

Phénomènes d'homogénéisation dans certains modèles de population

Amandine Véber

Journée Jacques Neveu - 31/08/2010

Plan de l'exposé

- 1 Mouvements browniens branchants en milieu aléatoire
- 2 Processus Lambda-Fleming-Viot spatial

1. Mouvements browniens branchants en milieu aléatoire *(en collab. avec J.-F. Le Gall)*

Obstacles aléatoires

On note \mathcal{K}_1 l'ensemble des compacts de \mathbb{R}^d inclus dans $\bar{B}(0, 1)$, muni de la distance de Hausdorff. Soit Θ une mesure finie sur \mathcal{K}_1 et soit

$$\mathcal{N} := \sum_{i \in I} \delta_{(x_i, K_i)}$$

une mesure ponctuelle de Poisson sur $\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}_1$ d'intensité $\lambda_d \otimes \Theta$ ($\lambda_d =$ mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d). \mathcal{N} est définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Obstacles : Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose

$$\Gamma_\omega := \bigcup_{i \in I} (x_i + K_i)$$

A noter : Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\mathbf{P}(x \in \Gamma_\omega) = \mathbf{P}(0 \in \Gamma_\omega) = 1 - e^{-\int_{\mathcal{K}_1} \lambda_d(K) \Theta(dK)} =: \kappa.$$

Obstacles aléatoires

On note \mathcal{K}_1 l'ensemble des compacts de \mathbb{R}^d inclus dans $\bar{B}(0, 1)$, muni de la distance de Hausdorff. Soit Θ une mesure finie sur \mathcal{K}_1 et soit

$$\mathcal{N} := \sum_{i \in I} \delta_{(x_i, K_i)}$$

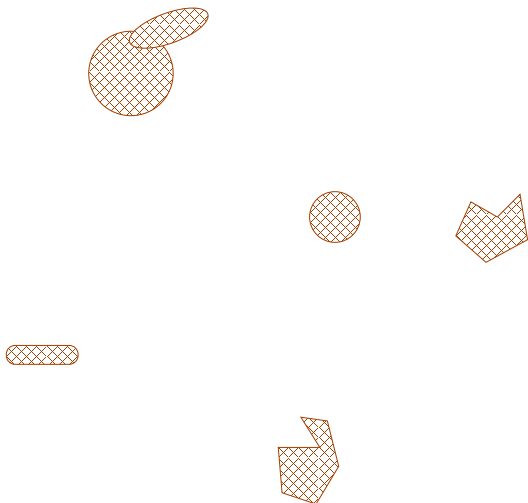
une mesure ponctuelle de Poisson sur $\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}_1$ d'intensité $\lambda_d \otimes \Theta$ ($\lambda_d =$ mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d). \mathcal{N} est définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Obstacles : Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose

$$\Gamma_\omega := \bigcup_{i \in I} (x_i + K_i)$$

A noter : Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\mathbf{P}(x \in \Gamma_\omega) = \mathbf{P}(0 \in \Gamma_\omega) = 1 - e^{-\int_{\mathcal{K}_1} \lambda_d(K) \Theta(dK)} =: \kappa.$$



MBB parmi des obstacles mous

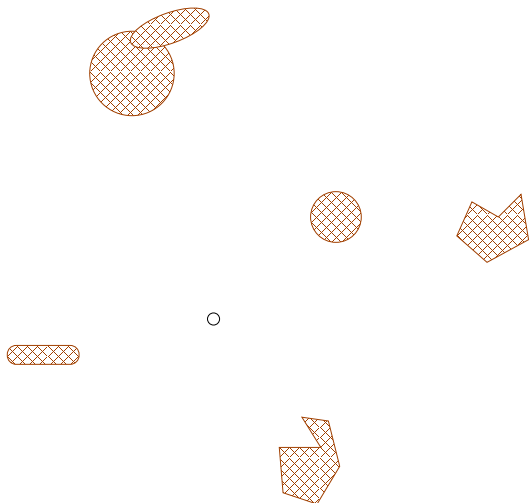
On fixe une réalisation Γ_ω des obstacles et $\varepsilon \geq 0$. Le mouvement brownien branchant $Z^{\omega, \varepsilon}$ sur \mathbb{R}^d ($d \geq 1$) est défini de la manière suivante.

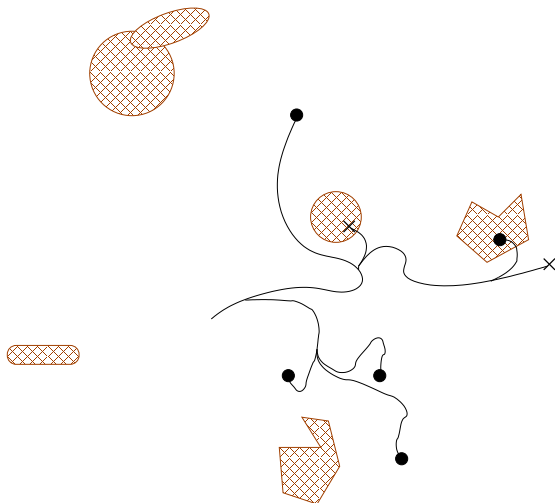
On part d'un nombre fini de particules, toutes en 0. Chacune, indépendamment des autres,

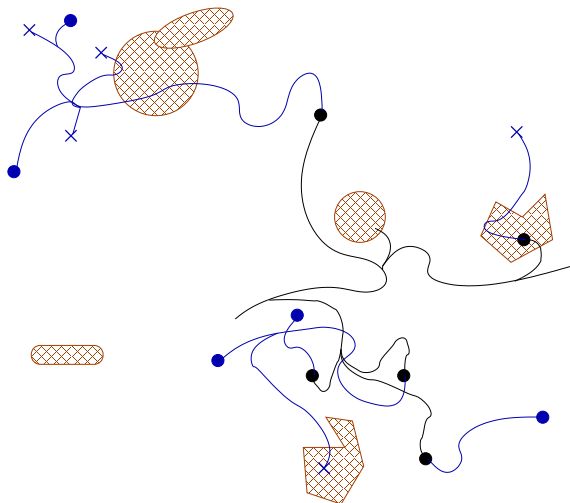
- se déplace dans \mathbb{R}^d selon la loi d'un mouvement brownien $\xi^{\omega, \varepsilon}$ tué à taux ε dans Γ_ω ;
- branche à taux 1 et donne naissance à un nombre aléatoire K de particules. On suppose $\mathbb{E}[K] = 1$ et $\sigma^2 := \text{Var}(K) < \infty$.

A chaque temps $t \geq 0$, on représente cette collection de particules par sa mesure empirique $Z_t^{\omega, \varepsilon}$:

$$Z_t^{\omega, \varepsilon} = \sum_{i \sim t} \delta_{\xi_i^{\omega, \varepsilon}(t)}.$$







Notations

On notera

- \mathbb{P}_x la mesure de probabilité sous laquelle un mouvement brownien part de $x \in \mathbb{R}^d$ p.s. ;
- \mathbb{P}_μ la mesure de probabilité sous laquelle un mouvement brownien branchant ou un supermouvement brownien part de $\mu \in \mathcal{M}_f(\mathbb{R}^d)$ p.s. ;
- \mathbf{P} la mesure de probabilité sur l'espace de définition des obstacles.

Question

On veut comprendre l'influence des obstacles sur l'évolution du MBB lorsque ε est petit. Plus précisément :

- Combien de particules faut-il placer initialement en 0 pour qu'avec probabilité au moins $1/2$, l'une d'entre elle atteigne une distance $R \gg 1$ de l'origine ?
- Autrement dit, quelle est la probabilité que $Z^{\omega, \varepsilon}$ partant de δ_0 touche $B(0, R)^c$?

Sans obstacle :

Théorème (Sawyer & Fleischman 1979)

On suppose $d = 1$. Il existe $C > 0$ telle que, lorsque $R \rightarrow \infty$,

$$\mathbb{P}_{\delta_0} [Z \text{ touche } B(0, R)^c] \sim \frac{C}{R^2}.$$

Question

On veut comprendre l'influence des obstacles sur l'évolution du MBB lorsque ε est petit. Plus précisément :

- Combien de particules faut-il placer initialement en 0 pour qu'avec probabilité au moins $1/2$, l'une d'entre elle atteigne une distance $R \gg 1$ de l'origine ?
- Autrement dit, quelle est la probabilité que $Z^{\omega, \varepsilon}$ partant de δ_0 touche $B(0, R)^c$?

Sans obstacle :

Théorème (Sawyer & Fleischman 1979)

On suppose $d = 1$. Il existe $C > 0$ telle que, lorsque $R \rightarrow \infty$,

$$\mathbb{P}_{\delta_0} [Z \text{ touche } B(0, R)^c] \sim \frac{C}{R^2}.$$

Probabilités d'atteinte *quenched*

Soit A un domaine de \mathbb{R}^d , de classe C^2 et contenant 0. Si $a \geq 0$, on note $u_{(a)} = (u_{(a)}(x), x \in A)$ l'unique solution positive du problème

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \Delta u = \frac{\sigma^2}{2} u^2 + au & \text{dans } A, \\ u|_{\partial A} = +\infty \end{cases}$$

Rappels :

- $\kappa = \mathbf{P}[0 \in \Gamma_\omega]$,
- Les particules de $Z^{\omega, \varepsilon}$ sont tuées à taux ε dans Γ_ω .

Théorème (Le Gall & V. 2010)

P-p.s., on a

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{\varepsilon \geq 0} |R^2 \mathbb{P}_{\delta_0} [Z^{\omega, \varepsilon} \text{ touche } (RA)^c] - u_{(\kappa \varepsilon R^2)}(0)| = 0.$$

Probabilités d'atteinte *quenched*

Soit A un domaine de \mathbb{R}^d , de classe C^2 et contenant 0. Si $a \geq 0$, on note $u_{(a)} = (u_{(a)}(x), x \in A)$ l'unique solution positive du problème

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \Delta u = \frac{\sigma^2}{2} u^2 + au & \text{dans } A, \\ u|_{\partial A} = +\infty \end{cases}$$

Rappels :

- $\kappa = \mathbf{P}[0 \in \Gamma_\omega]$,
- Les particules de $Z^{\omega, \varepsilon}$ sont tuées à taux ε dans Γ_ω .

Théorème (Le Gall & V. 2010)

P-p.s., on a

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{\varepsilon \geq 0} |R^2 \mathbb{P}_{\delta_0} [Z^{\omega, \varepsilon} \text{ touche } (RA)^c] - u_{(\kappa \varepsilon R^2)}(0)| = 0.$$

Remarques

- 1 Si $R^2\varepsilon \rightarrow a > 0$, alors $\mathbb{P}_{\delta_0}[Z^{\omega,\varepsilon} \text{ touche } (RA)^c] \sim u_{(\kappa a)}(0)/R^2$.
Même décroissance que dans le cas sans obstacle, mais la constante change.
- 2 Si $R^2\varepsilon \rightarrow 0$, le meurtre dans les obstacles ne se fait plus sentir et on retrouve le résultat sans obstacle (i.e., $u_{(0)}(0)/R^2$).
- 3 Si $R^2\varepsilon \rightarrow +\infty$, le taux de meurtre « effectif » devient infini. On peut montrer qu'il existe des constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que pour tout $R \geq 1$ et $\varepsilon \in [1/R^2, 1]$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\delta_0}[Z^{\omega,\varepsilon} \text{ touche } (RA)^c] &\geq C_1 \varepsilon e^{-R\sqrt{2\varepsilon}} \quad \forall \omega \in \Omega, \\ \mathbf{P} \otimes \mathbb{P}_{\delta_0}[Z^{\omega,\varepsilon} \text{ touche } (RA)^c] &\leq e^{-C_2 R\sqrt{\varepsilon}}. \end{aligned}$$

Remarques

- 1 Si $R^2\varepsilon \rightarrow a > 0$, alors $\mathbb{P}_{\delta_0}[Z^{\omega,\varepsilon} \text{ touche } (RA)^c] \sim u_{(\kappa a)}(0)/R^2$.
Même décroissance que dans le cas sans obstacle, mais la constante change.
- 2 Si $R^2\varepsilon \rightarrow 0$, le meurtre dans les obstacles ne se fait plus sentir et on retrouve le résultat sans obstacle (i.e., $u_{(0)}(0)/R^2$).
- 3 Si $R^2\varepsilon \rightarrow +\infty$, le taux de meurtre « effectif » devient infini. On peut montrer qu'il existe des constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que pour tout $R \geq 1$ et $\varepsilon \in [1/R^2, 1]$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\delta_0}[Z^{\omega,\varepsilon} \text{ touche } (RA)^c] &\geq C_1 \varepsilon e^{-R\sqrt{2\varepsilon}} \quad \forall \omega \in \Omega, \\ \mathbf{P} \otimes \mathbb{P}_{\delta_0}[Z^{\omega,\varepsilon} \text{ touche } (RA)^c] &\leq e^{-C_2 R\sqrt{\varepsilon}}. \end{aligned}$$

Remarques

- 1 Si $R^2\varepsilon \rightarrow a > 0$, alors $\mathbb{P}_{\delta_0}[Z^{\omega,\varepsilon} \text{ touche } (RA)^c] \sim u_{(\kappa a)}(0)/R^2$.
Même décroissance que dans le cas sans obstacle, mais la constante change.
- 2 Si $R^2\varepsilon \rightarrow 0$, le meurtre dans les obstacles ne se fait plus sentir et on retrouve le résultat sans obstacle (i.e., $u_{(0)}(0)/R^2$).
- 3 Si $R^2\varepsilon \rightarrow +\infty$, le taux de meurtre « effectif » devient infini. On peut montrer qu'il existe des constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que pour tout $R \geq 1$ et $\varepsilon \in [1/R^2, 1]$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\delta_0}[Z^{\omega,\varepsilon} \text{ touche } (RA)^c] &\geq C_1 \varepsilon e^{-R\sqrt{2\varepsilon}} \quad \forall \omega \in \Omega, \\ \mathbf{P} \otimes \mathbb{P}_{\delta_0}[Z^{\omega,\varepsilon} \text{ touche } (RA)^c] &\leq e^{-C_2 R\sqrt{\varepsilon}}. \end{aligned}$$

Ingrédient de la preuve

On définit $X^{\omega, \varepsilon}$ par : pour toute $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ et tout $t \geq 0$,

$$\langle X_t^{\omega, \varepsilon}, f \rangle = \varepsilon \langle Z_{\varepsilon^{-1}t}^{\omega, \varepsilon}, f(\cdot \sqrt{\varepsilon}) \rangle.$$

$\Rightarrow \varepsilon^{-1} X^{\omega, \varepsilon}$ MBB dont les particules branchent à taux ε^{-1} et sont tuées à taux 1 dans $\sqrt{\varepsilon} \Gamma_\omega$.

Condition initiale : il faut de l'ordre de ε^{-1} particules au départ pour que $X^{\omega, \varepsilon}$ survive pendant un temps d'ordre 1.

Théorème d'homogénéisation (Le Gall & V. 2010)

P-p.s., lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ la loi de $X^{\omega, \varepsilon}$ sous $\mathbb{P}_{\lfloor \varepsilon^{-1} \rfloor \delta_0}$ converge vers celle du supermouvement brownien X^∞ , de mécanisme de branchement $\psi(u) = \frac{\sigma^2}{2} u^2 + \kappa u$ et de valeur initiale δ_0 .

Dernière étape : la constante $u_{(\kappa)}(0)$ est liée à la probabilité de sortie de A par des « particules » de X^∞ .

Ingrédient de la preuve

On définit $X^{\omega, \varepsilon}$ par : pour toute $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ et tout $t \geq 0$,

$$\langle X_t^{\omega, \varepsilon}, f \rangle = \varepsilon \langle Z_{\varepsilon^{-1}t}^{\omega, \varepsilon}, f(\cdot \sqrt{\varepsilon}) \rangle.$$

$\Rightarrow \varepsilon^{-1} X^{\omega, \varepsilon}$ MBB dont les particules branchent à taux ε^{-1} et sont tuées à taux 1 dans $\sqrt{\varepsilon} \Gamma_\omega$.

Condition initiale : il faut de l'ordre de ε^{-1} particules au départ pour que $X^{\omega, \varepsilon}$ survive pendant un temps d'ordre 1.

Théorème d'homogénéisation (Le Gall & V. 2010)

P-p.s., lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ la loi de $X^{\omega, \varepsilon}$ sous $\mathbb{P}_{\lfloor \varepsilon^{-1} \rfloor \delta_0}$ converge vers celle du supermouvement brownien X^∞ , de mécanisme de branchement $\psi(u) = \frac{\sigma^2}{2} u^2 + \kappa u$ et de valeur initiale δ_0 .

Dernière étape : la constante $u_{(\kappa)}(0)$ est liée à la probabilité de sortie de A par des « particules » de X^∞ .

2. Processus Λ -Fleming-Viot spatial et généalogies associées

(en collab. avec N. Barton et A. Etheridge)

Motivations

On veut décrire une population d'individus répartis dans un espace continu, dont chacun possède un type, une caractéristique. Les individus se reproduisent et transmettent leur type à leur descendants.

Reproduction locale : Les descendants naissent dans un voisinage de leur parent.

Extinctions locales : Les individus d'une zone plus ou moins étendue sont affectés et potentiellement tués par des événements touchant seulement cette zone.

Modèle

Soit K l'espace des types, supposé compact. On note Ξ l'ensemble des fonctions mesurables $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{M}_1(K)$.

Interprétation : $\Phi(x)$ est la distribution du type d'un individu échantillonné au site x .

On fixe

- une mesure σ -finie μ sur \mathbb{R}_+ ,
- une collection $\{\nu_r, r > 0\}$ de mesures de probabilité sur $[0, 1]$.

Soit Π un processus ponctuel de Poisson (PPP) sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$ d'intensité $dt \otimes dz \otimes \mu(dr)$.

Modèle

Soit K l'espace des types, supposé compact. On note Ξ l'ensemble des fonctions mesurables $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{M}_1(K)$.

Interprétation : $\Phi(x)$ est la distribution du type d'un individu échantillonné au site x .

On fixe

- une mesure σ -finie μ sur \mathbb{R}_+ ,
- une collection $\{\nu_r, r > 0\}$ de mesures de probabilité sur $[0, 1]$.

Soit Π un processus ponctuel de Poisson (PPP) sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$ d'intensité $dt \otimes dz \otimes \mu(dr)$.

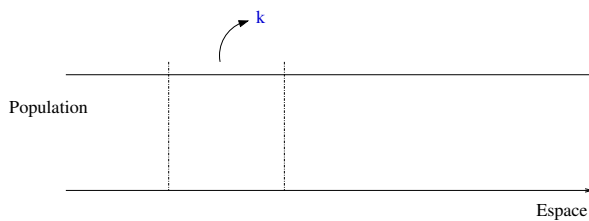
Définition

Le processus Λ -Fleming-Viot spatial $\{\Phi_t, t \geq 0\}$ est le processus (markovien) à valeurs dans Ξ qui évolue de la manière suivante. Si $(t, x, r) \in \Pi$, alors un paramètre u est choisi selon ν_r , un point z est tiré uniformément dans $B(x, r)$ et un type k est choisi selon $\Phi_{t-}(z)$. Pour tout $y \in B(x, r)$,

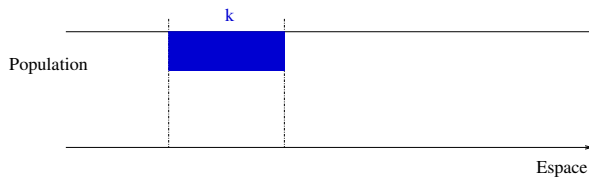
$$\Phi_t(y) = (1 - u)\Phi_{t-}(y) + u\delta_k,$$

et $\Phi_t(y') = \Phi_{t-}(y')$ si $y' \notin B(x, r)$.

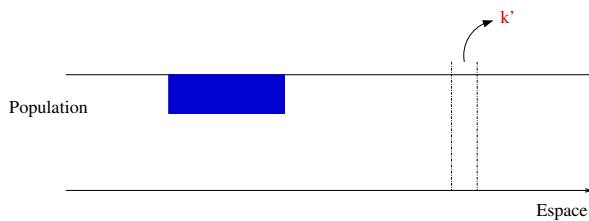
En dimension 1



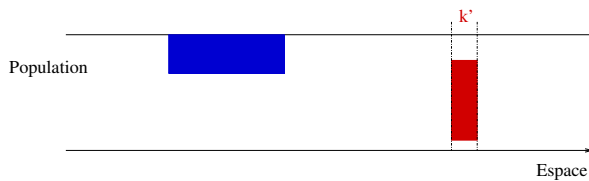
En dimension 1



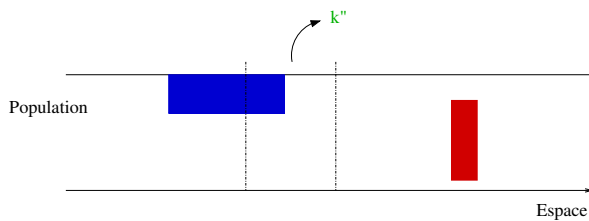
En dimension 1



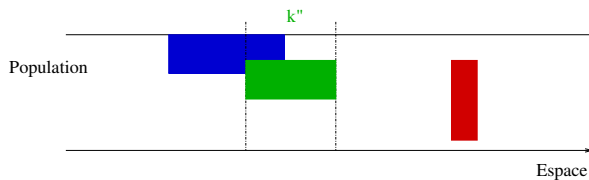
En dimension 1



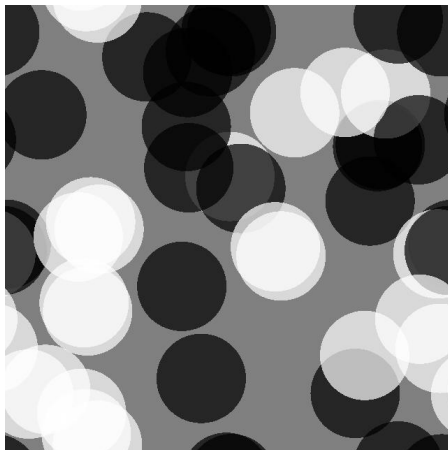
En dimension 1



En dimension 1



Sur un tore, en dimension 2



Condition initiale : moitié blanc et moitié noir à chaque site. 40 itérations.

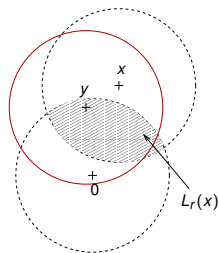
Généalogies

Sous l'hypothèse

$$\int_0^\infty \int_0^1 ur^d \nu_r(du) \mu(dr) < \infty,$$

un lignage ancestral se déplace dans \mathbb{R}^d suivant un processus de sauts à taux fini.

Si maintenant on échantillonne n individus dans la population au temps présent et que l'on retrace leur histoire, on obtient un système de n processus de sauts corrélés qui fusionnent dès lors qu'ils proviennent du même parent.



Généalogies sur un grand tore

Pour chaque $L \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{T}(L) \subset \mathbb{R}^2$ le tore de côté L . On fixe

- $\alpha \in (0, 1]$.
- Une suite croissante $(\rho_L)_{L \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $(0, \infty]$ et telle que $\rho_L \rightarrow \infty$.
- Deux mesures σ -finies μ^S et μ^B sur $[0, \infty)$, telles qu'il existe $R^S, R^B < \infty$ bornant leur support.
- Deux collections $\{\nu_r^S, r > 0\}$ et $\{\nu_r^B, r > 0\}$ de probabilités sur $[0, 1]$.

Généalogies sur un grand tore

Pour chaque $L \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{T}(L) \subset \mathbb{R}^2$ le tore de côté L . On fixe

- $\alpha \in (0, 1]$.
- Une suite croissante $(\rho_L)_{L \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $(0, \infty]$ et telle que $\rho_L \rightarrow \infty$.
- Deux mesures σ -finies μ^S et μ^B sur $[0, \infty)$, telles qu'il existe $R^S, R^B < \infty$ bornant leur support.
- Deux collections $\{\nu_r^S, r > 0\}$ et $\{\nu_r^B, r > 0\}$ de probabilités sur $[0, 1]$.

Généalogies sur un grand tore

Pour chaque $L \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{T}(L) \subset \mathbb{R}^2$ le tore de côté L . On fixe

- $\alpha \in (0, 1]$.
- Une suite croissante $(\rho_L)_{L \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $(0, \infty]$ et telle que $\rho_L \rightarrow \infty$.
- Deux mesures σ -finies μ^S et μ^B sur $[0, \infty)$, telles qu'il existe $R^S, R^B < \infty$ bornant leur support.
- Deux collections $\{\nu_r^S, r > 0\}$ et $\{\nu_r^B, r > 0\}$ de probabilités sur $[0, 1]$.

Généalogies sur un grand tore

Pour chaque $L \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{T}(L) \subset \mathbb{R}^2$ le tore de côté L . On fixe

- $\alpha \in (0, 1]$.
- Une suite croissante $(\rho_L)_{L \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $(0, \infty]$ et telle que $\rho_L \rightarrow \infty$.
- Deux mesures σ -finies μ^s et μ^B sur $[0, \infty)$, telles qu'il existe $R^s, R^B < \infty$ bornant leur support.
- Deux collections $\{\nu_r^s, r > 0\}$ et $\{\nu_r^B, r > 0\}$ de probabilités sur $[0, 1]$.

Généalogies sur un grand tore

Pour chaque $L \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{T}(L) \subset \mathbb{R}^2$ le tore de côté L . On fixe

- $\alpha \in (0, 1]$.
- Une suite croissante $(\rho_L)_{L \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $(0, \infty]$ et telle que $\rho_L \rightarrow \infty$.
- Deux mesures σ -finies μ^S et μ^B sur $[0, \infty)$, telles qu'il existe $R^S, R^B < \infty$ bornant leur support.
- Deux collections $\{\nu_r^S, r > 0\}$ et $\{\nu_r^B, r > 0\}$ de probabilités sur $[0, 1]$.

Evolution à L fixé

Deux types d'événements :

Petits év. , donnés par un PPP Π_L^s sur $\mathbb{R} \times \mathbb{T}(L) \times \mathbb{R}_+$ d'intensité $dt \otimes dx \otimes \mu^s$. Si $(t, x, r) \in \Pi_L^s$, le centre de l'év. est x , son rayon r et la fraction d'individus remplacés est choisie selon ν_r^s .

Grands év. , donnés par un PPP Π_L^B sur $\mathbb{R} \times L^{-\alpha}\mathbb{T}(L) \times \mathbb{R}_+$ d'intensité $\rho_L^{-1} dt \otimes dx \otimes \mu^B$, indép. de Π_L^s . Si $(t, x, r) \in \Pi_L^B$, le centre de l'év. est $L^\alpha x$, son rayon $L^\alpha r$ et la fraction d'individus remplacés est choisie selon ν_r^B .

On note \mathcal{A}^L le système de processus de sauts coalescents décrivant la généalogie de n individus.

Evolution à L fixé

Deux types d'événements :

Petits év. , donnés par un PPP Π_L^S sur $\mathbb{R} \times \mathbb{T}(L) \times \mathbb{R}_+$ d'intensité $dt \otimes dx \otimes \mu^S$. Si $(t, x, r) \in \Pi_L^S$, le centre de l'év. est x , son rayon r et la fraction d'individus remplacés est choisie selon ν_r^S .

Grands év. , donnés par un PPP Π_L^B sur $\mathbb{R} \times L^{-\alpha}\mathbb{T}(L) \times \mathbb{R}_+$ d'intensité $\rho_L^{-1} dt \otimes dx \otimes \mu^B$, indép. de Π_L^S . Si $(t, x, r) \in \Pi_L^B$, le centre de l'év. est $L^\alpha x$, son rayon $L^\alpha r$ et la fraction d'individus remplacés est choisie selon ν_r^B .

On note \mathcal{A}^L le système de processus de sauts coalescents décrivant la généalogie de n individus.

Evolution à L fixé

Deux types d'événements :

Petits év. , donnés par un PPP Π_L^S sur $\mathbb{R} \times \mathbb{T}(L) \times \mathbb{R}_+$ d'intensité $dt \otimes dx \otimes \mu^S$. Si $(t, x, r) \in \Pi_L^S$, le centre de l'év. est x , son rayon r et la fraction d'individus remplacés est choisie selon ν_r^S .

Grands év. , donnés par un PPP Π_L^B sur $\mathbb{R} \times L^{-\alpha}\mathbb{T}(L) \times \mathbb{R}_+$ d'intensité $\rho_L^{-1} dt \otimes dx \otimes \mu^B$, indép. de Π_L^S . Si $(t, x, r) \in \Pi_L^B$, le centre de l'év. est $L^\alpha x$, son rayon $L^\alpha r$ et la fraction d'individus remplacés est choisie selon ν_r^B .

On note \mathcal{A}^L le système de processus de sauts coalescents décrivant la généalogie de n individus.

Question

On pose pour $n \geq 2$

$$\Gamma(L, n) \equiv \left\{ \{x_1, \dots, x_n\} \in \mathbb{T}(L)^n : |x_i - x_j| \geq \frac{L}{\log L}, \forall i \neq j \right\},$$

$$\Gamma_{\mathcal{A}}(L, n) \equiv \left\{ \{(\mathbf{a}_1, x_{\mathbf{a}_1}), \dots, (\mathbf{a}_k, x_{\mathbf{a}_k})\} \text{ part. marq. de } \{1, \dots, n\} \right. \\ \left. \text{t.q. } \{x_{\mathbf{a}_1}, \dots, x_{\mathbf{a}_k}\} \in \Gamma(L, k) \right\}.$$

A quoi ressemble la généalogie de n individus échantillonnés au temps $t = 0$ aux sites $\{x_1, \dots, x_n\} \in \Gamma(L, n)$, lorsque $L \rightarrow \infty$?

Convergence de $\mathcal{A}^L : \alpha < 1$

Théorème (BEV 2010)

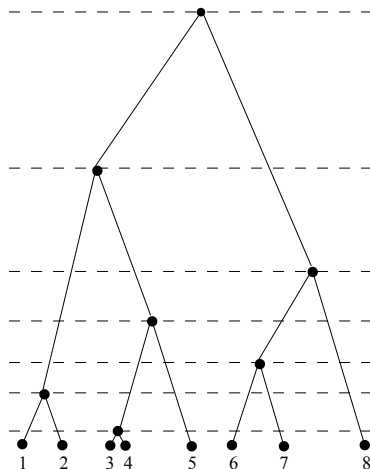
On suppose $\alpha < 1$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $A_L \in \Gamma_{\mathcal{A}}(L, n)$ ayant exactement n blocs pour tout L . Alors,

$$\mathcal{L}_{\mathbb{P}_{A_L}}(\{\text{bl}(\mathcal{A}^L(\omega_L t)), t \geq 0\}) \Rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{P}_{\varphi_n}}(\mathcal{K}), \quad L \rightarrow \infty,$$

où $\text{bl}(A)$ est la partition induite par la partition marquée A , \mathcal{K} est le *coalescent de Kingman* et

$$\omega_L \equiv \begin{cases} \frac{(1-\alpha)\rho_L L^2 \log L}{2\pi\sigma_B^2 L^{2\alpha}} & \text{si } \frac{L^{2\alpha}}{\rho_L} \rightarrow \infty, \\ \frac{(1-\alpha)L^2 \log L}{2\pi(\sigma_S^2 + b\sigma_B^2)} & \text{si } \frac{L^{2\alpha}}{\rho_L} \rightarrow b \in [0, \infty) \text{ et } \frac{L^{2\alpha} \log L}{\rho_L} \rightarrow \infty, \\ \frac{L^2 \log L}{2\pi\sigma_S^2} & \text{si } \left(\frac{L^{4\alpha}}{\rho_L}\right)_{L \in \mathbb{N}} \text{ borne ou } \frac{L^2 \log L}{\rho_L} \rightarrow 0. \end{cases}$$

Coalescent de Kingman



Convergence of $\mathcal{A}^L : \alpha = 1$

Théorème (BEV 2010)

On suppose $\psi_L = cL$. Soit $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{T}(1)$ distincts et $(A_L)_{L \geq 1}$ comme précédemment.

i Si $\rho_L L^{-2} \rightarrow b \in [0, \infty)$,

$$\mathcal{L}_{\mathbb{P}_{\varphi_n(Lx)}} \left(\left\{ \frac{1}{L} \mathcal{A}^L(\rho_L t), t \geq 0 \right\} \right) \Rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{P}_{\varphi_n(x)}} (\bar{\mathcal{A}}^{\infty, b, c}).$$

ii Si $\rho_L L^{-2} \rightarrow \infty$ et $\frac{2\pi\sigma_S^2 \rho_L}{L^2 \log L} \rightarrow \beta \in [0, \infty)$,

$$\mathcal{L}_{\mathbb{P}_{A_L}} \left(\left\{ \text{bl}(\mathcal{A}^L(\rho_L t)), t \geq 0 \right\} \right) \Rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{P}_{\varphi_n}} (\Lambda^{\beta, c}).$$

iii Sinon, si on pose $\omega_L = \frac{L^2 \log L}{2\pi\sigma_S^2}$,

$$\mathcal{L}_{\mathbb{P}_{A_L}} \left(\left\{ \text{bl}(\mathcal{A}^L(\omega_L t)), t \geq 0 \right\} \right) \Rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{P}_{\varphi_n}} (\mathcal{K}).$$

Convergence of $\mathcal{A}^L : \alpha = 1$

Théorème (BEV 2010)

On suppose $\psi_L = cL$. Soit $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{T}(1)$ distincts et $(A_L)_{L \geq 1}$ comme précédemment.

i Si $\rho_L L^{-2} \rightarrow b \in [0, \infty)$,

$$\mathcal{L}_{\mathbb{P}_{\wp_n(\mathbf{Lx})}} \left(\left\{ \frac{1}{L} \mathcal{A}^L(\rho_L t), t \geq 0 \right\} \right) \Rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{P}_{\wp_n(\mathbf{x})}} (\bar{\mathcal{A}}^{\infty, b, c}).$$

ii Si $\rho_L L^{-2} \rightarrow \infty$ et $\frac{2\pi\sigma_S^2 \rho_L}{L^2 \log L} \rightarrow \beta \in [0, \infty)$,

$$\mathcal{L}_{\mathbb{P}_{A_L}} \left(\left\{ \text{bl}(\mathcal{A}^L(\rho_L t)), t \geq 0 \right\} \right) \Rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{P}_{\wp_n}} (\Lambda^{\beta, c}).$$

iii Sinon, si on pose $\omega_L = \frac{L^2 \log L}{2\pi\sigma_S^2}$,

$$\mathcal{L}_{\mathbb{P}_{A_L}} \left(\left\{ \text{bl}(\mathcal{A}^L(\omega_L t)), t \geq 0 \right\} \right) \Rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{P}_{\wp_n}} (\mathcal{K}).$$

Convergence of $\mathcal{A}^L : \alpha = 1$

Théorème (BEV 2010)

On suppose $\psi_L = cL$. Soit $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{T}(1)$ distincts et $(A_L)_{L \geq 1}$ comme précédemment.

i Si $\rho_L L^{-2} \rightarrow b \in [0, \infty)$,

$$\mathcal{L}_{\mathbb{P}_{\wp_n(\mathbf{Lx})}} \left(\left\{ \frac{1}{L} \mathcal{A}^L(\rho_L t), t \geq 0 \right\} \right) \Rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{P}_{\wp_n(\mathbf{x})}} (\bar{\mathcal{A}}^{\infty, b, c}).$$

ii Si $\rho_L L^{-2} \rightarrow \infty$ et $\frac{2\pi\sigma_S^2 \rho_L}{L^2 \log L} \rightarrow \beta \in [0, \infty)$,

$$\mathcal{L}_{\mathbb{P}_{A_L}} \left(\left\{ \text{bl}(\mathcal{A}^L(\rho_L t)), t \geq 0 \right\} \right) \Rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{P}_{\wp_n}} (\Lambda^{\beta, c}).$$

iii Sinon, si on pose $\omega_L = \frac{L^2 \log L}{2\pi\sigma_S^2}$,

$$\mathcal{L}_{\mathbb{P}_{A_L}} \left(\left\{ \text{bl}(\mathcal{A}^L(\omega_L t)), t \geq 0 \right\} \right) \Rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{P}_{\wp_n}} (\mathcal{K}).$$

Convergence of $\mathcal{A}^L : \alpha = 1$

Théorème (BEV 2010)

On suppose $\psi_L = cL$. Soit $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{T}(1)$ distincts et $(A_L)_{L \geq 1}$ comme précédemment.

i Si $\rho_L L^{-2} \rightarrow b \in [0, \infty)$,

$$\mathcal{L}_{\mathbb{P}_{\wp_n(\mathbf{Lx})}} \left(\left\{ \frac{1}{L} \mathcal{A}^L(\rho_L t), t \geq 0 \right\} \right) \Rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{P}_{\wp_n(\mathbf{x})}} (\bar{\mathcal{A}}^{\infty, b, c}).$$

ii Si $\rho_L L^{-2} \rightarrow \infty$ et $\frac{2\pi\sigma_S^2 \rho_L}{L^2 \log L} \rightarrow \beta \in [0, \infty)$,

$$\mathcal{L}_{\mathbb{P}_{A_L}} \left(\left\{ \text{bl}(\mathcal{A}^L(\rho_L t)), t \geq 0 \right\} \right) \Rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{P}_{\wp_n}} (\Lambda^{\beta, c}).$$

iii Sinon, si on pose $\omega_L = \frac{L^2 \log L}{2\pi\sigma_S^2}$,

$$\mathcal{L}_{\mathbb{P}_{A_L}} \left(\left\{ \text{bl}(\mathcal{A}^L(\omega_L t)), t \geq 0 \right\} \right) \Rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{P}_{\wp_n}} (\mathcal{K}).$$

Processus limites

Définition

Soit $b \geq 0, c > 0$. $\bar{\mathcal{A}}^{\infty, b, c}$ est le processus markovien sur les partitions marquées (les marques appartenant à $\mathbb{T}(1)$) défini de la manière suivante :

- Entre les grands év., l'étiquette de chaque bloc évolue selon la loi d'un mouvement brownien de vitesse $b\sigma_s^2$ sur $\mathbb{T}(1)$, indépendamment des autres étiquettes.
- Les blocs sautent et fusionnent à cause des grands év. de reproduction (d'intensité $dt \otimes dx \otimes \mu^B(dr)$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{T}(1/c) \times [0, \sqrt{2}/2]$).

Processus limites

Définition

Soit $\beta \geq 0, c > 0$. $\Lambda^{\beta, c}$ est un coalescent à collisions multiples sur les partitions de \mathbb{N} , i.e. un processus markovien tel que sa restriction aux partitions de $\{1, \dots, n\}$ est aussi markovienne, et dont les taux de transition sont associés à une mesure finie Λ sur $[0, 1]$ par les relations :

$$q(\pi \rightarrow \pi') = \int_0^1 v^{k-2} (1-v)^{m-k} \Lambda(dv)$$

si π a m blocs et $\pi' \subset_k \pi$ ($k \geq 2$).

Ici, $q(\pi \rightarrow \pi')$ est donné par $(V_r = \text{Vol}(B_{\mathbb{T}(1)}(0, r)))$

$$c^{-2} \int_0^\infty \int_0^1 (V_{cr}u)^k (1 - V_{cr}u)^{m-k} \nu_r^B(du) \mu^B(dr) + \beta \delta_{\{k=2\}}.$$

Arguments pour le cas $\alpha < 1$

- ω_L est l'échelle de temps sur laquelle 2 lignages partant à distance $\mathcal{O}(L)$ se rencontrent à une distance qui leur permette de fusionner. Le temps de fusion une fois à cette distance est négligeable devant ω_L .
- On montre ensuite que lorsque deux lignages fusionnent, les autres sont à distance $\mathcal{O}(L)$ les uns des autres.
- Par symétrie, chaque paire de lignages a la même probabilité d'être la première à se rencontrer et fusionner.

On en conclut que les fusions ne peuvent être que binaires, sur l'échelle de temps ω_L et qu'à la limite l'espace ne joue plus de rôle, d'où le coalescent de Kingman comme limite.

Arguments pour le cas $\alpha < 1$

- ω_L est l'échelle de temps sur laquelle 2 lignages partant à distance $\mathcal{O}(L)$ se rencontrent à une distance qui leur permette de fusionner. Le temps de fusion une fois à cette distance est négligeable devant ω_L .
- On montre ensuite que lorsque deux lignages fusionnent, les autres sont à distance $\mathcal{O}(L)$ les uns des autres.
- Par symétrie, chaque paire de lignages a la même probabilité d'être la première à se rencontrer et fusionner.

On en conclut que les fusions ne peuvent être que binaires, sur l'échelle de temps ω_L et qu'à la limite l'espace ne joue plus de rôle, d'où le coalescent de Kingman comme limite.

Arguments pour le cas $\alpha < 1$

- ω_L est l'échelle de temps sur laquelle 2 lignages partant à distance $\mathcal{O}(L)$ se rencontrent à une distance qui leur permette de fusionner. Le temps de fusion une fois à cette distance est négligeable devant ω_L .
- On montre ensuite que lorsque deux lignages fusionnent, les autres sont à distance $\mathcal{O}(L)$ les uns des autres.
- Par symétrie, chaque paire de lignages a la même probabilité d'être la première à se rencontrer et fusionner.

On en conclut que les fusions ne peuvent être que binaires, sur l'échelle de temps ω_L et qu'à la limite l'espace ne joue plus de rôle, d'où le coalescent de Kingman comme limite.

Arguments pour le cas $\alpha < 1$

- ω_L est l'échelle de temps sur laquelle 2 lignages partant à distance $\mathcal{O}(L)$ se rencontrent à une distance qui leur permette de fusionner. Le temps de fusion une fois à cette distance est négligeable devant ω_L .
- On montre ensuite que lorsque deux lignages fusionnent, les autres sont à distance $\mathcal{O}(L)$ les uns des autres.
- Par symétrie, chaque paire de lignages a la même probabilité d'être la première à se rencontrer et fusionner.

On en conclut que les fusions ne peuvent être que binaires, sur l'échelle de temps ω_L et qu'à la limite l'espace ne joue plus de rôle, d'où le coalescent de Kingman comme limite.

Arguments pour le cas $\alpha = 1$

- Quand les grands év. sont assez rapides : mouvements browniens indépendants dus aux petits év. et fusions/sauts dus aux grands év. sur l'échelle de temps ρ_L .
- Si $L \ll \rho_L \leq L^2 \log L$, grâce aux petits év. les lignages sont répartis de manière uniforme et i.i.d. sur $\mathbb{T}(L)$ lorsqu'ils sont touchés par un grand événement.
- Quand les grands év. sont trop rares, on retrouve le résultat du cas sans grand év.

Arguments pour le cas $\alpha = 1$

- Quand les grands év. sont assez rapides : mouvements browniens indépendants dus aux petits év. et fusions/sauts dus aux grands év. sur l'échelle de temps ρ_L .
- Si $L \ll \rho_L \leq L^2 \log L$, grâce aux petits év. les lignages sont répartis de manière uniforme et i.i.d. sur $\mathbb{T}(L)$ lorsqu'ils sont touchés par un grand événement.
- Quand les grands év. sont trop rares, on retrouve le résultat du cas sans grand év.

Arguments pour le cas $\alpha = 1$

- Quand les grands év. sont assez rapides : mouvements browniens indépendants dus aux petits év. et fusions/sauts dus aux grands év. sur l'échelle de temps ρ_L .
- Si $L \ll \rho_L \leq L^2 \log L$, grâce aux petits év. les lignages sont répartis de manière uniforme et i.i.d. sur $\mathbb{T}(L)$ lorsqu'ils sont touchés par un grand événement.
- Quand les grands év. sont trop rares, on retrouve le résultat du cas sans grand év.

Merci pour votre attention !