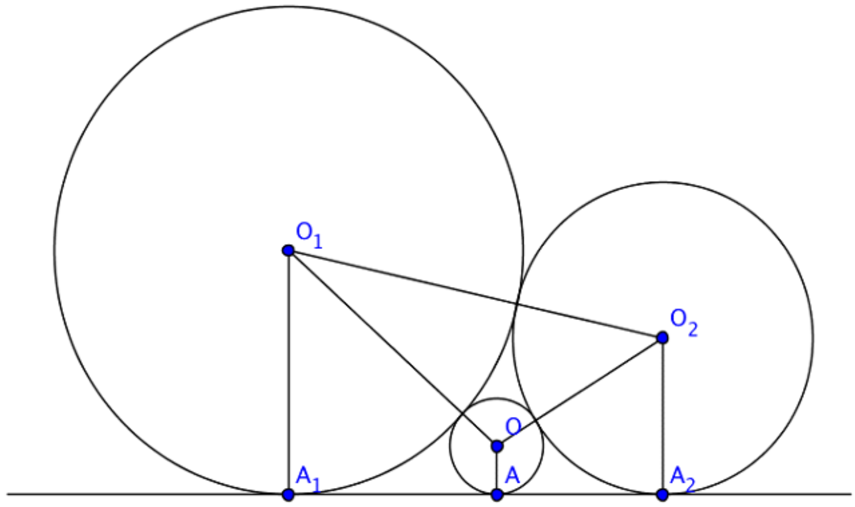
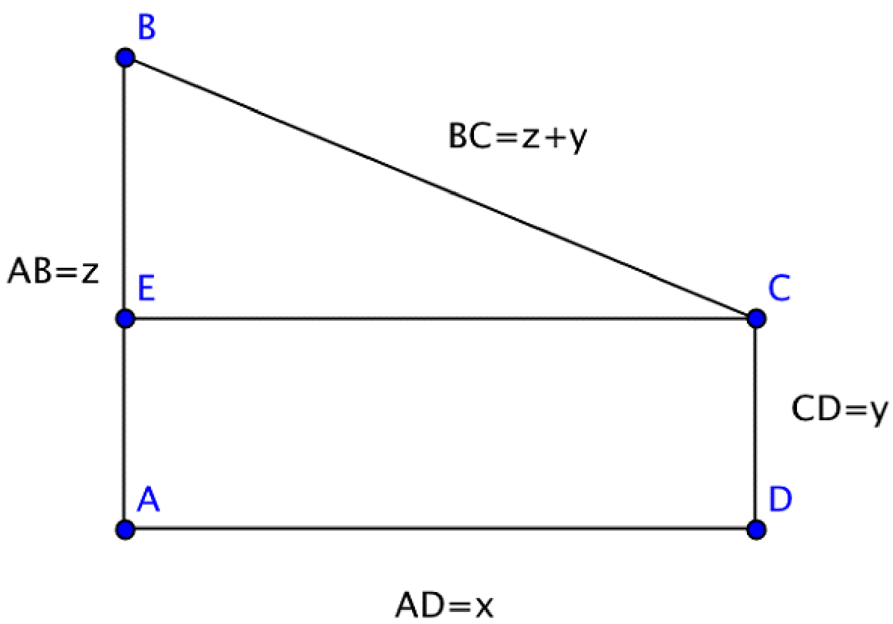
Réponse à l'énigme du vigneron proposée dans la lettre n°3

(Retrouvez l'énoncé ici)



Remarquons tout d'abord que : $O_1O = R_1 + R$, $OO_2 = R_2 + R$ et $O_1O_2 = R_1 + R_2$.
Les trois quadrilatères O_1OAA_1, OO_2A_2A et $O_1O_2A_1A_2$ sont de la forme suivante :



Le théorème de pythagore appliqué au triangle EBC rectangle en E nous donne la relation suivante :

$$(z-y)^2 + x^2 = (z+y)^2$$

d'où l'expression de x en fonction de y et z :

$$x^2 = 4yz$$

soit :

$$x = \sqrt{4yz} = 2\sqrt{yz}.$$

En appliquant ce résultat aux trois quadrilatères O_1OAA_1, OO_2A_2A et $O_1O_2A_1A_2$, nous obtenons alors :

$$A_1A = 2\sqrt{RR_1} \quad AA_2 = 2\sqrt{RR_2} \text{ et } A_1A_2 = 2\sqrt{R_1R_2}.$$

Ainsi l'égalité $A_1A + AA_2 = A_1A_2$ s'écrit alors en fonction de R_1, R_2 et R:

$$2\sqrt{RR_1} + 2\sqrt{RR_2} = 2\sqrt{R_1R_2}.$$

Soit,

$$\sqrt{R}\sqrt{R_1} + \sqrt{R}\sqrt{R_2} = \sqrt{R_1}\sqrt{R_2}$$

en factorisant par le terme $\sqrt{R}$, nous obtenons :

$$\sqrt{R}(\sqrt{R_1} + \sqrt{R_2}) = \sqrt{R_1}\sqrt{R_2}.$$

Soit,

$$\sqrt{R} = \frac{\sqrt{R_1}\sqrt{R_2}}{\sqrt{R_1} + \sqrt{R_2}}.$$

Aplication aux données du texte : $R_1 = 16cm$ et $R_2 = 25cm$.

$$\sqrt{R} = \frac{5 \times 4}{4+5} = \frac{20}{9}$$

Soit

$$R \text{ environ } 5 \text{ cm.}$$