeurs de thèse : Yves Coudière (INRIA, Bordeaux) et Mazen Saad (Ecole Centrale de Nantes).

**Modélisations et calculs pour la cicatrisation osseuse. Application à la modélisation d'un bioréacteur**

*Soutenue le 11 décembre 2012  
Laboratoire de Mathématiques Jean Leray, Université de Nantes*

Ce manuscrit de thèse décrit en profondeur un modèle de cicatrisation osseuse qui est ensuite couplé avec un modèle de dynamique des fluides pour modéliser

la croissance osseuse en bioréacteur (unité reproduisant les conditions de culture *in vivo*). Le modèle proposé est un modèle de dynamique des populations décrivant l'évolution spatio-temporelle des cellules souches mésenchymateuses, des ostéoblastes, de la matrice osseuse et d'un facteur de croissance. Pour ce modèle, nous avons montré à l'aide d'approximations de Faedo-Galerkin qu'il admettait au moins une solution faible physiquement admissible (concentrations positives et majorées). Le point délicat de cette démonstration réside dans l'obtention des estimations d'énergie, la difficulté provient du fait que certaines populations n'admettent pas de termes spatiaux. Nous avons ensuite proposé un schéma numérique pour des maillages admissibles. La discrétisation est classique hormis pour le terme d'haptotaxie (non linéaire) qui est discrétisé par un schéma de type décentré amont mais vérifiant en plus une propriété de monotonie. Nous avons montré l'existence et la convergence des solutions discrètes physiquement admissibles vers une solution faible physiquement admissible. Grâce à ce schéma, nous avons réalisé différentes simulations qui nous ont permis de valider le modèle. Pour modéliser la culture osseuse en bioréacteur, nous avons couplé le modèle précédent avec un modèle de dynamique des fluides en milieu poreux. Ce couplage prend en compte les effets des contraintes de cisaillement sur la différenciation ostéoblastique et le transport des populations par l'écoulement du milieu de culture.

**Mots-clés :** Croissance osseuse, simulation, modélisation, bioréacteur, volumes finis, analyse numérique.

**David CHEREL**

Directeur de thèse : Eric Blayo-Nogret (Université Joseph Fourier).

### Décomposition de domaine pour des systèmes issus des équations de Navier-Stokes

Soutenue le 12 décembre 2012

Laboratoire Jean Kuntzmann et Université de Grenoble

Un cadre général de ce travail est l'étude des problématiques de couplage de modèles dans le contexte applicatif de l'hydraulique et de l'océanographie. Ce sont des domaines dans lesquels les besoins sont nombreux, utilisant une vaste gamme de modèles tels que les équations de Saint-Venant, de Navier-Stokes, de Navier-Stokes hydrostatiques ou les équations primitives. Pour aborder ces questions de couplage, nous avons choisi d'utiliser les méthodes de Schwarz, pour leur caractère non-intrusif vis-à-vis des codes de calcul. Nous avons proposé et implémenté des algorithmes de décomposition de domaine pour les équations de Navier-Stokes à partir des méthodes de Schwarz classiques et optimisées. Ces deux classes de méthodes ont été utilisées pour deux discrétisations possibles des équations de Navier-Stokes : pour une méthode de projection où la vitesse et la pression sont calculées dans deux étapes différentes, et pour un schéma couplé

## Résumés de thèses

---

où toutes les inconnues sont calculées lors de la même étape. Ces conditions ont ensuite été étendues, sans être testées numériquement, à des équations proches des équations de Navier-Stokes, à savoir dans un premier temps aux équations d’Oseen (qui sont une version linéarisée des équations de Navier-Stokes), et dans un deuxième temps en vue d’un couplage entre les équations de Navier-Stokes et les équations de Navier-Stokes hydrostatiques.

**Mots-clés :** Décomposition de domaines, couplage, équations de Stokes, méthodes de Schwarz, méthodes numériques.

### **Sandrine DALLAPORTA**

Directeur de thèse : Michel Ledoux (Institut de Mathématiques de Toulouse : IMT).

#### **Quelques aspects de l’étude quantitative de la fonction de comptage et des valeurs propres de matrices aléatoires**

*Soutenue le 20 décembre 2012*

*Université Paul Sabatier, Toulouse*

Cette thèse est consacrée à l’étude quantitative de la fonction de comptage et des valeurs propres de matrices aléatoires. Initialement introduites dans le cadre de la physique statistique, ces matrices servent de modèles pour des opérateurs de dimension infinie. Leurs propriétés asymptotiques ont donc été particulièrement étudiées. Devenues populaires grâce au phénomène d’universalité, *i.e.* le fait que ces propriétés asymptotiques ne dépendent pas de la loi des coefficients de la matrice, leur étude a intéressé de nombreux domaines pour lesquels les propriétés à taille de matrice fixée sont plus exploitables que les propriétés asymptotiques. Nous nous sommes intéressés à ce pan de l’étude des matrices aléatoires par le biais de la fonction de comptage des valeurs propres, c’est-à-dire du nombre de valeurs propres d’une matrice présentes dans un intervalle  $I$ .

Après avoir introduit les modèles de matrices aléatoires que nous étudions dans cette thèse, les matrices de Wigner et de covariance, nous présentons les principaux résultats asymptotiques en lien avec la fonction de comptage et plus globalement avec les valeurs propres de ces matrices. Les outils permettant d’établir ces résultats d’universalité sont ensuite détaillés. L’accent est mis sur ceux qui peuvent être utilisés dans le cadre de l’étude quantitative, notamment les résultats récents de Erdős et al. d’une part et de Tao et Vu d’autre part, qui ont permis une avancée spectaculaire des études asymptotiques et non asymptotiques. Nous discutons ensuite les enjeux de l’étude non asymptotique et présentons les travaux effectués durant cette thèse.

Dans une première étude, nous établissons un théorème central limite pour la fonction de comptage des valeurs propres de matrices de Wigner et de covariance

et nous obtenons des estimées quantitatives sur l’espérance et la variance de cette fonction de comptage. Ces résultats se basent sur les résultats précédemment établis par Gustavsson et Su dans le cas de matrices gaussiennes et sont étendus à des familles plus générales de matrices de Wigner et de covariance par le biais de travaux récents de Erdős, Yau et Yin, Pillai et Yin et de Tao et Vu.

Dans une seconde étude, nous établissons des bornes quantitatives sur la variance des valeurs propres de matrices de Wigner. En s’appuyant sur les propriétés de la fonction de comptage, nous montrons d’abord une inégalité de déviation pour les valeurs propres individuelles à l’intérieur du spectre dans le cas de matrices gaussiennes et nous en déduisons les bornes dans ce cas. Afin d’étendre ces bornes au cas des matrices de Wigner plus générales, nous combinons de nouveau les outils de Erdős, Yau et Yin et de Tao et Vu. Nous établissons également des résultats analogues pour les matrices de covariance, en utilisant la même démarche.

**Vincent NOEL**

Directeur de thèse : Ovidiu Radulescu (Université Montpellier 2).

**Modèles réduits et hybrides de réseaux de réactions biochimiques –  
Applications à la modélisation du cycle cellulaire**

*Soutenue le 20 décembre 2012*

*IRMAR, Université de Rennes 1*

**Saber AMDOUNI**

Directeurs de thèse : Maher Moakher (ENIT-LAMSIN, Université de Tunis EL Manar) et Yves Renard (ICJ UMR5208, Université de Lyon, INSA-Lyon).

**Numerical analysis of some saddle point formulation with X-FEM type  
approximation on cracked or fictitious domains**

*Soutenue le 31 janvier 2013*

*Institut Camille Jordan*

Ce mémoire de thèse a été réalisé dans le cadre d’une collaboration scientifique avec ‘**La Manufacture Française des Pneumatiques Michelin**’. Il porte sur l’analyse mathématique et numérique de la convergence et de la stabilité de formulations mixtes ou hybrides de problèmes d’optimisation sous contrainte avec la méthode des multiplicateurs de Lagrange et dans le cadre de la méthode éléments finis étendus (XFEM). Tout d’abord, nous essayons de démontrer la stabilité de la discrétisation X-FEM pour le problème d’élasticité linéaire incompressible en

## Résumés de thèses

---

statique. Le deuxième axe, qui représente le contenu principal de la thèse est dédié à l'étude de certaines méthodes de multiplicateur de Lagrange stabilisées. La particularité de ces méthodes est que la stabilité du multiplicateur est assurée par l'ajout de termes supplémentaires dans la formulation faible. Dans ce contexte, nous commençons par l'étude de la méthode de stabilisation de Barbosa-Hughes appliquée au problème de contact unilatéral sans frottement avec XFEM cut-off. Ensuite, nous construisons une nouvelle méthode basée sur des techniques de projections locales pour stabiliser un problème de Dirichlet dans le cadre de X-FEM et une approche de type domaine fictif. Nous faisons aussi une étude comparative entre la stabilisation avec la technique de projection locale et la stabilisation de Barbosa-Hughes. Enfin, nous appliquons cette nouvelle méthode de stabilisation aux problèmes de contact unilatéral en élasto-statique avec frottement de Tresca dans le cadre de X-FEM.

**Mots-clés :** XFEM, domaine fictif, contact unilatéral, formulation mixte, stabilisation.

**Nicolas LANDON**

Directeur de thèse : Emmanuel Gobet (CMAP/CNRS UMR 7641).

### **Stratégies presque sûrement optimales : théorie et applications**

*Soutenue le 4 février 2013*

*CMAP, École Polytechnique*

Le chapitre 1 est une introduction aux problématiques rencontrées sur les marchés énergétiques : fréquence d'intervention faible, coûts de transaction élevés, évaluation des options spread. Le chapitre 2 étudie la convergence de l'erreur de couverture d'une option call dans le modèle de Bachelier, pour des coûts de transaction proportionnels et lorsque la fréquence d'intervention devient infinie. Le chapitre 3 développe tout d'abord de nouveaux outils de convergence presque sûre. Ces résultats ont de nombreuses conséquences sur le contrôle presque sûr de martingales et de leur variation quadratique, ainsi que de leurs incréments entre deux temps d'arrêt généraux. Ces résultats de convergence trajectorielle sont connus pour être difficiles à obtenir sans information sur les lois. Par la suite, nous appliquons ces résultats à la minimisation presque sûre de la variation quadratique renormalisée de l'erreur de couverture d'une option de payoff général (cadre multidimensionnel, payoff asiatique, lookback) sur une large classe de temps d'intervention. Une borne inférieure à notre critère est trouvée et une suite minimisante de temps d'arrêt optimale est exhibée : il s'agit de temps d'atteinte d'ellipsoïde aléatoire, dépendant du gamma de l'option. Le chapitre 4 étudie la convergence de l'erreur de couverture d'une option de payoff convexe (dimension 1) en prenant en compte des coûts de transaction à la Leland-Lott. Nous minimisons la variation quadratique de l'erreur de couverture sur une classe

de temps d'atteintes générales pour des Deltas vérifiant une certaine EDP non-linéaire sur les dérivées secondes. Nous exhibons aussi une suite de temps d'arrêt atteignant cette borne. Le chapitre 5 étend le chapitre 3 en considérant une fonctionnelle des variations discrètes d'ordre  $\beta_Y$  et de  $\beta_Z$  de deux processus d'Itô  $Y$  et  $Z$  à valeurs réelles. Le chapitre 6 étudie la discrétisation d'Euler d'un processus multidimensionnel  $X$  dirigé par une semi-martingale d'Itô  $Y$ . Nous minimisons sur les temps de la grille de discrétisation un critère quadratique sur l'erreur du schéma. Nous trouvons une borne inférieure et une grille optimale, ne dépendant que des données observables. Le chapitre 7 donne un théorème limite centrale pour des discrétisations d'intégrale stochastique sur des grilles de temps d'atteinte d'ellipsoïdes adaptées quelconque. La corrélation limite est conséquence d'asymptotiques fines sur les problèmes de Dirichlet. Dans le chapitre 8, nous nous intéressons aux formules d'expansion pour les options sur spread, pour des modèles à volatilité locale en conservant la propriété de martingale de la moyenne arithmétique et en exploitant la structure du payoff call.

**Mots-clés :** Convergence presque sûre, discrétisation d'intégrale, couverture d'option, coût de transaction, schéma d'Euler-Maruyama, convergence en loi, option sur spread, calcul d'expansion.

---

## Thèses en ligne!

Le service TEL (<http://tel.archives-ouvertes.fr/>) est dédié à l'archivage des thèses et des Habilitations à Diriger les Recherches. Il est modelé sur le serveur de prépublications HAL. Ces services ont été créés par le CCSD (Centre pour la Communication Scientifique Directe). TEL est géré en collaboration avec Mathdoc et la Société Française de Physique.

Le dépôt des thèses est libre, la vérification concerne seulement la pertinence du classement thématique et la correction des données administratives, comme pour HAL.

Tout nouveau docteur (ou habilité) peut ainsi rendre visible (en 24 heures environ) son document de soutenance, ce qui ne peut qu'être encouragé!

Thierry Dumont.

## Annonces de Colloques

*par* Thomas HABERKORN

### Mars 2013

EUROPEAN WORKSHOP ON HIGH ORDER NONLINEAR NUMERICAL METHODS FOR EVOLUTIONARY PDES (HONOM 2013)

*du 18 au 22 Mars 2013, à Bordeaux*

<http://honom2013.bordeaux.inria.fr/index.html>

HAUTE FRÉQUENCE : THÉORIES, NUMÉRIQUE, APPLICATIONS

*du 19 au 21 Mars 2013, à Nancy*

<http://hf2013.iecn.u-nancy.fr/HF2013/HF2013.html>

MATHEMATICAL MODELING IN CELL BIOLOGY

*du 25 au 29 Mars 2013, à Lyon*

<http://mathbio2013.sciencesconf.org/resource/page?id=3>

JOURNÉES DYNAMO (DYNAMIQUE NONLINÉAIRE ASYMPTOTIQUE MODÉLISATION)

*du 26 au 28 Mars 2013, à Orléans*

<http://www.univ-orleans.fr/mapmo/membres/lucas/DYNAMO-mars13/>

### Avril 2013

ECOLE D’HIVER D’OPTIMISATION STOCHASTIQUE

*du 7 au 13 Avril 2013, à Tignes*

<http://www.iot.ntnu.no/winterschool13/announcement.pdf>

OPTIMIZATION IN PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS, REACTION-DIFFUSION SYSTEMS AND PHASE FIELD MODELS

*du 7 au 12 Avril 2013, à Fréjus*

<http://math.fau.de/springschool>

PERSPECTIVES IN ANALYSIS AND PROBABILITY - OPENING CONFERENCE

*du 8 au 12 Avril 2013, à Rennes*

<http://www.lebesgue.fr/content/sem2013-opening-conference>

## Annonces de colloques

---

### SCHOOL STOCHASTIC CONTROL FOR THE MANAGEMENT OF RENEWABLE ENERGIES

*du 8 au 12 Avril 2013, à Marseille*

[http://cermics.enpc.fr/~delara/ENSEIGNEMENT/CIRM2013/Optim\\_ENR\\_CIRM2013/](http://cermics.enpc.fr/~delara/ENSEIGNEMENT/CIRM2013/Optim_ENR_CIRM2013/)

### JOURNÉE HISTOIRE DU CALCUL

*le 9 Avril 2013, à Paris*

<http://calcul.math.cnrs.fr/spip.php?article219>

### MODELING AND CONTROL OF SYSTEMS : APPLICATIONS TO NANO-SCIENCES, ENVIRONMENT AND ENERGY

*du 9 au 11 Avril 2013, à Grenoble*

<http://ljk.imag.fr/membres/Maelle.Nodet/GDRE2013>

### MATHS PHYSICS YOUNG RESEARCHERS MEETING

*du 11 au 12 Avril 2013, à Paris*

[lmv.math.cnrs.fr/conferences/maths-physics-young-researchers/](http://lmv.math.cnrs.fr/conferences/maths-physics-young-researchers/)

### MAMERN V – 2013 : 5TH INT. CONFERENCE ON APPROXIMATION METHODS AND NUMERICAL MODELING IN ENVIRONMENT AND NATURAL RESOURCES

*du 22 au 25 Avril 2013, à Grenade (Espagne)*

<http://www.ugr.es/~mamern/mamern13/>

## Mai 2013

### CONGRÈS SMAI 2013

*du 27 au 31 Mai 2013, à Seignosse*

<http://smi.emath.fr/smai2013/>

### THRESHOLD PHENOMENA AND RANDOM GRAPHS

*du 27 au 31 Mai 2013, à Paris*

<http://wiki-math.univ-mlv.fr/gemecod/doku.php/springschool2013>

## Juin 2013

### 11TH INTERNATIONAL CONFERENCE ON MATHEMATICAL AND NUMERICAL ASPECTS OF WAVES (WAVES 2013)

*du 3 au 7 Juin 2013, à Gammarth (Tunisie)*

<http://www.lamsin.tn/waves13/>

### ECOLE D'ÉTÉ CIMI EN TRAITEMENT D'IMAGES

*du 10 au 14 Juin 2013, à Saint Lary*

<http://www.cimi.univ-toulouse.fr/imagetrimester/school.html>

JOURNÉES DE PROBABILITÉS

*du 17 au 21 Juin 2013, à Orléans*

<http://www.univ-orleans.fr/mapmo/membres/berglund/proba2013>

SAT 2013 : INTERNATIONAL CONFERENCE ON NEW TRENDS IN SPLINES AND APPROXIMATION THEORY

*du 19 au 21 Juin 2013, à Rennes*

<http://sat2013.sciencesconf.org/>

15ÈMES RENCONTRES MATHÉMATIQUES DE ROUEN, EDP NON LINÉAIRES ET APPLICATIONS, EN MÉMOIRE DE DOMINIQUE BLANCHARD

*du 19 au 21 Juin 2013, à Rouen*

<http://www.univ-rouen.fr/LMRS/RMR13/index.html>

ECOLE DE RECHERCHE "EQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES EN BIOLOGIE ET MÉDECINE"

*du 24 Juin au 5 Juillet 2013, à La Havane (Cuba)*

<http://www.cimpa-icpam.org/spip.php?article505>

13TH INTERNATIONAL CONFERENCE : "NUMERICAL ANALYSIS AND SCIENTIFIC COMPUTATION WITH APPLICATIONS"

*du 24 au 26 Juin 2013, à Calais*

<http://www-lmpa.univ-littoral.fr/NASCA13/>

DEUXIÈMES RENCONTRES

*du 27 au 28 Juin 2013, Lyon*

[HTTP://R2013-LYON.SCIENCESCONF.ORG/](http://R2013-LYON.SCIENCESCONF.ORG/)

**Juillet 2013**

7TH INT. CONFERENCE ON SENSITIVITY ANALYSIS OF MODEL OUTPUT

*du 1er au 4 Juillet 2013, à Nice*

<http://www.gdr-mascotnum.fr/2013>

**Août 2013**

MICROSTRUCTURE : EVOLUTION AND DYNAMICS

*du 25 au 29 Août 2013, à Technion (Israel)*

<http://cmssummer2013.net.technion.ac.il>

Annonces de colloques

---

**Septembre 2013**

CONFÉRENCE XFEM 2013

*du 11 au 13 Septembre 2013, à Lyon*

<http://xfem2013.sciencesconf.org/>

**Octobre 2013**

LES MATHÉMATIQUES AU CARREFOUR DES CULTURES DE LA MÉDITERRANÉE

*du 19 au 22 Octobre 2013, à Marseille*

<http://www.jnmarseille2013.fr/index4.php>

SCHOOL AND CONFERENCE "LÉVY PROCESSES AND SELF-SIMILARITY 2013"

*du 28 Octobre au 9 Novembre 2013, à Tunis (Tunisie)*

<http://levy-autosimilarity-tunis2013.math.cnrs.fr/index.html>

## Revue de presse

par Ana MATOS

REVUE DE PRESSE

JÖRG LIESEN, ZDENĚK STRAKOŠ : *Krylov Subspace Methods. Principles and Analysis, Mathématiques et Applications, Oxford University Press, Oxford, 2013.*

Beaucoup de livres de mathématiques sont très secs, ils ne contiennent pas beaucoup de substance, de chair, pour lier les équations par des idées et des développements. Ce sont ces à côtés, ces explications, qui rendent un cours magistral plus complet, plus instructif, que la simple lecture d'un manuel lorsque l'on doit, ou que l'on veut, se mettre au courant d'un nouveau domaine. De nombreux livres sur les méthodes de sous-espaces de Krylov pour la résolution itérative des systèmes linéaires ont déjà été publiés. L'ouvrage présenté ici se distingue des autres (remarque qui n'en est pas une critique) par les très nombreux et longs développements qu'il contient. Les auteurs détaillent les tenants et les aboutissants des méthodes, des algorithmes, des théorèmes, des mises en œuvre, des résultats numériques, etc. Des notes historiques, fort intéressantes, les complètent. Mais, d'un autre côté, cela rend le livre presque trop dense, il faut le lire entièrement, la tête entre les mains. On ne peut pas se contenter de le parcourir à la recherche d'un renseignement précis et synthétique. Cette remarque n'en est pas non plus une critique, mais un avertissement au lecteur, car le texte est extrêmement bien écrit, par deux spécialistes renommés du sujet, il contient une masse énorme de résultats et d'informations que l'on ne retrouve pas toujours ailleurs. La bibliographie ne contient pas moins de 691 références.

Les sous-espaces de Krylov sont à la base de la très grande majorité des méthodes itératives utilisées actuellement pour la résolution des grands systèmes d'équations linéaires (provenant en général de la discrétisation d'équations aux dérivées partielles). L'importance majeure de ce domaine de l'analyse numérique n'est donc plus à discuter. Après une introduction qui replace le sujet dans son contexte mathématique et historique, le second chapitre expose les méthodes de sous-espaces de Krylov dans les cadre des méthodes de projection. On présente les méthodes d'Arnoldi et de Lanczos et l'on montre comment certaines méthodes de résolution des systèmes d'équations linéaires en découlent. Le chapitre suivant est consacré aux moments d'une matrice et à la réduction de modèle. Pour ce faire, on passe par les formules de quadrature de Gauss, les polynômes orthogonaux et les fractions continues. Pour mettre en œuvre une méthode de Krylov il

## Revue de Presse

---

est nécessaire de posséder des relations de récurrences à peu de termes. L'établissement de telles relations forme le quatrième chapitre. Le dernier chapitre traite des problèmes pratiques de mise en œuvre des algorithmes : concept général de convergence, coût des calculs, complexité des divers algorithmes, analyse de leur comportement en arithmétique exacte et en arithmétique finie, propagation des erreurs numériques. Des exemples numériques sont donnés et commentés. Tous les aspects de toutes les questions sont largement abordés.

Ce livre foisonnant deviendra certainement une référence incontournable dans ce domaine.

*Par Claude Brezinski, Professeur Emérite, Université de Lille 1.*

BERNARD BEAUZAMY : *Archimedes' Modern Works*, Editions SCM, 2012. (ISBN 978-2-9521458-7-9).

On a abondamment écrit depuis 2000 ans sur Archimède, beaucoup de légendes (comme celle des miroirs enflammant la flotte romaine devant Syracuse) sont venues se rajouter aux rares faits historiques avérés, mais il serait difficile de trouver dans le passé des ouvrages de *mathématiciens* expliquant dans le détail les travaux mathématiques d'Archimède *en vue de les prolonger*. Ce livre de Bernard Beauzamy semble être le premier, à notre connaissance, à poursuivre cette double ambition : d'une part, nous faire pénétrer dans l'univers mental d'Archimède afin de nous rendre accessible l'originalité et la profondeur de sa pensée ; d'autre part, nous convaincre du caractère résolument moderne et toujours actuel de cette pensée.

Cet ouvrage séduira évidemment tous ceux qui s'intéressent à l'histoire des mathématiques, et, pour les amateurs de repères historiques, il inclut de nombreux rappels et références à l'histoire, tout à fait pertinents et enrichissants. Mentionnons en particulier (dans la partie III) les larges extraits des principaux auteurs latins par lesquels la mémoire de l'Archimède historique nous est parvenue : Plutarque, Polybe, Tite-Live, Vitruve, Cicéron. On appréciera également - mais pour d'autres raisons - l'évocation, sous forme de fiction historique, du 'second' siège de Syracuse (cf. part III 'The modern siege of Syracuse'), qui permet à l'auteur de décocher au passage quelques traits assez bien sentis à certains travers de la modernité.

Mais cet ouvrage ne doit pas être vu comme une contribution supplémentaire à l'histoire des mathématiques, ni comme un simple hommage  $\tilde{\pm}$  un de plus - au génie d'Archimède ; sa contribution principale réside dans la thèse développée par l'auteur, *nombreux exemples concrets à l'appui*, selon laquelle la démarche et les concepts inventés par Archimède demeurent, aujourd'hui encore, des sources d'inspiration extrêmement pertinentes et potentiellement fécondes.

La première partie du livre se veut une restitution, dans le langage mathématique moderne, d’une série de résultats concernant l’évaluation de la surface de calottes sphériques (objets tridimensionnels) comparativement à la surface de disques (objets bidimensionnels); ces résultats proviennent d’un manuscrit dit ‘codex A’, lequel contient, entre autres, le livre ‘De la sphère et du cylindre’. Cette première partie, très progressive et pédagogique, présente tous les détails du cheminement aboutissant aux résultats principaux (surface d’une sphère, surface d’une calotte sphérique), elle permet au lecteur désireux de ne pas en rester à une vision superficielle, de commencer à se familiariser avec l’univers mental d’Archimède. Parmi les nouveautés de cette première partie on remarquera la mise en évidence (pour la première fois, à notre connaissance) du fait que la projection dite ‘de Lambert’, bien connue de tous les cartographes (transformation d’un hémisphère terrestre sur le disque limité par l’équateur, avec la propriété remarquable de préserver la surface des objets projetés), *avait en réalité été imaginée par Archimède près de vingt siècles plus tôt!* Mais l’auteur ne s’arrête pas là et propose, dans le prolongement des résultats d’Archimède, des méthodes constructives générales permettant de définir de telles transformations préservant la mesure pour des objets de formes a priori quelconques. Il suggère de nombreuses applications possibles à des problèmes ‘modernes’ relevant de ce qu’il est convenu aujourd’hui d’appeler la ‘Recherche Opérationnelle’, en particulier des *problèmes de localisation optimale de ressources* (par ex. comment localiser au mieux un ensemble de centrales électriques, d’hôpitaux, de systèmes de surveillance, etc.).

La deuxième partie du livre est consacrée d’une part à l’exposé de ce qu’Archimède appelait ‘La Méthode’ dans une lettre à Eratosthène (la trace de ce texte - une partie du ‘codex C’ - n’a été retrouvée qu’au début du vingtième siècle); d’autre part à plusieurs applications possibles de ‘la Méthode’ à des problématiques contemporaines. ‘La Méthode’ est fondée sur l’utilisation systématique par Archimède d’une technique relevant de l’expérience mentale, dite ‘technique de pesée’, consistant à mettre en évidence un état d’équilibre pour le fléau d’une balance soumis à différents couples de signes positifs et négatifs, et de somme algébrique nulle (une idée décidément centrale à la pensée d’Archimède, on se souviendra de l’aphorisme : ‘donnez moi un point d’appui et je soulèverai le monde’). La présentation donnée par l’auteur est, là encore, très progressive et pédagogique, en procédant du particulier au général. Il commence (Partie II, chap 1) par montrer dans le détail le fonctionnement de ‘la Méthode’ pour établir le célèbre résultat concernant la sphère et le cylindre : volume du cylindre =  $\frac{3}{2}$  volume de la sphère inscrite dans le cylindre. Il est montré que ce résultat découle d’une condition d’équilibre dans une expérience mentale de ‘pesée’ faisant intervenir, bien sûr, les objets initialement donnés (la sphère et le cylindre) mais également, de façon inattendue, deux autres objets (un autre cylindre et un cône) dont l’irruption paraît aussi artificielle qu’elle est nécessaire au bon déroulement de la démonstration. A ce stade déjà, on ne peut qu’admirer l’ingéniosité et la

## Revue de Presse

---

puissance de la démarche ; mais l’auteur nous propose ensuite (chapitre 2, Partie II) une version généralisée de la ‘Méthode’, qui lui permet de montrer que de nombreux autres résultats du même type peuvent être obtenus grâce à la généralité et à la flexibilité de ‘la Méthode’ (position du centre de gravité d’un cône, comparaison du volume d’un cône et du cylindre de même hauteur, etc.).

A partir du chapitre 3 de la deuxième partie, l’auteur développe sa thèse sur la modernité de ‘la Méthode’, en suggérant de nombreuses applications possibles à des problématiques actuelles, citons entre autres, des questions liées à la *robustesse* (chap. 4), à la résolution d’équations polynomiales (chap. 6), à l’*optique* (approche géométrique inspirée de ‘la Méthode’ de la loi de Snell-Descartes, chap. 7) et au *contrôle non destructif* (chap. 8). Il faut reconnaître que, dans cette partie - qu’on pourrait qualifier de ‘prospective’ - les liens avec la ‘Méthode’ d’Archimède ne sont pas immédiats, et il est nécessaire pour bien les appréhender de se situer à un certain niveau d’abstraction. Plus précisément, il faut comprendre que le principe général sous-jacent consiste à établir une comparaison directe entre un objet - ou un phénomène - de caractéristiques *inconnues* (poids, volume, inertie, propriétés optiques, etc.) et un ou plusieurs autre(s) objet(s) dont les caractéristiques correspondantes sont *connues*, quitte à ce que ce (ces) objet(s) connus *résultent d’une construction artificielle* (dans le résultat d’Archimède sur les volumes de la sphère et le cylindre, la sphère est l’objet dont le volume est inconnu, elle est comparée à des cylindres et à un cône dont les volumes sont supposés connus ; dans ce cas, un des cylindres et le cône sont le résultat d’une construction artificielle). Ce que montre l’auteur dans les chapitres 4 et suivants, c’est que ce principe très général peut être appliqué avec profit à nombre de problématiques mettant en jeu bien d’autres caractéristiques que des poids ou des volumes. Ainsi, pour ne citer que cet exemple, il montre, dans le chapitre 7 que les lois de la réfraction en optique peuvent ‘être réinterprétées en termes de projection sur un objet artificiellement construit (en l’occurrence une surface hyperbolique) qui permet de rendre compte du comportement exact de tout rayon lumineux soumis aux lois de Snell-Descartes.

Soulignons, pour conclure, l’idée centrale qui nous paraît ressortir des derniers chapitres de cet ouvrage, à savoir que le *principe de comparaison directe*, qui est le fondement de ‘la Méthode’, procure naturellement une vision globale et synthétique des problèmes que ne donne pas - ou rarement - l’approche analytique, fondée sur des représentations algébriques et numériques. De ce fait, à côté de ses nombreux mérites, soulignés par Bernard Beauzamy (la robustesse par exemple), une des principales vertus de ‘la Méthode’ d’Archimède, est qu’elle contient un fort potentiel ‘heuristique’ qui mérite d’être redécouvert. En fin de compte, ce à quoi nous invite ce livre original et passionnant, véritable ‘rétrospective-prospective’, c’est à un retour aux sources du génie mathématique comme point de départ pour des progrès futurs.

*Par Michel Minoux, Professeur Emérite, Université Pierre et Marie Curie*

J. B. HIRIART-URRUTY : *Bases, outils et principes pour l'analyse variationnelle, collection Mathématiques & Applications, Volume 70, Springer 2013*

L'analyse variationnelle est un domaine très vaste, à la fois pointu et diversifié, qui, si on le maîtrise, permet d'aborder de façon très concrète et efficace la résolution de nombreux problèmes complexes d'optimisation parmi ceux qui foisonnent dans la vie réelle. Mais c'est aussi un domaine auquel il faut être bien préparé pour s'y aventurer, au risque sinon de s'y perdre.

Comme son titre l'indique, ce livre traite des bases, outils et principes pour l'analyse variationnelle. Il propose sous forme d'un cours, préparé avec le talent didactique propre à l'auteur et adressé à des étudiants du niveau Master 2 en Recherche, d'acquérir les principes qui sont à la base de l'analyse variationnelle : les conditions d'optimalité, l'analyse convexe et ses développements non-convexes. Le livre comporte six chapitres. Le premier passe en revue quelques concepts de base de l'analyse et les résultats fondamentaux d'existence de solutions en optimisation. Le deuxième présente des principes variationnels (ou conditions nécessaires d'optimalité approchée), tandis que le troisième étudie la projection sur des ensembles convexes fermés, dont les cônes, et la décomposition de Moreau qui en résulte. Le quatrième chapitre couvre les techniques et outils essentiels de l'analyse convexe, notamment la conjuguée et le sous-différentiel d'une fonction. S'appuyant sur ces techniques, les deux derniers chapitres abordent les problèmes non-convexes : le cinquième chapitre analyse différentes formes duales de problèmes non-convexes mais structurés, tandis que le sixième et dernier chapitre est consacré à l'étude de sous-différentiels généralisés de fonctions non différentiables.

Pour chacune des matières développées, les résultats récents les plus significatifs sont présentés, dans un style direct, allant à l'essentiel tout en conciliant soin et rigueur mathématique. L'accent est mis sur les idées et les concepts, leur motivation, leur enchaînement, ainsi que sur l'aspect formatif des preuves qui sont détaillées. Chaque chapitre se termine par une liste d'exercices qui permettent au lecteur d'entrer réellement dans la matière et de contrôler l'état de ses connaissances, tandis que le lecteur soucieux d'approfondir certaines parties de matière trouvera à la fin de chaque chapitre une liste de références avec commentaires.

Ce livre, ou plutôt ce cours, est en lui-même un bel outil pour toute personne qui souhaite s'aventurer dans le monde complexe mais passionnant de l'Analyse variationnelle. Elle sera en effet guidée par la maîtrise qu'a l'auteur du sujet et que l'on devine au fil des pages, tout en appréciant ses talents de conteur ainsi que son sens de l'humour omniprésent.

*Annick Sartenaer, Université de Namur (FUNDP)*

Revue de Presse

J. F. LE GALL : *Mouvement brownien, martingales et calcul stochastique, collection Mathématiques & Applications, Volume 71, Springer 2013*

Ce livre est issu d'un cours de deuxième année de master, enseigné par l'auteur à l'Université Pierre et Marie Curie, puis à l'Université Paris Sud. Il propose en 170 pages une approche concise et complète de la théorie de l'intégrale stochastique dans le cadre général des semimartingales continues. Après une introduction au mouvement brownien et à ses principales propriétés, les martingales et les semimartingales continues sont présentées en détail avant la construction de l'intégrale stochastique. Les outils du calcul stochastique, incluant la formule d'Itô, le théorème d'arrêt et de nombreuses applications, sont traités de manière rigoureuse. Le livre contient aussi un chapitre sur les processus de Markov et un autre sur les équations différentielles stochastiques, avec une preuve détaillée des propriétés markoviennes des solutions. De nombreux exercices permettent au lecteur de se familiariser avec les techniques du calcul stochastique.

Les thèmes abordés sont centraux et incontournables dans un Master 2 de probabilités ou de statistique mathématique. Jean-François Le Gall en donne une approche linéaire, cohérente et brillante. La présentation est complète, rigoureuse et soignée, ce qui en fait un ouvrage autonome dont la lecture est agréable. On y apprécie l'élégance des arguments et la profondeur avec économie de moyens, qui mènent suivant une ligne limpide à des notions très fines et puissantes ; notamment le traitement des subtilités de la théorie générale des martingales ou des processus de Markov est tout-à-fait magnifique.

Le livre possède un aspect original remarquable qu'il convient de souligner. Dans l'enseignement de la théorie du calcul stochastique, on est toujours amené à affronter la difficulté d'avoir à étudier une théorie nécessitant beaucoup de préparation technique sur les martingales, comme témoignés par les volumineux livres classiques de Dellacherie et Meyer, Karatzas et Shreve, Revuz et Yor, Rogers et Williams, etc. Un compromis, assez fréquent, pour contourner cette difficulté consiste à se limiter à l'intégrale stochastique par rapport au mouvement brownien. Ce livre réussit l'exploit de donner un cours très concis sur la théorie de l'intégrale stochastique par rapport aux semimartingales continues.

Le livre s'adresse aux étudiants de Master et de Grandes Ecoles scientifiques, mais également aux chercheurs et ingénieurs voulant se former aux méthodes modernes des mathématiques appliquées. Par sa qualité et son orientation il va trouver immédiatement sa place parmi les livres incontournables.

Josselin Garnier, Université Paris Diderot

H. LE DRET : *Équations aux dérivées partielles elliptiques non linéaires, collection Mathématiques & Applications, Volume 72, Springer 2013*

Ce livre est la concrétisation d'un cours de Master 2 que l'auteur a donné pendant plusieurs années à l'université Pierre et Marie-Curie. Il introduit un grand nombre de techniques très utiles pour l'étude des EDP elliptiques et est un support idéal pour un cours sur ce sujet. Les preuves sont limpides. On y remarque

un effort de clarté et de rigueur, fruit de l'expérience acquise par l'auteur dans le domaine. Il en résulte un ouvrage très agréable à la lecture.

Dans les trois premiers chapitres, l'auteur introduit les outils essentiels :

- Les résultats d'analyse réelle et d'analyse fonctionnelle qui sont constamment utilisés tout au long de l'ouvrage. Le choix (dans un domaine vaste) est judicieux, pertinent et équilibré.

- Les principaux théorèmes de point fixe utilisés en EDP avec une application simple qui illustre bien leur utilisation.

- Une présentation claire et détaillée des propriétés des opérateurs de Nemytsky sur les espaces de Lebesgue et de Sobolev. Ces outils sont de grande importance pour la théorie des équations aux dérivées partielles elliptiques non linéaires. La présentation est très complète et va jusqu'à introduire les mesures de Young.

Ensuite, diverses techniques de résolution sont exposées :

- Les principes du maximum et la théorie de la régularité elliptique.

- Les problèmes quasi-linéaires et la convexité "dans tous ses états", allant jusqu'à traiter le cas vectoriel et les "extensions" du concept de convexité nécessaires pour les applications en élasticité non linéaire par exemple. Cette partie très technique du Calcul des Variations est présentée de manière naturelle et limpide.

- La détection des points critiques à l'aide de méthodes du min-max ou bien de méthodes "topologiques".

Cet ouvrage très complet deviendra rapidement un classique grâce auquel les étudiants de Master feront leur premier apprentissage en EDP elliptique non linéaire. Il sera sans nul doute aussi de la plus grande utilité pour les chercheurs confirmés qui y trouveront des résultats précis et clairement exposés.

Arnaud Debussche, ENS Cachan Bretagne

S. COHEN AND J. ISTAS : *Fractional fields and applications, collection Mathématiques & Applications, Volume 73, Springer 2013*

The book by Serge Cohen and Jacques Istas is a welcomed self-contained introduction to fractional Brownian fields and their extensions. It is based on graduate courses taught by the authors in Grenoble and Toulouse's Universities. The presentation is clear and rigorous. Complete proofs of the basic properties are presented, while other more specific and technical results are just stated without proofs but with precise references. The book also contains numerous useful exercises as well as their solutions.

The purpose of the manuscript is to provide suitable definitions of the notions of local self-similarity and local regularity, and to construct different examples of Gaussian and non-Gaussian multifractional fields. The fractional Brownian motion is the fundamental example and other more sophisticated models are deduced from it. The main tool used to construct these random fields is the so-called harmonizable representation based on Fourier analysis. The manuscript focuses on the definition, construction and analytical properties of multifractional random fields, and avoids intentionally the use of stochastic calculus, which has

## Revue de Presse

---

been recently developed mainly for one-parameter processes and involves different ideas and techniques.

After a foreword by Stéphane Jaffard, comes a well written and very helpful preliminary chapter devoted to classical results on stochastic fields and fractal analysis. The basic notions on stochastic processes are presented, in some cases with detailed proofs. For instance, the authors provide a complete proof of the criterion for the convergence in distribution of continuous random fields. In the second part of this chapter the technical tools to deal with fractal analysis are developed, including fractional integrals and derivatives, fractional and Hausdorff dimension and wavelet bases.

A central notion throughout this book is self-similarity. A second chapter deals therefore with self-similarity, and especially with the celebrated Gaussian self-similar fields, called fractional Brownian fields after Mandelbrot and Van Ness’s seminal paper. Fundamental properties of fractional Brownian fields are then stated and proved. The case of the fractional Brownian motion is presented in detail with complete proofs of some of its basic properties like the regularity of the sample paths and law of iterated logarithm.

The second central notion of this book is the so-called local asymptotic self-similarity (in short lass), that is a local version of self-similarity, defined in the third chapter. A lengthy study is devoted to lass fields with finite variance. Among these lass fields, we find both Gaussian fields and non-Gaussian fields, called Lévy fields. The Lévy fields can be viewed as bridges between fractional Brownian fields and stable self-similar fields. A central issue concerns the identification of fractional parameters. This is the *raison d’être* of Chapter 5 where generalized quadratic variations methods are mainly used for estimating fractional parameters. This chapter contains a list of theorems on the consistency and central limit theorem for estimators of the Hurst parameter  $H$  and the singularity function  $C(t)$ .

Last but not least, the simulation issue is addressed in the last chapter. Unlike the previous issues, the simulation of fractional fields is still an ongoing research issue. The algorithms presented in this chapter are efficient but do not claim to close the debate.

All together this makes a very helpful book, both to researchers and students.

*Michel Benaïm, Université de Neuchâtel*

## CORRESPONDANTS LOCAUX

**Amiens** *Serge Dumont*

LAMFA  
Univ. de Picardie Jules Verne  
33 rue Saint Leu  
80039 Amiens CEDEX  
☎ 03 22 82 75 16  
Serge.Dumont@u-picardie.fr

**Angers** *Loïc Chaumont*

LAREMA  
Faculté des Sciences  
Univ. d'Angers  
2 bd Lavoisier  
49045 Angers CEDEX 01  
☎ 02 41 73 50 28 – 📠 02 41 73 54 54  
loic.chaumont@univ-angers.fr

**Antilles-Guyane** *Marc Lassonde*

Lab. de Mathématiques Informatique  
et Applications  
Univ. des Antilles et de la Guyane  
97159 Pointe à Pitre  
Marc.Lassonde@univ-ag.fr

**Avignon** *Alberto Seeger*

Dépt de Mathématiques  
Univ. d'Avignon  
33 rue Louis Pasteur  
84000 Avignon  
☎ 04 90 14 44 93 – 📠 04 9014 44 19  
alberto.seeger@univ-avignon.fr

**Belfort** *Michel Lenczner*

Lab. Mécatronique 3M  
Univ. de Technologie de Belfort-  
Montbelliard  
90010 Belfort CEDEX  
☎ 03 84 58 35 34 – 📠 03 84 58 31 46  
Michel.Lenczner@utbm.fr

**Besançon** *Nabile Boussaid*

Lab. de mathématiques  
UFR Sciences et Techniques  
16 route de Gray  
25030 Besançon CEDEX  
☎ 03 81 66 63 37 – 📠 03 81 66 66 23  
boussaid.nabile@gmail.com

**Bordeaux** *Olivier Saut*

Institut de Mathématiques  
Univ. Bordeaux I  
351 cours de la Libération  
33405 Talence CEDEX  
☎ 05 40 00 61 47 – 📠 05 40 00 26 26  
olivier.saut@math.u-bordeaux1.fr

**Brest** *Piernicola Bettiol*

Dép. de Mathématiques  
UFR Sciences et Techniques  
Université de Bretagne Occidentale  
6 av. Victor Le Gorgeu  
CS 93837  
29238 Brest Cedex 3  
☎ 02 98 01 73 86 – 📠 02 98 01 61 75  
Piernicola.Bettiol@univ-brest.fr

**Cachan ENS** *Frédéric Pascal*

CMLA  
ENS Cachan  
61 av. du Président Wilson  
94235 Cachan CEDEX  
☎ 01 47 40 59 46 – 📠 01 47 40 59 01  
frederic.pascal@cmla.ens-cachan.fr

**Caen** *Alain Campbell*

Groupe de Mécanique, Modélisation  
Mathématique et Numérique  
Lab. Nicolas Oresme  
Univ. de Caen  
BP 5186  
14032 Caen CEDEX  
☎ 02 31 56 74 80 – 📠 02 31 56 73 20  
alain.campbell@unicaen.fr

**Cergy** *Mathieu Lewin*

Dép. de Mathématiques,  
Univ. de Cergy-Pontoise / Saint-Martin  
2 av. Adolphe Chauvin  
95302 Cergy-Pontoise CEDEX  
☎ 01 34 25 66 15 – 📠 01 34 25 66 45  
mathieu.lewin@math.cnrs.fr

## Correspondants locaux

### **Clermont-Ferrand** *Olivier Bodart*

Lab. de Mathématiques Appliquées  
 Univ. Blaise Pascal  
 BP 45  
 63177 Aubière CEDEX  
 ☎ 04 73 40 79 65 – 📠 04 73 40 70 64  
 Olivier.Bodart@math.univ-bpclermont.fr

### **Grenoble** *Brigitte Bidegaray*

Lab. de Modélisation et Calcul, IMAG  
 Univ. Joseph Fourier  
 BP 53  
 38041 Grenoble CEDEX 9  
 ☎ 04 76 57 46 10 – 📠 04 76 63 12 63  
 Brigitte.Bidegaray@imag.fr

### **Compiègne**

*Véronique Hédou-Rouillier*

Équipe de Mathématiques Appliquées  
 Dept Génie Informatique  
 Univ. de Technologie  
 BP 20529  
 60205 Compiègne CEDEX  
 ☎ 03 44 23 49 02 – 📠 03 44 23 44 77  
 Veronique.Hedou@utc.fr

### **Israël**

*Ely Merzbach*

Dept of Mathematics and Computer  
 Science  
 Bar Ilan University Ramat Gan.  
 Israel 52900  
 ☎ + 972 3 5318407/8 – 📠 + 972 3 5353325  
 merzbach@macs.biu.ac.il

### **Dijon**

*Christian Michelot*

UFR Sciences et Techniques  
 Univ. de Bourgogne  
 BP 400  
 21004 Dijon CEDEX  
 ☎ 03 80 39 58 73 – 📠 03 80 39 58 90  
 michelot@u-bourgogne.fr

### **La Réunion**

*Philippe Charton*

Dép. de Mathématiques et Informa-  
 tique IREMA  
 Univ. de La Réunion  
 BP 7151  
 97715 Saint-Denis Messag CEDEX 9  
 ☎ 02 62 93 82 81 – 📠 02 62 93 82 60  
 Philippe.Charton@univ-reunion.fr

### **École Centrale de Paris**

*Anna Rozanova-Pierrat*

École Centrale de Paris  
 Lab. Mathématiques Appliquées aux  
 Systèmes,  
 Grande Voie des Vignes,  
 92295 Châtenay-Malabry CEDEX  
 ☎ 01 41 13 17 19 – 📠 01 41 13 14 36  
 anna.rozanova-pierrat@ecp.fr

### **Le Havre**

*Adnan Yassine*

IUT du Havre  
 Place Robert Schuman  
 BP 4006  
 76610 Le Havre.  
 ☎ 02 32 74 46 42 – 📠 02 32 74 46 71  
 adnan.yassine@iut.univ-lehavre.fr

### **États-Unis**

*Rama Cont*

IEOR, Columbia University  
 316 S. W. Mudd Building  
 500 W. 120th Street, New York,  
 New York 10027 – États-Unis  
 ☎ + 1 212-854-1477  
 Rama.Cont@columbia.edu

### **Le Mans**

*Alexandre Popier*

Dép. de Mathématiques  
 Univ. du Maine  
 Av. Olivier Messiaen  
 72085 Le Mans CEDEX 9  
 ☎ 02 43 83 37 19 – 📠 02 43 83 35 79  
 Alexandre.Popier@univ-lemans.fr

### **Évry la Génopole**

*Laurent Denis*

Dépt de Mathématiques  
 Univ. d'Évry Val d'Essonne  
 B<sup>d</sup> des Coquibus  
 91025 Évry CEDEX  
 ☎ 01 69 47 02 03 – 📠 01 69 47 02 18  
 laurent.denis@univ-evry.fr

### **Liban**

*Hyam Abboud*

Fac. des Sciences et de Génie Informa-  
 tique  
 Univ. Saint-Esprit de Kaslik  
 BP 446 Jounieh  
 Liban  
 ☎ + 961 9 600 914  
 hyamabboud@usek.edu.lb

## Correspondants locaux

**Lille** *Caterina Calgaro*  
 Lab. de Mathématiques Appliquées  
 Univ. des Sciences et Technologies de  
 Lille  
 Bat. M2, Cité Scientifique  
 59655 Villeneuve d’Ascq CEDEX  
 ☎ 03 20 43 47 13 – 📠 03 20 43 68 69  
 Caterina.Calgaro@univ-lille1.fr

**Limoges** *Samir Adly*  
 LACO  
 Univ. de Limoges  
 123 av. A. Thomas  
 87060 Limoges CEDEX  
 ☎ 05 55 45 73 33 – 📠 05 55 45 73 22  
 adly@unilim.fr

**Littoral Côte d’Opale** *Carole Rosier*  
 LMPA  
 Centre Universitaire de la Mi-voix  
 50 rue F. Buisson  
 BP 699  
 62228 Calais CEDEX.  
 ☎ 03 21 46 55 83  
 Carole.Rosier@lmpa.univ-littoral.fr

**Lyon** *Thierry Dumont*  
 Institut Camille Jordan,  
 Univ. Claude Bernard Lyon 1  
 43 b<sup>d</sup> du 11 novembre 1918  
 69622 Villeurbanne CEDEX  
 tdumont@math.univ-lyon1.fr

**Marne la Vallée** *Alain Prignet*  
 Univ. de Marne-la-Vallée, Cité Des-  
 cartes  
 5 b<sup>d</sup> Descartes  
 77454 Marne-la-Vallée CEDEX  
 ☎ 01 60 95 75 34 – 📠 01 60 95 75 45  
 alain.prignet@univ-mlv.fr

**Maroc** *Khalid Najib*  
 École Nationale de l’Industrie Minérale  
 B<sup>d</sup> Haj A. Cherkaoui, Agdal  
 BP 753, Rabat Agdal 01000  
 Rabat  
 Maroc  
 ☎ 00 212 37 77 13 60 – 📠 00 212 37 77 10 55  
 najib@enim.ac.ma

**Marseille** *Guillemette Chapuisat*  
 LATP  
 Université Paul Cézanne  
 Faculté des Sciences et Techniques de  
 St Jérôme, Case Cour A  
 avenue Escadrille Normandie-Niemen  
 13397 Marseille Cedex 20, France ☎ 04  
 91 28 88 40 – 📠 01 91 28 87 41  
 guillemette.chapuisat@univ-cezanne.fr

**Mauritanie** *Zeine Ould Mohamed*  
 Équipe de Recherche en Informatique  
 et Mathématiques Appliquées  
 Faculté des Sciences et Techniques  
 Univ. de Nouakchott  
 BP 5026  
 Nouakchott – Mauritanie  
 ☎ + 222 25 04 31 – 📠 + 222 25 39 97  
 zeine@univ-nkc.mr

**Metz** *Jean-Pierre Croisille*  
 Dépt de Mathématiques  
 Univ. de Metz  
 Ile du Saulcy  
 57405 Metz CEDEX 01  
 ☎ 03 87 31 54 11 – 📠 03 87 31 52 73  
 croisil@poncelet.univ-metz.fr

**Montpellier** *Matthieu Alfaro*  
 I3M  
 Dép. de Mathématiques,  
 Univ. Montpellier II, CC51  
 Pl. Eugène Bataillon  
 34095 Montpellier CEDEX 5  
 ☎ 04 67 14 42 04 – 📠 04 67 14 35 58  
 malfaro@math.univ-montp2.fr

**Nancy** *Takéo Takahashi*  
 Institut Élie Cartan  
 BP 239  
 54506 Vandoeuvre-lès-Nancy  
 ☎ 03 83 68 45 95 – 📠 03 83 68 45 61  
 takahash@iecn.u-nancy.fr

**Nantes** *Francoise Foucher*  
 École Centrale de Nantes  
 BP 92101  
 44321 Nantes CEDEX 3  
 ☎ 02 40 37 25 19  
 francoise.foucher@ec-nantes.fr

## Correspondants locaux

- Nice** *Claire Scheid*  
 Lab. Jean-Alexandre Dieudonné  
 Univ. de Nice  
 Parc Valrose  
 06108 Nice CEDEX 2  
 ☎ 04 92 07 64 95 – 📠 04 93 51 79 74  
 claire.scheid@unice.fr
- Orléans** *Cécile Louchet*  
 Dépt de Mathématiques  
 Univ. d'Orléans  
 BP 6759  
 45067 Orléans CEDEX 2  
 ☎ 02 38 49 27 57 – 📠 02 38 41 71 93  
 Cecile.Louchet@univ-orleans.fr
- Paris I** *Jean-Marc Bonnisseau*  
 UFR 27 – Math. et Informatique  
 Univ. de Paris I, CERMSEM  
 90 rue de Tolbiac  
 75634 Paris CEDEX 13  
 ☎ 01 40 77 19 40 – 📠 01 40 77 19 80  
 jean-marc.bonnisseau@univ-paris1.fr
- Paris V** *Ellen Saada*  
 Lab. de statistique médicale  
 Univ. Paris 5  
 45 rue des Saints Pères  
 75006 Paris  
 ☎ 01 42 86 21 14 – 📠 01 42 86 41 44  
 ellen.saada@mi.parisdescartes.fr
- Paris VI** *Nicolas Vauchelet*  
 Lab. Jacques-Louis Lions  
 Boîte courrier 187  
 Univ. Pierre et Marie Curie  
 4 place Jussieu  
 75252 Paris CEDEX 05  
 ☎ 01 44 27 37 72 – 📠 01 44 27 72 00  
 vauchelet@ann.jussieu.fr
- Paris VI** *Stéphane Menozzi*  
 Lab. Probabilités et Modèles Aléatoires  
 Univ. Pierre et Marie Curie  
 4 place Jussieu  
 75252 Paris CEDEX 05  
 ☎ 01 44 27 70 45 – 📠 01 44 27 72 23  
 menozzi@ccr.jussieu.fr
- Paris XI** *Benjamin Graille*  
 Mathématiques, Bât. 425  
 Univ. de Paris-Sud  
 91405 Orsay CEDEX  
 ☎ 01 69 15 60 32 – 📠 01 69 14 67 18  
 Benjamin.Graille@math.u-psud.fr
- Paris XII** *Yuxin Ge*  
 UFR de Sciences et Technologie  
 Univ. Paris 12 - Val de Marne  
 61 av. du Général de Gaulle  
 94010 Créteil CEDEX  
 ☎ 01 45 17 16 52  
 ge@univ-paris12.fr
- Paris IX** *Julien Salomon*  
 CEREMADE  
 Univ. Paris-Dauphine  
 Pl du M<sup>l</sup> de Lattre de Tassigny  
 75775 Paris CEDEX 16  
 ☎ 01 44 05 47 26 – 📠 01 44 05 45 99  
 salomon@ceremade.dauphine.fr
- Pau** *Brahim Amaziane*  
 Lab. de Math. Appliquées, IPRA,  
 Univ. de Pau  
 av. de l'Université  
 64000 Pau  
 ☎ 05 59 92 31 68/30 47 – 📠 05 59 92 32 00  
 brahim.amaziane@univ-pau.fr
- Perpignan** *Didier Aussel*  
 Dépt de Mathématiques  
 Univ. de Perpignan  
 52 avenue de Villeneuve  
 66860 Perpignan CEDEX  
 ☎ 04 68 66 21 48 – 📠 04 68 06 22 31  
 aussel@univ-perp.fr
- Poitiers** *Morgan Pierre*  
 LMA  
 Univ. de Poitiers  
 B<sup>d</sup> Marie et Pierre Curie  
 BP 30179  
 86962 Futuroscope Chasseneuil CEDEX  
 ☎ 05 49 49 68 85  
 Morgan.Pierre@math.univ-poitiers.fr
- Polytechnique** *Aline Lefebvre-Lepot*  
 CMAP, École Polytechnique  
 91128 Palaiseau  
 ☎ 01 69 33 45 61 – 📠 01 69 33 46 46  
 aline.lefebvre@polytechnique.edu
- Reims** *Stéphanie Salmon*  
 Lab. de Mathématiques  
 Univ. Reims  
 UFR Sciences Exactes et Naturelles  
 Moulin de la Housse – BP 1039  
 51687 Reims CEDEX 2  
 ☎ 03 26 91 85 89 – 📠 03 26 91 83 97  
 stephanie.salmon@univ-reims.fr

## Correspondants locaux

**Rennes** *Virginie Bonnaillie-Noël*  
IRMAR et ENS Cachan Bretagne  
Av. Robert Schumann  
35170 Bruz  
☎ 02 99 05 93 45 – 📠 02 99 05 93 28  
Virginie.Bonnaillie  
@Bretagne.ens-cachan.fr

**Rouen** *Jean-Baptiste Bardet*  
LMRS  
Univ. de Rouen  
av. de l'Université - BP 12  
76801 Saint-Étienne-du-Rouvray  
☎ 02 32 95 52 34 – 📠 02 32 95 52 86  
Jean-Baptiste.Bardet@univ-rouen.fr

**Rouen (INSA)** *Anastasia Zakharova*  
Lab. de Mathématiques de l'INSA  
INSA Rouen - Av. de l'Université  
BP 08  
76801 St Etienne du Rouvray CEDEX  
☎ 02 32 95 65 38 – 📠 02 32 95 99 03  
anastasia.zakharova@insa-rouen.fr

**Savoie** *Stéphane Gerbi*  
Lab. de Mathématiques  
Univ. de Savoie  
73376 Le Bourget du Lac CEDEX  
☎ 04 79 75 87 27 – 📠 04 79 75 81 42  
stephane.gerbi@univ-savoie.fr

**Strasbourg** *Michel Mehrenberger*  
IRMA  
Univ. de Strasbourg  
7 rue René Descartes  
67084 Strasbourg CEDEX  
☎ 03 68 85 02 05  
mehrenbe@math.unistra.fr

**Toulouse** *Violaine Roussier-Michon*  
INSA, Département GMM  
135 av. de Rangueil  
31077 Toulouse CEDEX 4  
☎ 05 61 55 93 29  
roussier@insa-toulouse.fr

**Tours** *Christine Georgelin*  
Lab. Math. et Physique Théorique  
Fac. Sciences et Technique de Tours  
7 parc Grandmont  
37200 Tours  
☎ 02 47 36 72 61 – 📠 02 47 36 70 68  
georgelin@univ-tours.fr

**Tunisie** *Fahmi Ben Hassen*  
ENIT-LAMSIN  
BP 37  
1002 Tunis Belvédère  
Tunisie  
☎ +216 71 874 700 (poste 556) – 📠 +216 71  
871 022  
fahmi.benhassen@enit.rnu.tn

**Valenciennes** *Juliette Venel*  
LAMAV  
Univ. de Valenciennes  
Le Mont Houy – ISTV2  
59313 Valenciennes CEDEX 9  
☎ 03 27 51 19 23 – 📠 03 27 51 19 00  
juliette.venel@univ-valenciennes.fr

## Appel à projets pour écoles de recherche CIMPA en 2015

### Appel à projets pour écoles de recherche CIMPA en 2015



#### Centre International de Mathématiques Pures et Appliquées

Le Centre International de Mathématiques Pures et Appliquées CIMPA a pour objectif de promouvoir la coopération internationale au profit des pays en développement, dans le domaine de l'enseignement supérieur et la recherche en mathématiques et leurs interactions, ainsi que dans les disciplines connexes. Notre action se concentre aux endroits où les mathématiques émergent et se développent, et où un projet de recherche est envisageable.

Le CIMPA est un centre de l'UNESCO basé à Nice, financé par la France, la Suisse, la Norvège et l'Espagne, comptant avec le soutien de l'Université Nice Sophia-Antipolis.

Nous organisons des écoles de recherche d'environ deux semaines dans les pays en voie de développement. Le but de ces écoles est de contribuer à la formation par la recherche de la nouvelle génération de mathématiciennes et de mathématiciens.

Le Conseil scientifique et le Conseil d'orientation et de pilotage du CIMPA analysent les projets et sélectionnent les meilleurs et les mieux adaptés. Les écoles de recherche sont organisées localement avec l'aide du CIMPA. La contribution financière du CIMPA est proposée essentiellement aux jeunes des pays voisins, pour qu'ils puissent assister à l'école de recherche. Le CIMPA peut aider à obtenir des fonds provenant d'autres sources. La lecture de feuille de route disponible sur le site du CIMPA est indispensable. Vous pouvez aussi écrire au CIMPA pour plus de renseignements.

L'appel à projets d'écoles de recherche **commence le 1er Mars 2013**.

La date limite pour déposer un pré-projet (non obligatoire) est le **15 Juin 2013**. Le **projet complet devra être déposé impérativement avant le 1er Octobre 2013**.

Le formulaire se trouve sur le site du CIMPA

(<http://www.cimpa-icpam.org/spip.php?article151>,

vous pouvez aussi écrire à [cima@unice.fr](mailto:cima@unice.fr)

<http://www.cimpa-icpam.org>

Les projets reliés aux applications des mathématiques sont spécialement bienvenus.

