[Démonstration]

Quand la magie se sert des maths...

Dévoilons maintenant les secrets de ce tour de magie grâce aux mathématiques. Soient X et Y les nombres choisis par votre ami. Ils figurent donc respectivement sur les lignes 1 et 2. Le nombre inscrit sur la ligne n°3 étant la somme des deux précédents, il s'agit de $X + Y$. De même, on trouve l'expression du nombre figurant à la ligne n°4 : $(X + Y) + Y = X + 2Y$. On complète en suivant le même procédé l'ensemble des 10 lignes ce qui donne :

1) X
2) Y
3) $X + Y$
4) $X + 2Y$
5) $2X + 3Y$
6) $3X + 5Y$
7) $5X + 8Y$
8) $8X + 13Y$
9) $13X + 21Y$
10) $21X + 34Y$.

On peut ensuite calculer la somme des 10 lignes : $55X + 88Y$. On voit alors que

$$55X + 88Y = 11 \times 5X + 11 \times 8Y = 11(5X + 8Y) ,$$

ce qui assure que la somme des 10 lignes est bien le produit du nombre inscrit sur la ligne n°7 $(5X + 8Y)$ par 11, quelles que soient les valeurs prises par X et Y .

Afin de prouver la deuxième propriété sur laquelle repose le tour de magie, démontrons dans un premier temps le fait suivant :
Si A, B, C et D sont quatre réels positifs tels que C, $D > 0$ et $A/C \leq B/D$, alors

$$A/C \leq (A + B)/(C + D) \leq B/D . \tag{1}$$

Montrons tout d'abord que $A/C \leq (A + B)/(C + D)$. Ce résultat provient de la décomposition suivante :

$$\begin{aligned}(A + B)/(C + D) &= (A/C)C/(C + D) + B/(C + D)\\ &= (A/C)(1 - D/(C + D)) + B/(C + D)\\ &= A/C + (BC - AD)/(C(C + D)) .\end{aligned}$$

Il suffit ensuite de remarquer que le terme $(BC - AD)/(C(C + D))$ est positif puisque A,B,C et D sont positifs et que $A/C \leq B/D \Rightarrow BC - AD \geq 0$. L'inégalité $(A + B)/(C + D) \leq B/D$ se montre de manière très similaire en inversant les rôles de A (respectivement de C) et de B (respectivement de D).

La propriété (1) que nous venons de démontrer permet de montrer que le quotient de la ligne n°10 par la ligne n°9 peut être encadré de la manière suivante :

$$1,615385 \approx 21/13 \leq (21X + 34Y)/(13X + 21Y) \leq 34/21 \approx 1,619048 .$$

Et voilà donc d'où provient la deuxième propriété que nous avons utilisée.

Il est même possible d'aller un peu plus loin grâce aux mathématiques. Supposons que l'on continue à remplir notre feuille jusqu'à obtenir n lignes. On peut alors montrer que, lorsque n devient grand, le quotient de la ligne n par la ligne n-1 se rapproche, quelles que soient les valeurs de X et de Y, du nombre d'or : $(1+\sqrt{5})/2 \approx 1,618034$. Ce nombre est ainsi appelé en raison du grand nombre de problèmes mathématiques dans lesquels il intervient (il est notamment une des racines du polynôme $x2-x-1$) ainsi que des nombreux autres domaines dans lequel on le retrouve : architecture, biologie, ... (vous trouverez plus de détails sur internet à cette adresse).

Vous connaissez maintenant les secrets de ce tour de magie. À vous de jouer et d'épater vos amis en utilisant des astuces mathématiques!